

Irregularities of Distribution

Φαίδων Ανδριόπουλος και Σταύρος Ροζάκης

1 Εισαγωγή

Η μελέτη του κλάδου, τα βασικά αποτελέσματα του οποίου θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε στην παρούσα εργασία, θα μπορούσαμε να πούμε ότι πηγάζει από την εξής φυσική ερώτηση: «Πότε μια άπειρη ακολουθία από αριθμούς στο $[0, 1)$ είναι καλά/ομοιόμορφα κατανεμημένη;»

Ορισμός. Έστω $(x_n)_{n \geq 1}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών στο διάστημα $[0, 1)$. Για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών a, b με $0 \leq a < b \leq 1$, θεωρούμε το

$$Z[n, a, b] = \#\{1 \leq i \leq n : x_i \in [a, b)\},$$

που είναι ο αριθμός των n πρώτων όρων της ακολουθίας που βρίσκονται στο διάστημα $[a, b)$. Λέμε τότε ότι η $(x_n)_{n \geq 1}$ είναι **ομοιόμορφα κατανεμημένη** στο $[0, 1)$ αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z[n, a, b]}{n} = b - a,$$

για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$ με $0 \leq a < b \leq 1$

Είναι εύκολο τώρα να παρατηρήσει κανείς ότι $[a, b) = [0, b) \setminus [0, a)$ και άρα με φυσικό τρόπο μπορούμε να ορίσουμε $Z[n, a] = \#\{1 \leq i \leq n : x_i \in [0, a)\}$ και ομοίως να λέμε ότι η $(x_n)_{n \geq 1}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 1)$ αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Z[n, a]}{n} = a$, για κάθε $a \in [0, 1)$.

Ιστορικά, ο κλάδος «άνοιξε» το έτος 1935 με την ακόλουθη εικασία του Van der Corput, η οποία προέκυψε από τη δουλειά του στις συναρτήσεις κατανομής:

Εικασία. Αν $(x_n)_{n \geq 1}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών στο $(0, 1)$, τότε για κάθε αρκετά μεγάλο πραγματικό αριθμό K , υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n και δύο υποδιαστήματα I, J , ίσου μήκους, του $(0, 1)$, ώστε $|Z[n, I] - Z[n, J]| > K$.

Αυτό το πρόβλημα το έλυσε η μαθηματικός van Aardenne-Ehrenfest το 1945 (χρησιμοποιώντας εξαιρετικά ευφυείς μεθόδους, όπως παρατηρεί ο K. Roth) και τροποποιώντας την τεχνική της κατάφερε να αποδείξει το 1949 το εξής:

Θεώρημα. Έστω N ένας μεγάλος φυσικός αριθμός και $(x_n)_{n \geq 1}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών στο $(0, 1)$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $a \in (0, 1)$, ώστε:

$$|Z[n, a] - na| > c \frac{\log \log N}{\log \log \log N},$$

όπου $c > 0$ σταθερά.

Είναι, λοιπόν, ήδη προφανές από τα παραπάνω δύο θεωρήματα ότι για $n \in \mathbb{N}$ και $0 \leq a \leq 1$, δε μας ενδιαφέρει τόσο να μελετούμε το λόγο $\frac{Z[n, a]}{n}$, αλλά αντ' αυτού την discrepancy:

$$D[n, a] := Z[n, a] - na,$$

όπου na είναι ο αναμενόμενος αριθμός των όρων της ακολουθίας που πέφτουν στο διάστημα $[0, a)$. Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι μια ακολουθία είναι ομοιόμορφα κατανομημένη, αν ικανοποιεί την:

$$D[n, a] = o(n),$$

για κάθε $a \in [0, 1]$.

Από τη διαίθησή μας, αλλά και από τα ήδη προαναφερθέντα αποτελέσματα, παρατηρούμε ότι δεν είναι όλες οι ακολουθίες ομοιόμορφα κατανομημένες. Για την ακρίβεια υπάρχουν ακολουθίες που δεν έχουν καμία ομοιομορφία στον τρόπο που κατανέμονται (π.χ. η σταθερή). Μας ενδιαφέρει, λοιπόν, να εξετάσουμε την συμπεριφορά ορισμένων μέτρων της συνάρτησης $D[n, a]$, για μεγάλα n , δηλαδή όπως και στο θεώρημα της van Aardenne-Ehrenfest, να βρούμε ασυμπτωτικές εκτιμήσεις από τα κάτω. Τα κλασσικά αποτελέσματα, τα οποία κυρίως παρουσιάζουμε σε αυτή την εργασία, αφορούν τη 2-νόρμα και τη sup-νόρμα αυτής της συνάρτησης.

Συγκεκριμένα, εμείς θα ασχοληθούμε με το ίδιο πρόβλημα, αλλά στο μοναδιαίο τετράγωνο $[0, 1]^2$, αντί του μοναδιαίου διαστήματος. Ειδικότερα, θεωρούμε μια κατανομή \mathcal{P} , αποτελούμενη από N σημεία, στο $[0, 1]^2$. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in [0, 1]^2$, με $B(\mathbf{x})$ συμβολίζουμε το υποορθογώνιο $[0, x_1) \times [0, x_2)$ και με

$$Z[\mathcal{P}; B(\mathbf{x})] = \#(\mathcal{P} \cap B(\mathbf{x}))$$

συμβολίζουμε τον αριθμό των σημείων της \mathcal{P} που βρίσκονται στο ορθογώνιο $B(\mathbf{x})$. Όπως προείπαμε, θα μελετήσουμε τη discrepancy:

$$D[\mathcal{P}; B(\mathbf{x})] = Z[\mathcal{P}; B(\mathbf{x})] - Nx_1x_2,$$

όπου σημειώνουμε ότι Nx_1x_2 είναι ο αναμενόμενος αριθμός των σημείων της \mathcal{P} που πέφτουν στο $B(\mathbf{x})$.

Συμβολισμός. Στο υπόλοιπο της εργασίας, για δεδομένη κατανομή N , θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $D[\mathbf{x}]$, έναντι του $D[\mathcal{P}; B(\mathbf{x})]$. Επίσης, οι συναρτήσεις που ορίζουμε στα επόμενα κεφάλαια εξαρτώνται με προφανή τρόπο από την επιλογή της κατανομής \mathcal{P} , συνεπώς αυτό το γεγονός δε θα το δηλώνουμε, ώστε να μην υπάρξει πλήθος διαφορετικών συμβολισμών, πράγμα που ενδέχεται να προκαλέσει σύγχυση.

Τα κλασσικά αποτελέσματα του τομέα είναι:

1. (Roth 1954) Για κάθε κατανομή \mathcal{P} , N σημείων στο $[0, 1)^2$, έχουμε:

$$\|D(\mathbf{x})\|_2 \geq c(\log N)^{1/2},$$

για σταθερά $c > 0$.

2. (Schmidt 1972) Για κάθε κατανομή \mathcal{P} , N σημείων στο $[0, 1)^2$, έχουμε:

$$\|D(\mathbf{x})\|_\infty \geq c \log N,$$

για σταθερά $c > 0$.

3. (Davenport 1956) Υπάρχει κατανομή \mathcal{P} , N σημείων στο $[0, 1)^2$, για την οποία:

$$\|D(\mathbf{x})\|_2 \leq c(\log N)^{1/2},$$

για σταθερά $c > 0$.

4. (Lerch 1904) Υπάρχει κατανομή \mathcal{P} , N σημείων στο $[0, 1)^2$, για την οποία:

$$\|D(\mathbf{x})\|_\infty \leq c \log N,$$

για σταθερά $c > 0$.

Σε αυτά παρατηρούμε ότι από το 1 μπορούμε με τριτοβάθμιο τρόπο να λάβουμε ότι $\|D(\mathbf{x})\|_\infty \geq c(\log N)^{1/2}$, άρα από αυτή την οπτική, το 2 είναι καλύτερο αποτέλεσμα για την sup-νόρμα απ' ότι το 1. Επιπλέον, η σημαντική παρατήρηση είναι ότι λόγω των 3, 4, τα 1, 2 είναι τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα, ως προς τις εμπλεκόμενες σταθερές.

Στη συνέχεια της εργασίας, θα παρουσιάσουμε τα 1, 2 και 3, κάποιες παραλλαγές τους, καθώς και ένα ευφειές αποτέλεσμα του Schmidt.

Κλείνοντας, να σημειώσουμε ότι τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε εδώ είναι τα πρώτα βήματα σε αυτό τον κλάδο. Η discrepancy theory έχει επεκταθεί στη μελέτη ακολουθιών σημείων σε πιο εξωτικά γεωμετρικά αντικείμενα (π.χ. torus) καθώς και σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Τέλος, δε, χρησιμοποιεί εργαλεία από διάφορες άλλες περιοχές των μαθηματικών όπως είναι η αρμονική ανάλυση, οι πιθανοθεωρητικές μέθοδοι κ.α.

- $f_i(\mathbf{x})$, για $\mathbf{x} \in B$, ως εξής:

$$f_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } B \cap \mathcal{P} \neq \emptyset \\ R_i(\mathbf{x}), & \text{αν } B \cap \mathcal{P} = \emptyset \end{cases}$$

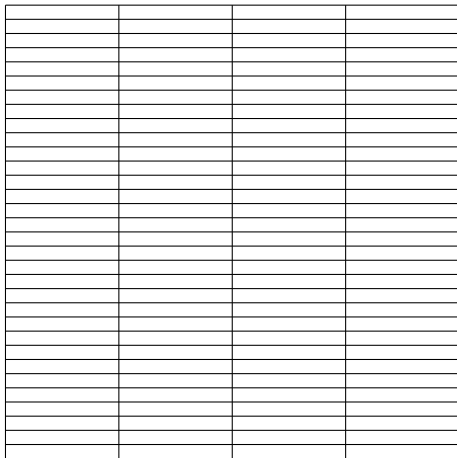
- $F(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n f_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0, 1]^2$

Λήμμα 2.1. Υποθέτουμε ότι οι ακέραιοι i, j ικανοποιούν την ανισότητα: $0 \leq i < j \leq n$. Τότε ισχύει ότι:

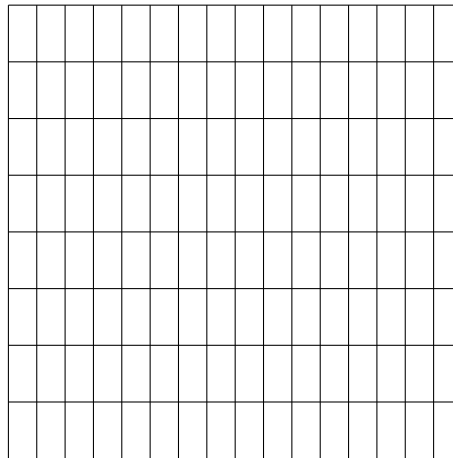
$$\iint_{[0,1]^2} f_i(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Απόδειξη. Επικαλύπτουμε το i -πλέγμα, που αποτελείται από 2^{-n} ορθογώνια διαστάσεων $2^{-i} \times 2^{i-n}$, με το j -πλέγμα που αποτελείται από 2^{-n} ορθογώνια διαστάσεων $2^{-j} \times 2^{j-n}$. Το προκύπτον πλέγμα το ονομάζουμε i, j -πλέγμα. Αυτό αποτελείται από 2^{n-i+j} ορθογώνια, τα οποία έχουν μήκος οριζόντιας πλευράς 2^{-j} και μήκος κάθετης πλευράς 2^{i-n} .

Για να το δούμε αυτό μπορούμε να σκεφτούμε και ως εξής: Αρχικά, παρατηρούμε ότι η διαμέριση του οριζόντιου διαστήματος $[0, 1)$ σε 2^j διαστήματα, μήκους 2^{-j} , αποτελεί εκτέλεση της διαμέρισής του σε 2^i διαστήματα μήκους 2^{-i} . Αντίστοιχα, η διαμέριση του κάθετου διαστήματος $[0, 1)$ σε 2^{n-i} διαστήματα μήκους 2^{i-n} , αποτελεί εκτέλεση της διαμέρισής του $[0, 1)$ σε 2^{n-j} διαστήματα μήκους 2^{j-n} . Συνεπώς, στη διαδικασία κατασκευής του i, j -πλέγματος, οι κάθετες γραμμές που ορίζουν το i -πλέγμα πατούν πάνω σε αυτές που ορίζουν το j -πλέγμα και το αντίστροφο.

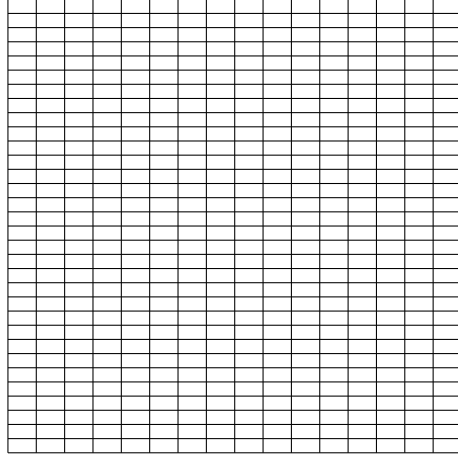


i -πλέγμα $n = 7, i = 2$



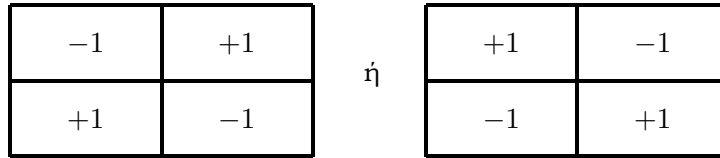
j -πλέγμα $n = 7, j = 4$

Επικαλύπτοντας το i -πλέγμα με το j -πλέγμα, προκύπτει το i, j -πλέγμα:



i, j -πλέγμα $n = 7, i = 2, j = 4$

Είναι πλέον προφανές, λόγω της επικάλυψης, ότι σε κάθε προκύπτον τετράγωνο \mathcal{S} του i, j -πλέγματος είτε έχουμε $f_i(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ είτε $f_i(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x}) = \pm 1$, σύμφωνα με τις παρακάτω εικόνες:



Σε κάθε περίπτωση είναι προφανές ότι:

$$\iint_{\mathcal{S}} f_i(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$$

Το ζητούμενο έπεται. □

Από το Λήμμα 2.1 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 \iint_{[0,1)^2} |F(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \iint_{[0,1)^2} f_i(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \\
 (2.2) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{i=0}^n \iint_{[0,1)^2} |f_i(\mathbf{x})|^2 \leq n + 1
 \end{aligned}$$

Λήμμα 2.2. Υποθέτουμε ότι ο ακέραιος i ικανοποιεί την $0 \leq i \leq n$. Τότε:

$$\iint_{[0,1]^2} f_i(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq -N2^{-n-5}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι B είναι ένα ορθογώνιο της μορφής (2.1). Διακρίνουμε περιπτώσεις:

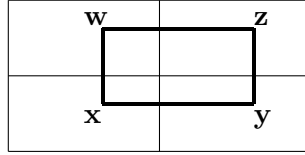
- $B \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$: Τότε έπεται ότι $f_i(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in B$, συνεπώς:

$$\iint_B f_i(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$$

- $B \cap \mathcal{P} = \emptyset$: Θεωρούμε το κάτω αριστερά υποορθογώνιο:

$$B' := [m_1 2^{-i}, (m_1 + \frac{1}{2}) 2^{-i-1}] \times [m_2 2^{i-n}, (m_2 + \frac{1}{2}) 2^{i-n}]$$

Για κάθε $\mathbf{x} \in B'$, ορίζουμε τα \mathbf{y}, \mathbf{z} και $\mathbf{w} \in B$, ως κορυφές του τετραγώνου με κάτω αριστερά κορυφή το \mathbf{x} , που έχει μήκος οριζόντιας πλευράς 2^{-i-1} και μήκος κάθετης πλευράς 2^{i-n-1} , όπως διακρίνουμε στο σχήμα:



Παρατηρούμε τώρα ότι η σχέση του \mathbf{x} με τα $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ είναι γραμμική (π.χ. $\mathbf{y} = \mathbf{x} + (2^{-i-1}, 0)$). Επίσης:

$$\begin{aligned} \iint_B f_i(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \iint_{B'} (D(\mathbf{x}) - D(\mathbf{y}) + D(\mathbf{z}) - D(\mathbf{w}))d\mathbf{x} = \\ &= \iint_{B'} D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w})d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

όπου είναι εύκολο να δειχθεί ότι η $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = D(\mathbf{x}) - D(\mathbf{y}) + D(\mathbf{z}) - D(\mathbf{w})$, αναπαριστά την discrepancy στο ορθογώνιο με κορυφές $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$.

Αφού $B \cap \mathcal{P} = \emptyset$, έπεται ότι: $D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) = 0 - N2^{-n-2}$. Όμως το ορθογώνιο B' έχει εμβαδόν 2^{-n-2} , επομένως:

$$\iint_B f_i(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} = -N2^{-2n-4}$$

Από την επιλογή του n , υπάρχουν τουλάχιστον $2^n - N \geq 2^{n-1}$ ορθογώνια B τύπου, ώστε $B \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Τότε, έχουμε ότι:

$$\iint_{[0,1]^2} f_i(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq -N2^{-2n-4}2^{n-1} = -N2^{-n-5},$$

που ήταν και το ζητούμενο □

Από το Λήμμα 2.2 έπεται ότι:

$$(2.3) \quad \iint_{[0,1]^2} F(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^n \iint_{[0,1]^2} f_i(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq -N2^{-m-5}(n+1)$$

Όμως από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε:

$$\left| \iint_{[0,1]^2} F(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right|^2 \leq \left(\iint_{[0,1]^2} |F(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right) \left(\iint_{[0,1]^2} |D(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)$$

Εφαρμόζοντας τις (2.2) και (2.3) στην παραπάνω ανισότητα, έχουμε ότι:

$$(N2^{-n-5}(n+1))^2 \leq (n+1) \left(\iint_{[0,1]^2} |D(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)$$

και άρα $\iint_{[0,1]^2} |D(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \geq c \log N$, για κατάλληλη σταθερά $c > 0$. ■

3 Η μέθοδος του Davenport (και μία παραλλαγή της)

Θεώρημα. (Davenport 1956) Για κάθε φυσικό αριθμό $N \geq 2$, υπάρχει μία κατανομή \mathcal{P} , N σημείων στο τετράγωνο $[0, 1]^2$ τέτοια ώστε:

$$\iint_{[0,1]^2} |D(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < c \log N,$$

για κατάλληλη σταθερά $c > 0$.

Θα ξεκινήσουμε να κατασκευάζουμε μία κατανομή σημείων που να επιβεβαιώνει το θεώρημα ως εξής: Ορίζουμε ένα lattice, Λ , στον \mathbb{R}^2 , το οποίο παράγεται από τα διανύσματα $(1, 0)$, $(\sqrt{2}, 1)$. Έστω M φυσικός αριθμός και \mathcal{P} το σύνολο των (M) σημείων του Λ που περιέχονται στο $[0, 1) \times [0, M)$.

Ορισμός. Lattice στον \mathbb{R}^2 είναι μια διακριτή υποομάδα του \mathbb{R}^2 τέτοια ώστε να παράγει όλο το \mathbb{R}^2 . Κάθε τέτοιο Λ μπορεί να παραχθεί από μία βάση του \mathbb{R}^2 ως διανυσματικός χώρος, παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς με ακέραιους συντελεστές στα στοιχεία της βάσης.

Ορίζουμε ως

$$\{\alpha\} = \begin{cases} \alpha - [\alpha], & \text{αν } \alpha < 0 \\ \alpha - \lfloor \alpha \rfloor, & \text{αν } \alpha \geq 0 \end{cases}$$

να είναι το δεκαδικό μέρος του πραγματικού αριθμού α . Στο εν λόγω lattice, για επιλογές $a_1 = n, a_2 = -[n\sqrt{2}]$, έχουμε: $a_1(\sqrt{2}, 1) + a_2(1, 0) = (\{\sqrt{2}n\}, n)$. Άρα βλέπουμε πως $\mathcal{P} = \{(\{\sqrt{2}n\}, n) : 0 \leq n \leq M-1\}$.

Για κάθε παραλληλόγραμμο $B(y_1, y_2) := [0, y_1) \times [0, y_2) \subseteq [0, 1) \times [0, M)$, θέτουμε:

- $Z[\mathcal{P}; B(y_1, y_2)] = \#(\mathcal{P} \cap B(y_1, y_2))$ και
- $E[\mathcal{P}; B(y_1, y_2)] = Z[\mathcal{P}; B(y_1, y_2)] - y_1 y_2$.

Επιπλέον, ορίζουμε την $f(x) = \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) \mathcal{X}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}(x)$, όπου $\mathcal{X}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Η f είναι 1-περιοδική και για $y_2 \in [0, M]$ ακέραιο, ισχύει το εξής:

Λήμμα 3.1.

$$(3.1) \quad E[\mathcal{P}; B(y_1, y_2)] = \sum_{n=0}^{y_2-1} f(\sqrt{2}n - y_1) - f(\sqrt{2}n)$$

Σχεδόν για όλα τα y_1 .

Απόδειξη. • Αν $\{x\} = y_1$, τότε $x - y_1 \in \mathbb{Z}$ και $y_1 + f(x - y_1) - f(x) = y_1 - y_1 = 0$.

- Αν $\{x\} > y_1$, τότε $y_1 + f(x - y_1) - f(x) = y_1 - y_1 - \{x\} - \{x\} = 0$, αφού $f(x - y_1) = x - y_1 - \lceil x - y_1 \rceil - \frac{1}{2} = \{x - y_1\} = \{x\} - y_1$, γιατί $y_1 \in [0, 1]$.
- Αν $\{x\} < y_1$, τότε, $f(x - y_1) = x - y_1 - \lceil x - y_1 \rceil - \frac{1}{2} = x - y_1 - [x] + 1 - \frac{1}{2}$, που δίνει ότι $y_1 + f(x - y_1) - f(x) = 1$.

□

Έχοντας αυτό το αποτέλεσμα, και γνωρίζοντας ότι $f(x) \sim -\sum_{k \neq 0} \frac{\exp(kx)}{2\pi ik}$, $\exp(\phi) = e^{2\pi i \phi}$, είναι θέμα πράξεων να υπολογιστεί το παρακάτω:

$$E[\mathcal{P}; B(y_1, y_2)] \sim \sum_{k \neq 0} \frac{1 - \exp(kx)}{2\pi ik} \sum_{n=0}^{y_2-1} \exp(\sqrt{2}nk).$$

Όμως, αυτή η συνάρτηση δεν ανήκει στον $L_2([0, 1])$, πράγμα που μας εμποδίζει να εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Parseval. Για να παρακάμψουμε αυτό το εμπόδιο, εισάγουμε ένα δεύτερο lattice, Λ' , που παράγεται από τα διανύσματα $\{(1, 0), (-\sqrt{2}, 1)\}$ και, αντίστοιχα, $\mathcal{P}' = \{(\{-\sqrt{2}n\}, n) : 0 \leq n \leq M - 1\}$ είναι τα M σημεία του Λ' που περιέχονται στο $[0, 1] \times [0, M]$. Για $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \mathcal{P}'$, έχουμε $2M$ σημεία μέσα στο ορθογώνιο που μας ενδιαφέρει. Αν $Z[\mathcal{Q}; B(y_1, y_2)] = \#(\mathcal{Q} \cap B(y_1, y_2))$, έχουμε:

$$F[\mathcal{Q}; B(y_1, y_2)] := Z[\mathcal{Q}; B(y_1, y_2)] - 2y_1y_2 = E[\mathcal{P}; B(y_1, y_2)] + E[\mathcal{P}'; B(y_1, y_2)]$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε το αντίστοιχο της (3.1), δηλαδή

$$F[\mathcal{Q}; B(y_1, y_2)] = \sum_{n=0}^{y_2-1} f(\sqrt{2}n - y_1) - f(\sqrt{2}n + y_1)$$

σχεδόν για όλα τα y_1 .

Έτσι,

$$F[\mathcal{Q}; B(y_1, y_2)] \sim \sum_{k \neq 0} \frac{\exp(y_1k) - \exp(-y_1k)}{2\pi ik} \left(\sum_{n=0}^{y_2-1} \exp(nk\sqrt{2}) \right).$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και ολοκληρώνοντας ως προς y_1 στο $[0, 1]$ παίρνουμε, εφαρμόζοντας το θεώρημα Parseval, πως υπάρχει μία σταθερά c_0 τέτοια ώστε:

$$(3.2) \quad \int_0^1 F[\mathcal{Q}; B(y_1, y_2)] dy_1 \leq c_0 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left| \sum_{n=0}^{y_2-1} \exp(kn\sqrt{2}) \right|^2 \right)$$

Αυτό γιατί για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\exp(y_1k) - \exp(-y_1k)}{2\pi ik} \right)^2 &= \frac{2 - (\exp(2y_1k) + \exp(-2y_1k))}{4\pi^2 k^2} = \\ &= \frac{1 - \cos(2y_1k)}{2\pi^2 k^2} \leq \frac{1 + 1}{2\pi^2 k^2} = \frac{1}{\pi^2 k^2}. \end{aligned}$$

Για να μπορέσουμε να προχωρήσουμε στις εκτιμήσεις μας, θα χρειαστούμε το εξής: Υπάρχει μία σταθερά $c = c(\sqrt{2})$ τέτοια ώστε $k\|k\sqrt{2}\| > c > 0$. (π.χ. $c = 0.2$) Πλέον, μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω:

Λήμμα 3.2. Υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$, τέτοια ώστε:

$$(3.3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left| \sum_{n=0}^{y_2-1} \exp(kn\sqrt{2}) \right|^2 \leq c_1 \log(2y_2).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε γνωστή την ακόλουθη εκτίμηση πάνω στα τριγωνομετρικά αθροίσματα: Υπάρχει σταθερά $c^* > 0$ τέτοια ώστε

$$(3.4) \quad \left| \sum_{n=0}^{y_2-1} \exp(\sqrt{2}nk) \right| \leq c^* \min\{y_2, \|k\sqrt{2}\|^{-1}\}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{y_2-1} \exp(\sqrt{2}kn) \right|^2 \leq c^* \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \min\{y_2^2, \|k\sqrt{2}\|^{-1}\} \leq \\ &\leq c^* \left(\sum_{h=1}^{\infty} 2^{-h} \sum_{2^{h-1} \leq k \leq 2^h} \min\{y_2, \|k\sqrt{2}\|^{-1}\} \right) \end{aligned}$$

Ο λόγος που έσπασε έτσι το άθροισμα, είναι εξ' αιτίας του ότι έχουμε $\|k\sqrt{2}\| > c2^{-h}$. Επίσης, για κάθε ζεύγος h, p φυσικών, υπάρχουν το πολύ 2 τιμές του k που ικανοποιούν το $2^{h-1} \leq k \leq 2^h$ και $pc2^{-h} \leq \|k\sqrt{2}\| < (p+1)c2^h$ (*¹). Έπεται ότι:

$$\begin{aligned} S &\leq c_2 \left(\sum_{h=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \min\{2^{-2h} y_2^2, p^{-2}\} \right) = \\ &= c_2 \left(\sum_{2^h \leq y_2} \sum_{p=1}^{\infty} \min\{2^{-2h} y_2^2, p^{-2}\} + \sum_{2^h > y_2} \sum_{p=1}^{\infty} \min\{2^{-2h} y_2^2, p^{-2}\} \right) \\ &\leq c_3 \left(\sum_{2^h \leq y_2} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-2} + \sum_{2^h > y_2} \left(2^{-2h} y_2^2 y_2^{-1} 2^h + \sum_{p > 2^h y_2^{-1}} p^{-2} \right) \right) \\ &\leq c_4 \left(\sum_{2^h \leq y_2} + \sum_{2^h > y_2} 2^{-h} y_2 \right) \leq c_5 \log(2y_2) \end{aligned}$$

□

Επιτρέποντας στο y_2 να παίρνει μη ακέραιες τιμές, προκαλείται ένα σφάλμα $O(1)$, δηλαδή κατά μία σταθερά, η οποία θα εξαρτάται μόνο από το $\sqrt{2}$. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$(3.5) \quad \int_0^M \int_0^1 F[\mathcal{Q}; B(y_1, y_2)] dy_1 dy_2 \leq cM \log(2M)$$

ενώ κανονικοποιώντας ως προς y_2 παίρνουμε πως το \mathcal{Q} ικανοποιεί:

$$(3.6) \quad \|F(\mathcal{Q}; B(y_1, y_2))\|_2 \leq (c \log(2M))^{\frac{1}{2}}$$

Με ένα παρόμοιο επιχειρήμα, ο Davenport διατύπωσε αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις 3 διαστάσεις. Όμως, στην προκειμένη εμπλέκεται μία ανοιχτή εικασία του Littlewood, της οποίας η αναλήθεια χρειάζεται. 23 χρόνια αργότερα, το 1979, ο Roth, σε μία παραλλαγή της παραπάνω μεθόδου απέφυγε αυτό το πρόβλημα. Παρουσιάζουμε την ιδέα στην περίπτωση των δύο διαστάσεων.

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $\Omega := ti + \Lambda = \{ti + v, v \in \Lambda\}$, όπου και πάλι ενδιαφερόμαστε στο σύνολο \mathcal{P}_t των M σημείων που περιέχονται στο $[0, 1) \times [0, M)$. Βλέπουμε πως $\mathcal{P}_t = \{(\{t + \sqrt{2}n\}, n) : n \in \{0, 1, \dots, M-1\}\}$. Για $B(y_1, y_2)$ όπως πριν,

$$E[\mathcal{P}_t; B(y_1, y_2)] = Z[\mathcal{P}_t; B(y_1, y_2)] - y_1 y_2 \sim \sum_{k \neq 0} \frac{1 - e(-y_1 k)}{2\pi i k} \left(\sum_{n=0}^{y_2-1} e(\sqrt{2}nk) \right) e(tk).$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με παραπάνω, αφού υψώσουμε στο τετράγωνο, ολοκληρώσουμε ως προς t στο $[0, 1]$, το θεώρημα Parseval μας δίνει

$$\int_0^1 |E[\mathcal{P}_t; B(y_1, y_2)]|^2 dt \leq c' \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left| \sum_{n=0}^{y_2-1} e(\sqrt{2}nk) \right|^2 \right),$$

όπου μετά, χρησιμοποιώντας την (3.3) και ολοκληρώνοντας ως προς y_1 στο $[0, 1]$, και ως προς y_2 στο $[0, M]$ παίρνουμε:

$$(3.7) \quad \int_0^1 \int_0^M \int_0^1 |E[\mathcal{P}_t; B(y_1, y_2)]|^2 dy_1 dy_2 dt \leq c_* M \log(2M),$$

για κατάλληλη σταθερά. Από την (3.7) προκύπτει ότι για κάποιο t_0 στο $[0, 1]$, το σύνολο \mathcal{P}_{t_0} πληροί την

$$\int_0^M \int_0^1 |E[\mathcal{P}_{t_0}; B(y_1, y_2)]|^2 dy_1 dy_2 \leq CM \log(2M).$$

Κανονικοποιώντας ως προς το y_1 παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, για την κατανομή $\mathcal{P}_{t_0} = \{(\{t_0 + \sqrt{2}n\}, \frac{n}{M}) : n \in \{0, 1, \dots, M-1\}\}$, των $N = M$ σημείων.

Να τονίσουμε ότι οπουδήποτε γράψαμε $\sqrt{2}$, το κάναμε για καλύτερη κατανόηση της μεθόδου. Στην πραγματικότητα, μας κάνει οποιοσδήποτε άρρητος θ με (συνεχή κλασματική επέκταση με φραγμένα partial quotients. Δηλαδή, $\theta = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$, a_i είναι

τα partial quotients. Για έναν τέτοιο θ είναι γνωστό πως υπάρχει μια σταθερά $c = c(\theta)$ τέτοια ώστε $k\|k\theta\| > c > 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

Κλείνοντας την παράγραφο, δίνουμε εδώ ένα αποτέλεσμα που παραλήφθηκε κατά τη διάρκεια της περιγραφής της μεθόδου.

(\star^1): Αν $p > 0$ ακέραιος, τότε υπάρχει το πολύ ένας ακέραιος k με:

- $pc2^{-h} \leq \{\sqrt{2}k\} < (p+1)c2^{-h}$ (A1), και
- $2^{h-1} \leq k < 2^h$ (A2).

Αν υπήρχαν δύο $k_1 < k_2$, τότε $\|\sqrt{2}k_2 - \sqrt{2}k_1\| \leq \|\{\sqrt{2}k_2\} - \{\sqrt{2}k_1\}\| < \frac{c}{2^h} < \frac{c}{k_2 - k_1}$, άτοπο. Ομοίως, υπάρχει το πολύ ένας ακέραιος k με $pc2^{-h} \leq \{-\sqrt{2}k\} < (p+1)c2^{-h}$ και $2^{h-1} \leq k < 2^h$. Αφού $\|\sqrt{2}k\| = \min\{\{\sqrt{2}k\}, \{-\sqrt{2}k\}\}$ υπάρχουν το πολύ δύο ακέραιοι που πληρούν τις δύο αυτές απαιτήσεις A1 και A2. Τέλος, κάθε k με $2^{h-1} \leq k < 2^h$ ικανοποιεί τα A1, A2 αλλιώς $\|\sqrt{2}k\| < c2^{-h} < \frac{c}{k}$, άτοπο. ■

4 Η τροποποίηση της μεθόδου του Roth από τον Halász

Αν και το αποτέλεσμα που παραθέτουμε σε αυτή την παράγραφο είχε ήδη αποδειχθεί από τον Schmidt από το 1972, εμείς θα δούμε μία απόδειξη του Halász, που είναι μια απλή τροποποίηση αυτής του Roth. Να σημειώσουμε εδώ όμως ότι σε αντίθεση με αυτή του Schmidt, η απόδειξη του Halász δε δουλεύει για διαστάσεις μεγαλύτερες του 3.

Θεώρημα. Halász (1981) Για κάθε κατανομή \mathcal{P} αποτελούμενη από N σημεία στο μοναδιαίο τετράγωνο $[0, 1)^2$, έχουμε ότι:

$$\sup_{\mathbf{x} \in [0,1)^2} |D(\mathbf{x})| \geq c \log N,$$

για κατάλληλη σταθερά $c > 0$

Θεωρούμε μια κατανομή \mathcal{P} , αποτελούμενη από N σημεία στο μοναδιαίο τετράγωνο $[0, 1)^2$. Επιλέγουμε έναν μη αρνητικό ακέραιο n , ο οποίος να ικανοποιεί την ανισότητα:

$$(4.1) \quad 2^{n-1} < 2N \leq 2^n$$

Για κάθε ακέραιο $0 \leq i \leq n$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f_i(\mathbf{x})$ όπως στην απόδειξη του θεωρήματος του Roth.

Επιπλέον, θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση

$$H(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^n (1 + a f_i(\mathbf{x})) - 1,$$

όπου $a \in (0, \frac{1}{2})$ είναι σταθερά, η ακριβής τιμή της οποίας θα δοθεί στη συνέχεια.

Εξετάζουμε αρχικά την εξής απλή γενίκευση του Λήμματος 2.1:

Λήμμα 4.1. Υποθέτουμε ότι οι ακέραιοι $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{Z}$ ικανοποιούν την ανισότητα $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$. Τότε ισχύει ότι:

$$\iint_{[0,1)^2} f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Απόδειξη. Όπως πριν, θεωρούμε τα i_1 -πλέγμα, \dots , i_k -πλέγμα του $[0, 1)^2$. Παρατηρούμε ότι η διαμέριση του κάθετου $[0, 1)$ που αντιστοιχεί στο i_1 -πλέγμα έχει το μικρότερο πλάτος, πράγμα που ισχύει και για το οριζόντιο $[0, 1)$, στην περίπτωση του i_k -πλέγματος.

Επικαλύπτοντας τα πλέγματα, προκύπτει μια διαμέριση του $[0, 1)^2$ σε $2^{n-i_1+i_k}$ ορθογώνια με μήκος οριζόντιας πλευράς 2^{-i_k} και μήκος κάθετης πλευράς 2^{i_1-n} . Αν \mathcal{S} είναι ένα οποιοδήποτε τέτοιο ορθογώνιο της διαμέρισης, τότε είτε έχουμε $f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ είτε $f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) = \pm 1$, σύμφωνα με τις παρακάτω εικόνες:

-1	+1
+1	-1

ή

+1	-1
-1	+1

Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι:

$$\iint_{[0,1]^2} f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

Το αποτέλεσμα είναι άμεσο. □

Παρατηρούμε ότι:

$$\prod_{i=0}^n (1 + af_i(\mathbf{x})) = 1 + aF(\mathbf{x}) + \sum_{k=2}^{n+1} a^k F_k(\mathbf{x}),$$

όπου $F(\mathbf{x})$ είναι η βοηθητική συνάρτηση του Roth και όπου για κάθε $k = 2, \dots, n + 1$, έχουμε

$$F_k(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^n \dots \sum_{i_k=0, i_1 < \dots < i_k}^n f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x})$$

Αρχικά, είναι προφανές ότι:

$$(4.2) \quad H(\mathbf{x}) = aF(\mathbf{x}) + \sum_{k=2}^{n+1} a^k F_k(\mathbf{x})$$

Επιπλέον, λόγω των περιορισμών που έχουμε επιβάλει στο a , από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι:

$$|H(\mathbf{x})| \leq \prod_{i=0}^n (1 + af_i(\mathbf{x})) + 1$$

και άρα από το Λήμμα 4.1 έπεται ότι:

$$(4.3) \quad \iint_{[0,1]^2} |H(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \leq 2$$

Λήμμα 4.2. Υποθέτουμε ότι οι ακέραιοι i_1, \dots, i_k ικανοποιούν την ανισότητα $0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Τότε:

$$\left| \iint_{[0,1]^2} f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq N 2^{-n+i_1-i_k-4}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι \mathcal{S} είναι ένα από τα $2^{n-i_1+i_k}$ ορθογώνια του i, j -πλέγματος που βλέπουμε στην απόδειξη του Λήμματος 4.1, καθένα από τα οποία έχει μήκος οριζόντιας πλευράς 2^{-i_k} και μήκος κάθετης πλευράς 2^{i_1-n} . Για κάθε τέτοιο ορθογώνιο \mathcal{S} , από το Λήμμα 4.1 έχουμε είτε $f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) = \pm 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$ είτε $f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$. Η πρώτη περίπτωση ισχύει για $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset$. Τότε, όπως στην απόδειξη του Λήμματος 2.2 (μεπαρόμοια επιχειρήματα δηλαδή), μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\iint_{\mathcal{S}} f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \pm N 2^{-2(n-i_1+i_k)-4},$$

από το οποίο είναι άμεσο ότι:

$$\left| \iint_{\mathcal{S}} f_{i_1}(\mathbf{x}) \dots f_{i_k}(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq N 2^{-2(n-i_1+i_k)-4}$$

Παρατηρούμε ότι στην άλλη περίπτωση (δηλαδή για $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$), η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται με τετριμμένο τρόπο, και άρα το ζητούμενο έπεται με απλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας. \square

Λήμμα 4.3. Για κάθε $k = 2, \dots, n+1$, έχουμε ότι:

$$\left| \iint_{[0,1]^2} F_k(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{i=0}^{n-k+1} \sum_{h=1}^{n-i} N 2^{-n-h-4} \binom{h-1}{k-2}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $i_1 = i$ και ότι $i_k = i = h$, όπου i, h σταθεροί ακέραιοι. Τότε υπάρχουν ακριβώς $\binom{h-1}{k-2}$ επιλογές για ακέραιους i_2, \dots, i_{k-1} που να ικανοποιούν την: $i_1 < i_2 < \dots, i_{k-1} < i_k$. Το αποτέλεσμα είναι τώρα άμεσο από το Λήμμα 4.2 \square

Από το παραπάνω, έπεται τώρα ότι:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=2}^{n+1} a^k \iint_{[0,1]^2} F_k(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{h=1}^{n-i} \sum_{k=2}^{h+1} a^k N 2^{-n-h-4} \binom{h-1}{k-2} \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{h=1}^{n-i} \sum_{k=2}^{h+1} a^2 N 2^{-n-h-4} \binom{h-1}{k-2} a^{k-2} \leq N \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{h=0}^{\infty} 2^{-n-h-4} a^2 (1+a)^h \\ (4.4) \quad & \leq a^2 N 2^{-n-4} n \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1+a}{2} \right)^h \leq a^2 N 2^{-n-2} n, \end{aligned}$$

αφού $0 < a < \frac{1}{2}$. Επειδή έχουμε τις ίδιες υποθέσεις με το θεώρημα του Roth, συγκεκριμένα λόγω της (4.1), η ανισότητα (2.3) ισχύει. Εφαρμόζοντάς την μαζί με τις (4.2) και (4.4), λαμβάνουμε το εξής:

$$\begin{aligned} \left| \iint_{[0,1]^2} H(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| & \geq a \left| \iint_{[0,1]^2} F(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| - \left| \sum_{k=2}^{n+1} a^k \iint_{[0,1]^2} F_k(\mathbf{x}) D(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ & \geq a N 2^{-n-5} (n+1) - a^2 N 2^{-n-2} n \end{aligned}$$

Σε αυτή, αν θέσουμε π.χ. $a = 2^{-6}$, λαμβάνουμε την εξής ανισότητα:

$$(4.5) \quad \left| \iint_{[0,1)^2} H(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| > c \log N,$$

για κατάλληλη σταθερά $c > 0$, την οποία αν συνδυάσουμε με την (4.3), λαμβάνουμε το ζητούμενο, λόγω της τριτοβάθμιας ανισότητας:

$$\left| \iint_{[0,1)^2} H(\mathbf{x})D(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| \leq \left(\sup_{\mathbf{x} \in [0,1)^2} |D(\mathbf{x})| \right) \left(\iint_{[0,1)^2} |H(\mathbf{x})|d\mathbf{x} \right) \quad \blacksquare$$

5 Ένα αποτέλεσμα του Schmidt.

Το 1975, ο W.Schmidt απέδειξε το εξής θεώρημα για κάθε κατανομή σημείων στο τετράγωνο $[0, 1]^2$.

Θεώρημα. Schmidt (1975) Για κάθε κατανομή \mathcal{P} , N σημείων, στο $[0, 1]^2$, υπάρχει ένα κυρτό σύνολο $K \subseteq [0, 1]^2$, τέτοιο ώστε $|D[\mathcal{P}; K]| > c_0 N^{\frac{1}{3}}$, για κάποια σταθερά c_0 .

Απόδειξη. Φέρουμε τον εγγεγραμμένο κύκλο, έστω Γ , στο τετράγωνο $[0, 1]^2$ με διάμετρο 1 (άρα με ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$) και κέντρο το κέντρο του τετραγώνου. Έπειτα, θεωρούμε κυκλικούς τομείς εμβαδού $(2N)^{-1}$, ο καθένας, ο οποίος είναι το γεωμετρικό σχήμα που ορίζεται από ένα τόξο και την αντίστοιχη χορδή του. Είναι προφανές πως κάθε ένας από αυτούς τους κυκλικούς τομείς S , είτε δεν θα περιέχει κανένα σημείο της \mathcal{P} είτε θα περιέχει τουλάχιστον 1. Στην πρώτη περίπτωση, $D[\mathcal{P}; S] = 0 - N \cdot \frac{1}{2N} = -\frac{1}{2}$, ενώ στη δεύτερη θα έχουμε $D[\mathcal{P}; S] = \#(\mathcal{P} \cap S) - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, όπου $D[\mathcal{P}; S] = \#(\mathcal{P} \cap S) - N\mu(S)$, μ το μέτρο Lebesgue του \mathbb{R}^2 .

Ισχυρισμός. Ισχύει ότι:

$$\max\{\#\{\xi\text{ένων ανα δύο κυκλικών τομέων εμβαδού } (2N)^{-1} \text{ μέσα στο } \Gamma\}\} \geq cN^{\frac{1}{3}}.$$

Απόδειξη. Η μέγιστη επιφάνεια που καταλαμβάνεται από τους κυκλικούς τομείς επιτυγχάνεται στην περίπτωση που δημιουργείται ένα εγγεγραμμένο πολύγωνο. Εφόσον όλοι οι τομείς έχουν το ίδιο εμβαδόν, το πολύγωνο θα είναι κανονικό, έστω n -γωνο. Αν θ η γωνία της χορδής του τομέα, ισχύει πως $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Από γεωμετρία έχουμε πως το εμβαδόν καθενός ισούται με $\frac{\pi\rho^2}{n} - \frac{\rho^2 \sin \theta}{2}$, γεγονός που μας οδηγεί στο εξής:

$$\frac{1}{2N} = \frac{\pi}{4n} - \frac{\sin \theta}{8} \Rightarrow \frac{4}{N} = \theta - \sin \theta$$

Από ανάπτυγμα Taylor για το ημίτονο παίρνουμε:

$$\sin \theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{2k-1}}{(2k-1)!} (-1)^{k-1} = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

Από αυτό μπορούμε να δούμε πως:

$$\frac{4}{N} = \frac{\theta^3}{3!} + \theta^3(\dots) \geq \frac{\theta^3}{6},$$

Άρα:

$$\frac{24}{N} \geq \theta^3 \Rightarrow \left(\frac{N}{24}\right)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{n}{2\pi} \Rightarrow n \geq \frac{2\pi}{24^{\frac{1}{3}}} N^{\frac{1}{3}}.$$

□

Μέσα σε αυτά, είναι οι S_1, S_2, \dots, S_m που δεν περιέχουν σημεία της \mathcal{P} , και οι T_1, T_2, \dots, T_k που ο καθένας περιέχει τουλάχιστον 1 σημείο. Για ευκολία, ονομάζουμε $S := \bigcup S_i$ και $T := \bigcup T_j$. Τα δύο σύνολα που προκύπτουν, $\Gamma \setminus T$ και $\Gamma \setminus S$, είναι κυρτά και επιπλέον:

$$\Omega_1 = D[\mathcal{P}; \Gamma \setminus S] = D[\mathcal{P}; \Gamma] - \sum_{i=1}^m D[\mathcal{P}; S_i]$$

$$\Omega_2 = D[\mathcal{P}; \Gamma \setminus T] = D[\mathcal{P}; \Gamma] - \sum_{j=1}^k D[\mathcal{P}; T_j]$$

Άρα,

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \sum_{j=1}^k D[\mathcal{P}; T_j] - \sum_{i=1}^m D[\mathcal{P}; S_i] \geq \frac{m}{2} + \frac{k}{2} = \frac{m+k}{2} \geq \frac{cN^{\frac{1}{3}}}{2} > 0$$

Τότε, είτε $|\Omega_1| \geq \frac{1}{4}cN^{\frac{1}{3}}$, ή $|\Omega_2| \geq \frac{1}{4}cN^{\frac{1}{3}}$, γιατί αλλιώς θα ίσχυε $\Omega_1 - \Omega_2 = |\Omega_1 - \Omega_2| \leq |\Omega_1| + |\Omega_2| < \frac{1}{2}cN^{\frac{1}{3}}$, σε αντίφαση με τα παραπάνω. Για $K = \Omega_1$ ή Ω_2 έπεται το ζητούμενο με $c_0 = \frac{1}{4}c > 0$ \square