Arch. Hist. Exact Sci. (2013) 67:81–118
DOI 10.1007/s00407-012-0109-6

Sur le théorème de recouvrement de Vitali

L'apprivoisement des constructions ensemblistes infinies

Bernard Maurey · Jean-Pierre Tacchi

Received: 12 March 2012 / Published online: 26 September 2012

Résumé

L'essentiel sur les *recouvrements à la Vitali* peut être exposé dans le cadre des familles d'intervalles de **R** et de leurs points d'accumulation.

Le *Théorème de Recouvrement de Vitali* est pour la Théorie de l'Intégration, ainsi que le dit Lebesgue lui-même, *un résultat d'une importance capitale*. Pourtant, deux auteurs
Thomas Hawkins: *Lebesgue's Theory of integration. Its origins and development*,
Alain Michel: *Constitution de la Théorie de l'Intégration*,
qui consacrent, chacun, un livre à l'Histoire de l'intégrale de Lebesgue, considèrent le *Théorème de Vitali*, comme un outil dont il est superflu d'étudier le mécanisme, pour démontrer des théorèmes de différentiabilité. A contrario, il nous a paru légitime, pour comprendre ce qui en faisait la puissance, d'étudier les différentes formes qu'a revêtues sa démonstration.

Nous nous sommes efforcé, en particulier, de mettre en lumière le passage autour de 1920, d'une preuve *constructive* du théorème de recouvrement, initiée par Vitali-Lebesgue, à une preuve *ensembliste*, illustrée par *Banach-Natanson*.

Communicated by: Jeremy Gray.

B. Maurey
UFR de Mathématiques, Université Paris-Diderot, Paris, France
e-mail: maurey@math.Jussieu.fr

J.-P. Tacchi (✉)
Projet Combinatoire et Optimisation, Institut de Mathématiques de Jussieu,
Université Pierre et Marie Curie, Paris, France
e-mail: jean.pierre.tacchi@gmail.com

Le début de l'histoire: Vitali fait précéder l'exposé de son théorème par celui d'un lemme dont l'*algorithme*, au coeur de sa démonstration, a une portée générale qui dépasse celle de la *Théorie de la mesure*.
§ 2.2, pp. 5–9: au pas N, dans l'ensemble

$$\mathcal{S}_{N-1} = \{s \in \Sigma,\ s \cap \{s_1, \ldots, s_{N-1}\} = \emptyset\}$$

des segments, $s \in \Sigma$ qui ne touchent aucun des distingués, s_i, aux pas précédents, $i \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$, on en distingue un, s_N, pris parmi les plus longs:

$$|s_N| > l_N - \epsilon_N \ \ : \ \ l_N = \sup\{s \in \Sigma\ :\ s \in \mathcal{S}_{N-1}\}$$

Puis on forme le *paquet*, Σ_N, de segments, $s \in \mathcal{S}_{N-1}$ qui touchent le distingué, s_N.

§ 3.2. *Un deuxième niveau de compréhension*
Lebesgue, *le seul*, à l'époque, à avoir reconnu dans le Théorème de Vitali, suivant ses propres termes, un *résultat d'une importance capitale*, dit lui-même, dans son article qu'*il ne fait que recopier la preuve de Vitali*. pour aboutir à la même conclusion:

> *On est parvenu à construire une famille de segments deux à deux disjoints dont la somme des longueurs est supérieure à la mesure du noyau, E, de $\mathcal{F}$.*

Mais en fondant la preuve du Lemme et celle du Théorème en une seule, Lebesgue accède à un niveau supérieur de compréhension.
§ 4.2. pp. 20–24: *Bizarre, bizarre... La question de l'énonciation originelle du Théorème de Recouvrement de Vitali.*

Ni Vitali ni Lebesgue n'ont donc énoncé le Théorème de recouvrement, sous la forme sous laquelle nous le faisons aujourd'hui. Quoique *Alain Michel* reproduise, sans état d'âme, la version originelle, quand il énonce le Théorème de Vitali, dans son livre, *Constitution de la Théorie moderne de l'Integration*, p. 117, chap. V (Vrin, 1992).
C'est à l'élucidation de cette énigme qu'est consacrée une partie de cet article.

§ 4.2.1. p. 24: *un nouveau pas dans la compréhension ensembliste*
Carathéodory (1918) qui écrit le premier traité sur les *fonctions de variable réelle* en relation avec la *Théorie de la mesure*, se doit de justifier l'inégalité, $|S \setminus G| < |U \setminus G| < \varepsilon$, p. 24, implicite chez Vitali et Lebesgue, par un raisonnement en bonne et due forme, qu'on retrouvera chez Wheeden et Zygmund 1977, 7-2 (p. 34).

5. **La méthode en un coup**
Vitali (1907) puis Lebesgue (1910), suivant la procédure mise en oeuvre dans l'algorithme de Vitali, distinguent dans Σ, les uns après les autres, N segments, s_1, s_2,..., s_N, deux à deux disjoints pour aboutir à l'inégalité, $\sum_1^N |s_i| > |G|$, impliquant le noyau G.
§ 5.1 pp. 25–28 *Une démonstration ensembliste*: *l'apport de Banach* (1924). Étudiant le théorème de Vitali sous la forme que lui a donnée Carathéodory, il écrit l'inclusion mettant en jeux le noyau, G: quel que soit $N \in \mathbf{N}$:

$$\mathbf{1-bis)} \quad G \subset (s_1 \cup \cdots \cup s_N) \bigcup (S_{N+1} \cup S_{N+2} \cup \cdots)$$

où les segments, S_i, $i \in \mathbf{N}$, sont concentriques aux distingués, s_i, $|S_i| = 5|s_i|$.
§ 5. p. 27 *Natanson (1950)* mettant en forme la preuve de Banach, montre que le *résidu*, G_∞, du noyau, G, est de mesure nulle.

$$\mathbf{1}) \quad |G_\infty| = \left| G \setminus \bigcup_i s_i \right| = 0$$

En effet, le segment, $s \cap (\bigcup_1^N s_j) = \emptyset$, est, par application du Lemme de Vitali, alloué à un dilaté, S_{N+k};
quel que soit $N \in \mathbf{N} \quad : \quad G_\infty \subset \bigcup_i S_{N+i}$.
§ 5.2. p. 29 Il faudra attendre 2001 pour que *Salomon Leader* écrive la *limite supérieure*,

$$\mathbf{2}) \quad G_\infty \subset \bigcap_N \left(\bigcup_i S_{N+i} \right)$$

mettant un terme à la recherche d'une preuve ensembliste, initialisée par Banach.
S'il est logiquement équivalent que les distingués, s_i, $i \in \mathbf{N}$ recouvrent presque tout le noyau, G de Σ et que le résidu, G_∞, du noyau, soit de mesure nulle, *le premier cas* requiert qu'à chaque pas n, de la procédure, on recouvre par les segments distingués, $s_1,\ldots, s_n$, une portion du noyau qui, au terme de la N-ème étape, devient supérieure à un nombre λ, donné.
Le deuxième cas consiste à montrer qu'une partie, $\bigcap_N (\bigcup_i S_{N+i})$ de l'ensemble de Cantor, $\Delta \setminus \bigcup_i s_i$:

$$G_\infty \subset \bigcap_N \left(\bigcup_i S_{N+i} \right) \subset \Delta \setminus \bigcup_i s_i$$

est de mesure nulle.
§ 6, pp. 31–33: nous concluons cet essai en exposant la preuve de Banach, qu'il produit après celle du Théorème de Vitali (1924), indéfiniment répétée depuis. Répondant négativement à la question posée par Lebesgue, si on peut, sans précaution, étendre au plan, le théorème de recouvrement, Banach apporte à la *Théorie de la mesure*, sa touche de perfection.

7. *Remarques et compléments*

Mathematics Subject Classification (2000) 01A60 · 28A15

1 Introduction

Le *théorème de recouvrement* de Vitali (1907–08) a un peu plus de cent ans. Présenté à la séance du 22 décembre 1907 de l'Académie de Turin, il est paru dans le recueil 1907–1908 des Actes de cette Académie. L'article de Vitali donne une preuve concise, élégante, de ce résultat important de la théorie de la mesure. Ce théorème de recouvrement est rapidement devenu un classique, qui figure dans les traités d'Analyse les plus fameux, publiés en allemand, en anglais, en russe. Dans les premiers temps, ces livres ont naturellement répercuté les progrès apportés par les articles de recherche; par la suite, ils ont figé un «modèle standard» de la preuve, qui a été repris dans l'écrasante majorité des livres publiés pendant les cinquante dernières années. De son côté, le texte originel, en italien, a été rapidement éclipsé. Un des objectifs principaux de cet article est de remettre en lumière l'article de Vitali.

Nous allons, d'une part, traduire en français une partie conséquente de l'article, entreprise futile ou même condamnable, tant on pourrait penser qu'un lecteur français devrait faire l'effort de lire un article mathématique en italien; mais surtout, d'autre part, nous ferons une étude détaillée de la preuve de Vitali, et tenterons de tirer au clair plusieurs points qui méritent de l'être. Enfin, nous rendrons compte de cent ans d'histoire de ce résultat; nous verrons comment plusieurs grands noms de l'Analyse du 20e siècle ont fait progresser le théorème, sans que, cependant, l'apport initial essentiel de Vitali ne soit effacé. Les avancées les plus significatives ont eu lieu dans les vingt ans qui ont suivi la publication du théorème, dues notamment à Lebesgue, Carathéodory, Sierpiński et Banach. Plus tard, Natanson (1955), Hildebrandt (1963), Wheeden et Zygmund (1977), Evans et Gariepy (1992), Stein (1993), parmi beaucoup d'autres, ont proposé des rédactions de la preuve ou des façons de l'exploiter. Nous rappellerons ce que chacun a vraiment apporté, et nous distinguerons les niveaux successifs de compréhension de ce théorème, qui correspondent aux progrès dans l'assimilation de la théorie de la mesure.

Si les constructions infinies d'ensembles sont déjà apparues chez Cantor et ses contemporains, c'est Borel (1898) qui ouvre la voie à la manipulation de suites d'ensembles dans le cadre de la théorie moderne de la mesure; cela dit, les «ensembles de Cantor» sont omniprésents dans les questions de théorie de la mesure sur la droite réelle. En particulier, les ensembles de Cantor de mesure nulle sont intimement liés au théorème de Vitali, comme nous le montrerons. Ce théorème de recouvrement apparaît dix ans seulement après ce qu'on peut considérer comme le «manifeste de la théorie de la mesure» de Borel (1898, pp. 46–47). Cependant, il faudra attendre Lebesgue pour que le théorème de Vitali commence à prendre sa vraie place dans la théorie de la mesure et de l'intégration. Il faudra attendre encore plus longtemps pour que la partie purement combinatoire de la preuve soit bien dégagée, par exemple chez Evans et Gariepy (1992).

Un exemple fondamental

Voici une situation typique où le théorème de recouvrement s'applique. À vrai dire, il y a plus ici qu'un simple exemple: la nécessité d'élucider la question fondamentale de la dérivabilité des fonctions, dans un cadre aussi général que possible, est la raison d'être du théorème de Vitali.

Si f est une fonction réelle sur $[0, 1]$, considérons l'ensemble A des points a de $(0, 1)$ où le nombre de Dini supérieur droit

$$(\Lambda_d f)(a) = \limsup_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

vérifie l'inégalité $(\Lambda_d f)(a) > 2$ (on a choisi 2 pour fixer les idées; n'importe quelle autre valeur > 0 conviendrait). Pour tout point a de A, il existe des valeurs $b > a$, arbitrairement proches de a, telles que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 2\,; \tag{i}$$

le point a étant fixé dans A, on peut trouver des segments $[a, b]$, contenus dans $(0, 1)$, de taille aussi petite qu'on veut, et dont les extrémités a et b vérifient la propriété (i). Considérons la famille Σ de tous ces segments $[a, b]$ vérifiant (i); elle constitue ce qu'on appelle *un recouvrement de Vitali* de l'ensemble A, c'est-à-dire un recouvrement extrêmement redondant où chaque point a de A appartient à une *suite infinie* de segments de Σ dont les longueurs tendent vers 0. Le *théorème de recouvrement de Vitali* dit que l'ensemble A peut alors être couvert, à un ensemble de mesure nulle près, par une suite $([a_n, b_n])_n$ finie ou (en général) infinie de segments deux à deux disjoints, extraits de la famille Σ. Nous dirons dans la suite qu'une famille finie ou dénombrable de segments constitue un *recouvrement presque sûr* d'un ensemble A lorsque la partie de A qui n'est pas couverte par la réunion de ces segments est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Si la fonction f est croissante, l'information précédente permet de contrôler la mesure de l'ensemble A: chacun des segments $[a_n, b_n]$ de la famille Σ vérifie, par définition, l'inégalité $2(b_n - a_n) < f(b_n) - f(a_n)$; si la suite infinie des segments disjoints $([a_n, b_n])_{n\geq 1}$ est un recouvrement presque sûr de A, on peut majorer la mesure $|A|$ de l'ensemble A de la façon suivante:

$$2|A| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2(b_n - a_n) < \sum_{n=1}^{+\infty} \big(f(b_n) - f(a_n)\big),$$

quantité qui est majorée par la *variation de* f, égale ici à $f(1) - f(0)$ puisque f est croissante. On a donc

$$|A| \leq \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

Si on remplace la valeur 2 par des valeurs de plus en plus grandes, on conclut que l'ensemble des points x où le nombre de Dini $(\Lambda_d f)(x)$ est égal à $+\infty$ est de mesure nulle. C'est par cet argument que Vitali montre, dans le deuxième chapitre de son article, que les nombres dérivés d'une fonction à variation bornée sont finis presque partout. C'est une information déjà connue, qui fait partie des résultats de dérivation obtenus par Lebesgue (1904) pour les fonctions d'une variable réelle, par une approche différente fondée sur la méthode des *chaînes d'intervalles*. Mais la méthode de Vitali, appliquée dans le plan ou dans l'espace à n dimensions, permettra à Lebesgue (1910) de généraliser les théorèmes de dérivation aux fonctions de plusieurs variables. En réalité, c'est Vitali qui engage l'étude de la dérivation des fonctions de deux variables, comme application de son théorème de recouvrement, mais ce n'est qu'une ébauche dont Lebesgue pourra, à tort ou à raison, critiquer les imprécisions.

De nos jours, on énonce ainsi le théorème de recouvrement: si on connaît un recouvrement «de Vitali» d'un ensemble A par une famille de segments, on peut en extraire une suite de segments disjoints qui constitue un recouvrement presque sûr de A. Mais l'énoncé par Vitali de son théorème procède à l'envers, en partant, non d'un ensemble dont on connaît un recouvrement, mais d'une famille Σ de segments à laquelle il associe un ensemble de points limites, appelé *noyau de la famille*, et qui est défini ainsi: pour tout $\varepsilon > 0$, désignons par Σ_ε la famille formée des segments de Σ qui sont de longueur $< \varepsilon$, et par $\widetilde{\Sigma}_\varepsilon$ la réunion des segments de Σ_ε, que nous appellerons le *champ* couvert par la famille Σ_ε; le noyau $G(\Sigma)$ de Σ est l'intersection

$$G(\Sigma) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \widetilde{\Sigma}_\varepsilon .$$

Les points de $G(\Sigma)$ sont les points qui peuvent être couverts par des segments de Σ arbitrairement petits. Le théorème de Vitali garantit que le noyau $G(\Sigma)$ d'une famille Σ de segments peut être couvert, à une erreur de mesure nulle près, par une suite de segments deux à deux disjoints, extraits de Σ. Bien entendu, le noyau $G(\Sigma)$ est recouvert au sens de Vitali par la famille de segments Σ, c'est clairement le plus grand ensemble A qui soit recouvert au sens de Vitali par Σ.

Le premier niveau de compréhension

La structure de la preuve de Vitali fait apparaître deux parties bien distinctes. Dans son *lemme*, il trouve dans Σ, par une construction géométrique, une suite $(s_i)_{i \ge 1}$ de segments deux à deux disjoints dont il montre que la somme des longueurs est presque égale au *tiers* de la mesure du champ $\widetilde{\Sigma}$ couvert par les segments de Σ: pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut régler les paramètres de la construction de telle sorte que les segments $(s_i)_{i \ge 1}$ obtenus vérifient l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |s_i| > \frac{1}{3} |\widetilde{\Sigma}| - \varepsilon .$$

C'est l'inégalité précédente, portant sur une suite infinie de segments, qui apparaît naturellement dans la preuve, mais bien entendu, sa portée pratique se réduit à l'existence d'une suite *finie* $s_1, \ldots, s_N$ de segments deux à deux disjoints, extraits de la famille Σ et tels que

$$\sum_{i=1}^{N} |s_i| > \frac{1}{3} |\widetilde{\Sigma}| - \varepsilon \,;$$

de fait, c'est cette version finie qu'on doit utiliser pour poursuivre la démonstration du théorème. Les arguments de la preuve du lemme constituent le mécanisme du théorème de Vitali. Ils permettent de prouver assez facilement l'estimation L^1-faible du théorème maximal de Hardy–Littlewood, qui est la méthode la plus utilisée par les auteurs modernes pour prouver les théorèmes de dérivation de Lebesgue. Pour cette raison, certains de ces auteurs, par exemple Evans et Gariepy (1992), ont donné une place importante à ce lemme préliminaire, et une forme qui, bien qu'elle puisse être extraite de la preuve de Vitali, n'est pas proposée telle quelle par Vitali.

Dans la deuxième partie de la preuve, relativement plus facile, Vitali montre que le théorème de recouvrement en découle, par un procédé d'exhaustion de la mesure. Cette preuve en deux parties constitue l'essentiel du premier chapitre de l'article. Si la deuxième partie de la preuve est assez facile, et si la première est tout de même abordable, l'ensemble constitue une innovation considérable; tout d'abord, il fallait savoir reconnaître l'importance de la notion de noyau (ou de recouvrement de Vitali) pour décider de la dégager; cela étant accompli, reste encore le fait que le résultat ne devient attaquable qu'après que la difficulté est découpée par Vitali et qu'il a désigné le point d'appui au milieu de la preuve, le *lemme préliminaire*.

Dans son deuxième chapitre, Vitali applique le théorème de recouvrement à l'étude de la dérivabilité des fonctions f absolument continues. Il montre, dans le cas d'une variable, que la dérivée $f'(x)$ existe pour presque tout x, et que f est l'intégrale indéfinie de la fonction f': pour tous x, y on a

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mais le véritable objectif de Vitali n'est pas le cas des fonctions d'une variable, qui est déjà connu: il met surtout en avant le fait que sa nouvelle preuve s'applique, sans changement notable selon lui, aux fonctions de plusieurs variables.

Le théorème de recouvrement de Vitali a fait l'objet d'un grand nombre de présentations dans des articles et dans des livres; parmi les références récentes, mentionnons (Royden 1988, chap. 5), qui en donne un exposé à la fois moderne et accessible. C'est un résultat qui est encore considéré comme assez délicat dans l'enseignement universitaire, où il apparaît rarement avant la cinquième année d'études. Il est remarquable que toutes les preuves parues au long d'un siècle soient fondées sur les ingrédients qui sont déjà présents dans l'article originel. Lebesgue, qui est l'auteur de plusieurs avancées significatives, insistera cependant pour dire qu'il ne fait que recopier Vitali. Banach (1924), qui proposera une version nouvelle de la preuve, celle qu'on trouve le plus souvent dans les manuels actuels, le fera en analysant plus finement l'algorithme originellement formulé par Vitali.

Nous avons choisi de diviser notre article, non en suivant la chronologie des apports successifs, mais en découpant le résultat de Vitali en lemme préliminaire, auquel nous consacrons nos deux premières parties, puis théorème proprement dit, que nous étudions dans les parties 4 et 5. Dans une sixième et dernière partie, nous présenterons un certain nombre de compléments et de remarques, en particulier les éléments qui ne s'inscrivent pas dans cette division lemme–théorème; c'est le cas pour les théorèmes de dérivation de Vitali et de Lebesgue (section 6.1).

2 Le lemme

LE MÉCANISME DU THÉORÈME DE VITALI

2.1 L'algorithme de Vitali

Commençons l'examen de l'article par le *lemme*. Vitali emploie les mots « groupe de points » (déjà dans le titre de l'article) là où nous disons plus naturellement aujourd'hui *ensemble de points*. Pour abréger, il dit aussi simplement «groupe», un terme qui a depuis longtemps un sens mathématique précis qui ne convient pas ici; nous avons donc choisi de traduire constamment par *ensemble*, quand il s'agit d'un groupe de points. Quand Vitali parle de «groupe de segments», nous traduirons par *famille de segments*. Les segments considérés par Vitali sont toujours de longueur non nulle. Il appelle «corps» d'une famille de segments la réunion des segments de la famille. Voici l'énoncé du lemme préliminaire.

§ 1.— Il est nécessaire de montrer en préliminaire le théorème suivant.

> *Si Σ est une famille de segments dont le corps a une mesure* **finie** *μ et si ϵ est un nombre positif, il existe un nombre fini de segments de Σ, deux à deux disjoints, dont les longueurs ont une somme plus grande que $\frac{\mu}{3} - \epsilon$.*

Dans cette partie de l'article, il ne s'agit pas nécessairement d'un recouvrement de Vitali, mais d'une famille Σ quelconque de segments de longueur > 0, dont la réunion est de mesure finie. La question posée ici est une question indépendante: quelle proportion de la mesure de la réunion d'une telle famille Σ peut-on recouvrir en sélectionnant une sous-famille formée de segments deux à deux disjoints? Vitali vient d'annoncer qu'on peut obtenir une proportion presque égale au tiers.

Commençons par fixer une suite

$$\epsilon_1,\ \epsilon_2,\ \epsilon_3\ .\ .\ .\ .\ .\ \epsilon_n\ .\ .\ .\ .\ .$$

de nombres tous plus grands que 0 et tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit l_1 la borne supérieure des longueurs des segments de Σ. Il existe dans Σ un segment s_1 dont la longueur est plus grande que $l_1 - \epsilon_1$. Désignons par Σ_1 les segments de Σ qui ont des points en commun avec s_1. Les points du corps de Σ_1 qui n'appartiennent pas à s_1 forment un ensemble G_1 dont la mesure ne peut excéder $2l_1$. Vitali laisse au lecteur le soin de faire la figure: la famille Σ_1 des segments de Σ qui touchent s_1 a pour réunion un intervalle J_1,

$$J_1 = \bigcup \{s \in \Sigma : s \text{ rencontre } s_1\}, \quad \text{et il pose} \quad G_1 = J_1 \setminus s_1. \tag{ii}$$

L'intervalle J_1 déborde en général des deux côtés de s_1, mais d'une longueur au plus égale à l_1 de chaque côté, puisque tous les segments de Σ_1 ont une longueur majorée par l_1 et touchent s_1. La partie débordante G_1 a donc une mesure majorée par $2l_1$.

Paquets de segments

Pour illustrer la description, appelons «paquet de segments» la famille Σ_1 formée des segments de Σ qui rencontrent le segment sélectionné s_1, et disons que s_1 est le «cœur» de ce paquet Σ_1. Vitali exclut Σ_1 de la suite de la discussion, en restreignant désormais l'étude à l'ensemble $\mathcal{S}_1 = \Sigma - \Sigma_1$ des segments qui ne touchent pas le cœur s_1. Après avoir choisi un segment s_2 de longueur presque maximale dans $\mathcal{S}_1$, il exclura de $\mathcal{S}_1$

le paquet Σ_2 de tous les segments qui rencontrent le cœur s_2, pour former la nouvelle famille de segments $\mathcal{S}_2 = \Sigma - \Sigma_1 - \Sigma_2$ formée des segments qui ne touchent ni s_1 ni s_2, et ainsi de suite.

> Soit l_2 la borne supérieure des longueurs des segments de $\Sigma - \Sigma_1$. Il existe dans $\Sigma - \Sigma_1$ un segment s_2, nécessairement disjoint de s_1, de longueur plus grande que $l_2 - \epsilon_2$. Désignons par Σ_2 les segments de $\Sigma - \Sigma_1$ qui ont des points en commun avec s_2. Les points du corps de Σ_2 qui n'appartiennent pas à s_2 forment un ensemble G_2 dont la mesure n'est pas supérieure à $2l_2$. Soit l_3 la borne supérieure des longueurs des segments de $\Sigma - \Sigma_1 - \Sigma_2$, etc., etc.

La description du processus de sélection est complète: dans la suite, nous l'appellerons «l'algorithme de Vitali». Vitali ne présente pas une récurrence formellement rédigée, et il passe sous silence le cas particulier (plus facile) où le processus pourrait s'arrêter après un nombre fini de pas, mais il faudrait une mauvaise volonté excessive pour prétendre que sa description n'est pas claire.

2.2 Analyse de l'algorithme

Il s'agit maintenant de prouver que les segments sélectionnés par l'algorithme réalisent l'objectif annoncé: la somme de leurs longueurs doit approcher le tiers de la mesure μ du *corps* (c'est-à-dire de la réunion) de la famille Σ.

> Clairement, la somme des longueurs des segments
>
> $$s_1,\ s_2,\ s_3\ .\ .\ .\ .\ .$$
>
> n'est pas supérieure à μ et par conséquent, on a certainement
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}(l_n - \epsilon_n) < \mu,$$
>
> et puisque la série
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_n$$
>
> converge, la série
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty}l_n$$
>
> converge aussi, et par conséquent
>
> $$\lim_{n=\infty} l_n = 0.$$

Cela prouve que

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \Sigma_n,$$

en effet, s'il existait un segment de Σ qui n'appartienne à aucun Σ_n, chaque l_n serait au moins égal à la longueur de ce segment et on ne pourrait avoir

$$\lim_{n=\infty} l_n = 0.$$

Exhaustivité et calibrage

Vitali vient d'exposer une partie-clé de son argument, la preuve de *l'exhaustivité* de la procédure d'extraction, mais il vient de la conclure par un argument bien elliptique. Développons: si un segment s de Σ ne rencontre pas $s_1, \ldots, s_{n-1}$, il fait partie de la famille $\mathcal{S}_n = \Sigma - \Sigma_1 - \cdots - \Sigma_{n-1}$ dont l_n est le sup des longueurs. Ainsi,

$$\big(s \in \Sigma,\ s \cap (s_1 \cup \cdots \cup s_{n-1}) = \emptyset\big) \Rightarrow |s| \leq l_n.$$

Si $s \in \Sigma$ ne rencontrait aucun des segments s_j sélectionnés, sa longueur $|s|$ serait un minorant de l_n, pour tout n, ce qui est impossible puisque l_n tend vers 0 et que tous les segments de Σ sont de longueur > 0. Vitali a ainsi montré qu'étant donné un segment s de Σ, il existe un segment sélectionné s_n, cœur du paquet Σ_n, tel que s touche s_n; de plus, le procédé d'extraction induit naturellement un choix de n qui garantit que la longueur de s_n ne soit pas trop inférieure à celle de s: en effet, le segment s doit appartenir à un (et un seul) des ensembles Σ_n; or Σ_n est une partie de la famille

$$\mathcal{S}_n = \Sigma - \Sigma_1 - \cdots - \Sigma_{n-1},$$

dont tous les segments sont, par définition, de longueur $\leq l_n$, alors que s_n a été choisi de longueur $> l_n - \varepsilon_n$. Ainsi, $|s| < |s_n| + \varepsilon_n$: la longueur de s est contrôlée par celle de s_n: c'est ce que nous appelons le *calibrage*.

Ce couple *exhaustivité-calibrage* représente un aspect incontournable de la preuve, comme on le vérifiera en étudiant plusieurs des variantes qui se sont succédées pendant près d'un siècle.

Alors le corps de la famille Σ est constitué du corps de la famille Σ_0 des segments

$$s_1,\ s_2\ .\ .\ .\ .\ .\ s_n\ .\ .\ .\ .\ .$$

et de l'ensemble G des points appartenant à l'un des ensembles

$$G_1,\ G_2\ .\ .\ .\ .\ .\ G_n\ .\ .\ .\ .\ .$$

En désignant par m la mesure de G et par μ_0 la mesure du corps de Σ_0, on a:

$$\mu \leq m + \mu_0.$$

Mais

$$m \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} l_n$$

et

$$\mu_0 < \sum_{n=1}^{\infty} l_n,$$

donc

$$\mu < 3 \sum_{n=1}^{\infty} l_n.$$

C'est un détail insignifiant, mais il n'y a pas de raison pour que l'inégalité $\mu_0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} l_n$ du paragraphe précédent soit stricte: il pourrait se faire que la borne l_n soit toujours atteinte par s_n, par exemple si les segments de Σ avaient pour seules longueurs possibles les valeurs de la suite $1, 1/2, \ldots, 2^{-n}, \ldots$. Par ailleurs, si nous avons vanté la concision de l'article, ce n'est pas dans les lignes qui suivent qu'elle va s'illustrer!

On a en outre

$$\mu_0 > \sum_{n=1}^{\infty} (l_n - \epsilon_n),$$

et par conséquent

$$\mu_0 > \sum_{n=1}^{\infty} l_n - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n.$$

Donc

$$\mu_0 > \frac{\mu}{3} - \frac{\epsilon}{2}.$$

Désignons alors par λ_n la longueur du segment s_n. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \mu_0 > \frac{\mu}{3} - \frac{\epsilon}{2}.$$

Mais nous pouvons trouver un nombre entier N pour lequel

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pour un tel N

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n > \frac{\mu}{3} - \epsilon.$$

Les segments

$$s_1, \ s_2, \ \ldots\ldots \ s_N$$

sont donc deux à deux disjoints, et la somme de leurs longueurs est plus grande que $\frac{\mu}{3} - \epsilon$. Le théorème est donc démontré.

3 L'aspect combinatoire du lemme

3.1 Le cas d'une famille finie de segments

L'apparition, nécessaire, de la suite des nombres (ε_n) constitue une difficulté technique qui obscurcit quelque peu «l'algorithme de Vitali». Nous verrons plus loin comment Lebesgue atténue cette difficulté, mais nous allons présenter tout de suite un cas où elle disparaît complètement, le cas d'une *famille finie* Σ de segments. L'algorithme prend alors une forme particulièrement simple, débarrassée de la complication liée à la non-existence, en général, d'un segment de *longueur maximale*. Le cas fini met parfaitement en évidence les rouages de la preuve et son aspect combinatoire. L'un des premiers à l'avoir exposé est Sierpiński (1923); Carathéodory avait déjà exploité (Carathéodory 1918, §288) la forme plus simple que prend la preuve, même pour une suite infinie, quand on peut classer par taille décroissante les ensembles à considérer.

Adaptons le texte de Vitali: désignons par ℓ_1 le maximum des longueurs des segments s de Σ; sélectionnons dans Σ un segment s_1 de longueur maximale ℓ_1 (en départageant arbitrairement en cas d'ex-æquo), et désignons par Σ_1 la famille des segments de Σ qui rencontrent s_1. Si Σ n'est pas épuisé par Σ_1, désignons par ℓ_2 le maximum des longueurs des segments s restant dans $\Sigma \setminus \Sigma_1$, et choisissons dans $\Sigma \setminus \Sigma_1$ un segment s_2 de longueur ℓ_2. Soit Σ_2 la famille des segments de $\Sigma \setminus \Sigma_1$ qui rencontrent s_2, etc., etc. Tant que le processus continue, il y a au moins un nouveau segment de Σ qui est écarté des discussions à suivre; comme la famille Σ est finie, il existe un entier n tel que $\Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_n)$ soit vide, et le processus s'arrête, après qu'on a choisi un dernier segment s_n de longueur ℓ_n. Par construction, les familles Σ_k, $1 \leq k \leq n$, forment une partition de la famille Σ.

À ce moment, nous pouvons faire l'affirmation cruciale qui résulte de la construction de Vitali: *dans la famille finie Σ de segments, on a sélectionné des segments $s_1, \ldots,$ s_n disjoints, et tout segment s de la famille Σ rencontre un segment sélectionné s_k, $1 \leq k \leq n$, aussi long que s:* $|s| \leq |s_k|$. En effet, il existe un et un seul entier k tel que $s \in \Sigma$ appartienne à Σ_k, et par définition, s rencontre s_k. Si $k = 1$, s rencontre s_1, segment qui a la plus grande longueur possible, donc notre affirmation, $|s| \leq |s_1|$, est clairement vraie; sinon, s fait partie de la famille $\Sigma \setminus (\Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_{k-1})$, et par construction, s_k est un élément de cette famille qui a la plus grande longueur possible, donc $|s| \le |s_k|$, comme annoncé. Nous avons insisté pour donner une preuve détaillée de ce fait, un fait qui est peut-être simple, mais qui n'est traité que par une allusion rapide chez Sierpiński (1923).

On peut dire les choses plus vite (comme Stein 1993, 1.3), en désignant par s_1 un segment de Σ de longueur maximale, puis par s_2 un segment de longueur maximale parmi ceux qui sont disjoints de s_1, s'il en existe. Ensuite, s'il existe dans Σ des segments disjoints de $s_1, \ldots, s_k$, on choisit parmi eux un segment s_{k+1} de longueur maximale. Tant que le processus continue, il distingue et écarte un segment différent des précédents, donc il doit se terminer après un nombre fini d'étapes, donnant des segments disjoints $s_1, \ldots, s_n$ extraits de Σ. Soit s un segment quelconque de la famille Σ; puisque l'algorithme s'est arrêté, il n'y a pas, dans la famille Σ, de segment disjoint de $s_1, \ldots, s_n$; ce segment s rencontre donc certains des segments s_j qui ont été sélectionnés. Désignons par k le plus petit indice j tel que s rencontre s_j. Alors s ne rencontre pas $s_1, \ldots, s_{k-1}$, donc s était «candidat» au moment où on a choisi s_k. Il n'est pas possible que $|s| > |s_k|$, sinon on n'aurait pas désigné s_k à ce moment. On a bien établi que s rencontre un segment sélectionné qui a une longueur supérieure ou égale à celle de s.

Dans une variante vue chez Aliprantis et Burkinshaw (1990, lemme 29.2, chap. 6), et déjà aperçue chez Sierpiński (1923) et Carathéodory (1918), on commence par classer les segments de la famille finie Σ selon leurs longueurs, dans une liste $t_1, t_2, \ldots, t_N$ avec $|t_1| \ge |t_2| \ge \cdots \ge |t_N| > 0$. On pose $k_1 = 1$, et on désigne par k_2 le premier indice k, s'il en existe, tel que t_k soit disjoint de t_{k_1}. Ensuite, k_3 est le premier indice k, s'il en existe, tel que t_k soit disjoint de t_{k_1} et de t_{k_2}, et ainsi de suite. La suite de l'analyse est identique. Comme Sierpiński, Stein (trop expéditif) ou Aliprantis–Burkinshaw (imprécis) ont négligé cette analyse.

Si un segment s rencontre un segment t au moins aussi long que lui, il s'ensuit, par un argument géométrique élémentaire, que s est contenu dans le dilaté trois fois du segment t, segment que nous noterons $3 * t$, qui a le même centre que t et dont la longueur est trois fois celle de t: précisément, le segment $t = [c - \ell/2, c + \ell/2]$ de centre c et de longueur ℓ est dilaté trois fois en $3 * t = [c - 3\ell/2, c + 3\ell/2]$. Plus généralement, dans la suite de l'article, nous noterons $\lambda * t$ le segment obtenu à partir de t par une dilatation de rapport $\lambda > 0$.

Comme on a montré que tout segment s de la famille finie Σ rencontre un segment sélectionné s_k au moins aussi long que s, il en résulte que la totalité des segments de Σ est contenue dans la réunion des dilatés $3 * s_1, \ldots, 3 * s_n$ correspondant à la sélection disjointe $s_1, \ldots, s_n$; cette réunion des $3 * s_j$ a une mesure qui est au plus égale à la somme des longueurs de ces dilatés, donc au plus égale à trois fois la mesure de la réunion des segments disjoints $s_1, \ldots, s_n$ (on trouve déjà cette observation chez Sierpiński (1923)). En bref,

$$\widetilde{\Sigma} \subset \bigcup_{j=1}^{n} 3 * s_j \;\Rightarrow\; |\widetilde{\Sigma}| \le \left|\bigcup_{j=1}^{n} 3 * s_j\right| \le 3 \sum_{j=1}^{n} |s_j|\,;$$

par conséquent: la réunion de la sélection disjointe a une mesure qui est au moins le tiers de la mesure de la réunion de la famille Σ. C'est la version finie du lemme préliminaire de Vitali. On trouvera en appendice, **6.2.1**, en liaison avec le *Théorème de* *densité*, à la démonstration duquel le Théorème de recouvrement est particulièrement bien adapté, une preuve du Lemme, qui en ramène le cas général au cas fini.

3.2 Une modification due à Lebesgue

Un deuxième niveau de compréhension

Dans son article «*Sur l'intégration des fonctions discontinues*», Lebesgue (1910) §26, p. 391, introduit une méthode différente pour opérer la sélection de la suite de segments disjoints que Vitali a produite dans son article. La présentation qu'en fait Lebesgue reste compliquée, mais elle sera beaucoup simplifiée, des années plus tard, chez Evans et Gariepy. Nous expliquerons cette méthode, que Lebesgue formule dans un cadre très général (voir la section 6.3), en nous limitant à une famille $\mathcal{F}$ de segments, contenus dans une partie bornée de la droite; le principe consiste à répartir les segments de la famille $\mathcal{F}$ dans des classes $\mathcal{F}_n$ définies par la taille de leurs éléments. Lebesgue choisit d'utiliser comme échelle de comparaison la suite géométrique 2^{-n}, $n \geq 0$; pour tout entier $n \geq 0$, il pose

$$\mathcal{F}_n = \Big\{ s \in \mathcal{F} \ :\ \frac{\ell}{2^{n+1}} < |s| \leq \frac{\ell}{2^n} \Big\}, \quad \text{où } \ \ell = \sup\{|s| : s \in \mathcal{F}\}.$$

Tous les segments de $\mathcal{F}$ sont ainsi classés. Désignons par E_n le champ couvert par la famille $\mathcal{F}_n$; la réunion des E_n est égale au champ E couvert par la famille $\mathcal{F}$. Commençons l'algorithme avec la première classe $\mathcal{F}_0$, formée des segments $s \in \mathcal{F}$ dont la longueur est comprise entre $\ell/2$ et ℓ; Lebesgue choisit $s_1 \in \mathcal{F}_0$ quelconque et introduit un segment auxiliaire, que nous appelons s'_1, de même centre que s_1 et de longueur 3ℓ. Si s'_1 couvre E_0, on arrête le pas 0 de l'algorithme, qui traite la famille $\mathcal{F}_0$, et on passe au pas 1 qui traitera $\mathcal{F}_1$; sinon, on choisit $s_2 \in \mathcal{F}_0$, non couvert par s'_1, et on introduit le segment s'_2 de longueur 3ℓ associé à s_2. Si $s'_1 \cup s'_2$ couvre E_0, le pas 0 de l'algorithme est achevé, sinon on poursuit avec un segment $s_3 \in \mathcal{F}_0$ non couvert par $s'_1 \cup s'_2$, on examine si E_0 est couvert par $s'_1 \cup s'_2 \cup s'_3$, etc. Lebesgue observe que les segments $s_1, \ldots, s_n$ ainsi sélectionnés dans $\mathcal{F}_0$ sont deux à deux disjoints, en vertu d'une remarque géométrique simple: si un segment s est de longueur $\leq r$, si s' de même centre que s est de longueur $3r$ et si un segment t de longueur $\leq r$ contient au moins un point qui n'est pas dans s', alors t est disjoint de s. Puisque les segments s_j successivement sélectionnés sont disjoints et de longueur $\geq \ell/2$, on ne pourra trouver qu'un nombre fini de tels segments, étant donné qu'ils sont tous, par hypothèse, contenus dans une partie de mesure finie. La sélection $\mathcal{G}_0$ obtenue à la fin du pas 0 est constituée de segments disjoints $s_1, \ldots, s_{N_0}$, auxquels sont associés les segments agrandis $s'_1, \ldots, s'_{N_0}$, tous de longueur 3ℓ; puisque le pas 0 de l'algorithme est terminé, tous les segments s de la famille $\mathcal{F}_0$ sont contenus dans la réunion

$$E'_0 = \bigcup_{j=1}^{N_0} s'_j$$

des «sélectionnés agrandis». Comme chaque segment s_j est de longueur $\geq \ell/2$, on voit que s'_j est contenu dans $6 * s_j$; il en résulte que le champ E_0 de la famille $\mathcal{F}_0$ est couvert par les dilatés $6 * s_j$ des segments de la sélection disjointe $\mathcal{G}_0$, $j = 1, \ldots, N_0$.

Cette étape étant franchie, Lebesgue s'intéresse à la classe $\mathcal{F}_1$, ou plus exactement, à la sous-classe $\mathcal{H}_1$ formée des segments $s \in \mathcal{F}_1$ qui ne sont pas entièrement contenus dans E'_0. Il trouve une famille disjointe finie $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{H}_1$, ayant la propriété que $E_1 \setminus E'_0$ est couvert par les segments $6*t$, où t varie dans $\mathcal{G}_1$. Les segments de $\mathcal{G}_1$ sont également disjoints des segments de $\mathcal{G}_0$, par la même remarque géométrique qui valait pour $\mathcal{G}_0$. La construction peut ainsi continuer indéfiniment, fournissant des classes $\mathcal{G}_n$, dont la réunion $\bigcup_{m \geq 0} \mathcal{G}_m$ est formée de segments deux à deux disjoints, et qui ont la propriété suivante: tout segment $s \in \mathcal{F}_n$ est contenu dans un segment $6 * t$, où t est dans l'une des classes $\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_n$. La longueur de t est au moins $2^{-n-1}\ell$, celle de s au plus $2^{-n}\ell$, la longueur de s est donc au plus $2|t|$: on a obtenu une forme d'exhaustivité et de calibrage, mais Lebesgue a remplacé le contrôle additif de Vitali, effectué au moyen de la suite (ε_n), par un simple contrôle multiplicatif qui sera repris par la plupart des auteurs postérieurs. Notons enfin que Lebesgue démontre le lemme préliminaire avec une constante $1/6$ au lieu de $1/3 - \varepsilon$, mais fait remarquer qu'une modification de sa méthode permettrait d'approcher la valeur $1/3$.
3.3: p. 12 Notons qu'*Evans et Garepy (1992)* feront franchir au Lemme une dernière étape dans l'abstraction.

Reprenant la construction de Lebesgue; au pas p, du raisonnement par récurrence, ils ne prennent en compte que l'existence des sous familles maximales disjointes de $\mathcal{E}_p$, se libérant ainsi des considérations de *mesure* d'ensemble. Nous avons rejeté en appendice la preuve d'Evans et Garepy.

4 Le théorème de recouvrement

4.1 La méthode d'exhaustion de Vitali

Avant de voir comment Vitali prouve le théorème de recouvrement à partir de son lemme, revenons au début de l'article, où il met en place la notion cruciale de *noyau* d'une famille de segments, qui est la contrepartie de la notion moderne de *recouvrement de Vitali*.

> Dans le présent mémoire, je donne (chap. I) un théorème sur les ensembles de points qui pourra être utilisé avec profit dans l'analyse des fonctions. Pour mettre en évidence son importance, je le ferai suivre de quelques applications (Chap. II).
>
> (...)
>
> Chapitre I.
>
> J'appelle **corps** d'une famille Σ de segments, situés sur une droite r, l'ensemble des points qui appartiennent (y compris comme extrémités) à un segment quelconque de Σ.

> Le corps d'une famille Σ de segments d'une droite est certainement mesurable, en effet, les points de r qui ne sont intérieurs à aucun segment de Σ forment un ensemble fermé et par conséquent mesurable.

Ce point n'est pas clair. La seule indication que donne Vitali, c'est la remarque évidente que la réunion des intérieurs des segments est ouverte. Cette indication purement topologique ne suffirait pas dans le plan: la réunion d'une famille quelconque de carrés fermés peut intersecter la bissectrice suivant un ensemble arbitraire, ce qui montre qu'une telle réunion n'est pas toujours un ensemble borélien, et sa mesurabilité n'est donc pas une évidence (si E est un sous-ensemble arbitraire de la bissectrice $x + y = 0$ du plan, la famille des translatés $C + e$, $e \in E$, du carré $C = [0, 1]^2$ donne un tel exemple: la réunion de ces carrés fermés intersecte cette bissectrice exactement suivant l'ensemble E). Cependant, dans le cas de la droite, on peut voir que la différence entre une réunion de segments de longueurs > 0 et la réunion de leurs intérieurs est un ensemble dénombrable. Cela résulte d'arguments usuels fondés sur l'existence d'une base dénombrable pour la topologie de la droite, mais il se trouve que la preuve donnée par Vitali pour le lemme préliminaire le montre aussi: il suffit de traiter le cas où tous les segments sont dans un intervalle borné; sans supposer d'avance que le «corps» $\widetilde{\Sigma}$ soit mesurable, on peut suivre la preuve du lemme préliminaire; Vitali y indique que $\widetilde{\Sigma}$ est la réunion des segments sélectionnés s_n et des ensembles qu'il a notés G_n; or cet ensemble «débordant» G_n a été obtenu comme différence de l'intervalle J_n et du segment s_n, donc chaque G_n diffère d'un ouvert par deux points au plus, les deux bornes de l'intervalle J_n. Cela prouve que le corps $\widetilde{\Sigma}$ diffère de son intérieur par un ensemble au plus dénombrable, il est donc Lebesgue-mesurable et même borélien.

La mesurabilité d'une réunion quelconque de segments est importante pour Vitali, car c'est elle qui justifie la mesurabilité du *noyau*, et la «mesure du noyau» fait partie de l'énoncé de Vitali. Pour finir cette digression, on doit admettre que le problème n'est pas trop sérieux, dans la mesure où dans toutes les applications pratiques (penser à la preuve de l'inégalité maximale rappelée plus haut, ou à «l'exemple fondamental» de notre introduction), des intervalles ouverts rendraient les mêmes services que les segments, et leur réunion serait encore un ouvert, évidemment mesurable; on pourrait aussi, presque toujours, se limiter à une famille dénombrable Σ (par exemple, les segments à extrémités rationnelles), sans perdre la portée du résultat.

Le noyau

Nous en venons à la définition la plus importante de l'article de Vitali, celle du *noyau* d'une famille de segments. Vitali dit que le noyau est mesurable, affirmation que nous venons de discuter et d'accepter.

> Désignons par σ un segment aussi petit qu'on veut et par Σ_σ la famille des segments de Σ qui sont plus petits que σ. Le corps de Σ_σ varie dans le même sens que σ. Les points communs aux corps de tous les Σ_σ forment un ensemble G que nous appellerons le **noyau** de Σ.
> Il est immédiat que le noyau d'une famille de segments est toujours mesurable. Je vais montrer que: *si Σ est une famille de segments dont le noyau a une mesure* **finie** *m_1, il existe une famille finie ou dénombrable de segments de Σ, deux à deux disjoints, dont les longueurs ont une somme supérieure ou égale à m_1.*

> Ce théorème a son analogue dans l'espace à deux ou plusieurs dimensions. Dans le plan, par ex., on remplacera la considération de segments par celle de carrés dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.
> §1— Il est nécessaire de montrer en préliminaire le théorème…

que nous avons présenté dans notre première partie sous le nom de *lemme préliminaire*. L'allusion aux généralisations aux dimensions supérieures a suffi pour convaincre Lebesgue (1910, note p. 390), qui admet bien généreusement, en écrivant le cas multi-dimensionnel, qu'il ne fait que recopier la preuve de Vitali. En fait, Vitali a donné des indications supplémentaires, assez convaincantes, au §2 de son chapitre I. Les valeurs 9, 27 qu'il y met en avant font image, et valent bien une esquisse de preuve: on pense tout de suite à un carré de côté a, entouré de huit carrés de même taille pour former un grand carré de côté $3a$, contenant les ensembles calibrés débordant du petit carré central et qui forment un ensemble plan J analogue à l'intervalle J_1 de l'équation (ii).

§2— La proposition du § précédent a son analogue dans les espaces à plusieurs dimensions. Dans le plan, par ex., elle peut être énoncée ainsi:

Si Σ est une famille de carrés dont le corps a une mesure **finie** μ *et si ϵ est un nombre positif, il existe un nombre fini de carrés de Σ, deux à deux disjoints, dont les aires ont une somme supérieure à $\frac{\mu}{9} - \epsilon$.*

L'expression $\frac{\mu}{3} - \epsilon$ devient $\frac{\mu}{9} - \epsilon$ quand on passe au plan, dans l'espace elle deviendrait $\frac{\mu}{27} - \epsilon$ et en général, dans l'espace à n dimensions, elle deviendrait $\frac{\mu}{3^n} - \epsilon$.

La démonstration originelle de Vitali

> §3— Passons à la démonstration du théorème énoncé dans l'introduction.
> Il existe manifestement une sous-famille Σ_1 de Σ qui a le même noyau que Σ et dont le corps a une mesure μ_1 finie.

En disant «manifestement», Vitali va un peu vite. Les auteurs postérieurs prendront plus de précautions: puisque le noyau $G(\Sigma)$ de la famille Σ est mesurable (nous nous en sommes convaincus) et de mesure finie, on peut l'inclure dans un ouvert U de mesure finie. On constate que la famille Σ_1 des segments de Σ qui sont contenus dans U a le même noyau que Σ, et son corps, contenu dans l'ouvert U, est de mesure finie. C'est une propriété capitale de la notion de noyau, que l'inventeur n'a pas explicitée! Cette propriété de *localisation*, qui intervient à plusieurs reprises et de façon importante, consiste en le fait que la partie du noyau de Σ qui est contenue dans un ouvert U' est égale au noyau de la sous-famille Σ' formée des segments de Σ qui sont contenus dans U'. Avant de continuer, rappelons que μ_1 désigne la mesure de la réunion des segments de Σ_1 alors que m_1 (qui est inférieur ou égal à μ_1) désigne la mesure du noyau $G(\Sigma_1)$ de cette famille.

> Soit:
>
> $$\epsilon_1 + \epsilon_2 \;.\;.\;.\;.\;.\; + \epsilon_n + \;.\;.\;.\;.\;.$$
>
> une série convergente de termes tous positifs.

Nous pouvons, d'après le théorème du § précédent, trouver un nombre fini de segments de Σ_1, deux à deux disjoints

$$s_1, s_2 \;.\;.\;.\;.\;.\; s_{N_1} \tag{1}$$

tels que la somme σ_1 de leurs longueurs soit plus grande que

$$\frac{\mu_1}{3} - \epsilon_1,$$

et par conséquent que

$$\frac{m_1}{3} - \epsilon_1.$$

Considérons la famille Σ_2 des segments de Σ_1 qui n'ont pas de point commun avec les segments (1).
Si m_2 est la mesure du noyau de Σ_2, on a certainement

$$m_2 \geq m_1 - \sigma_1.$$

La formule fondamentale

L'inégalité précédente $m_2 \geq m_1 - \sigma_1$ est le point crucial de la preuve du théorème, et appelle quelques commentaires. Constatons en passant un changement de notation fâcheux: maintenant, la notation Σ_2 n'a plus le sens qu'elle avait dans la preuve du lemme préliminaire; ici, la famille Σ_2 est constituée des segments de Σ_1 qui *ne* touchent *pas* les segments deux à deux disjoints $s_1, s_2, \ldots, s_{N_1}$ introduits par Vitali à l'équation (1). Le point crucial, c'est que le noyau $G(\Sigma_2)$ de la famille Σ_2 est la partie du noyau global $G(\Sigma_1)$ qui n'est pas recouverte par les segments $s_1, s_2, \ldots, s_{N_1}$. C'est la propriété de *localisation* qui entre en jeu, sous la forme

$$G(\Sigma_2) = G(\Sigma_1) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{N_1} s_i \right), \tag{iv}$$

ou encore:

«*le noyau du reste de la famille est le reste du noyau*».

Par conséquent, si m_2 désigne la mesure du noyau de Σ_2, on a

$$m_2 = |G(\Sigma_2)| \geq |G(\Sigma_1)| - \sum_{i=1}^{N_1} |s_i| = m_1 - \sum_{i=1}^{N_1} |s_i|,$$

c'est-à-dire que $m_2 \geq m_1 - \sigma_1$. On voit difficilement comment on pourrait justifier cette inégalité sans donner cette représentation ensembliste que Vitali sous-entend, en n'écrivant que ses conséquences en termes de mesure. À vrai dire, la preuve ne demande que l'inclusion $G(\Sigma_1) \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{N_1} s_i \right) \subset G(\Sigma_2)$, qui résulte d'un raisonnement assez simple (qui entre dans la preuve de la propriété de localisation): si x est dans le noyau $G(\Sigma_1)$ sans être dans le fermé $F = s_1 \cup \ldots \cup s_{N_1}$, on peut trouver des segments s de Σ_1 arbitrairement petits qui contiennent x; nécessairement, à partir d'un certain degré de petitesse, ces segments sont disjoints de $s_1, \ldots, s_{N_1}$. Ces segments s arbitrairement petits sont alors dans Σ_2, donc x est dans le noyau $G(\Sigma_2)$.

Il semble donc que Vitali, qui n'a pas dit un mot d'explication, a «vu» immédiatement la propriété, et compte sur nous pour y voir une évidence.

Dans Σ_2 nous pouvons trouver un nombre fini de segments deux à deux disjoints

$$s_{N_1+1}, \ s_{N_1+2}, \ \ldots\ldots \ s_{N_2} \tag{2}$$

tels que la somme de leurs longueurs soit plus grande que

$$\frac{m_2}{3} - \epsilon_2.$$

Les segments

$$s_1, \ s_2, \ \ldots\ldots \ s_{N_1}, \ s_{N_1+1}, \ s_{N_1+2}, \ \ldots\ldots \ s_{N_2}$$

sont deux à deux disjoints.

Considérons la famille Σ_3 des segments de Σ_2 qui n'ont pas de point commun avec les segments (2). Si m_3 est la mesure du noyau de Σ_3, on a

$$m_3 \geq m_2 - \sigma_2 \geq m_1 - \sigma_1 - \sigma_2.$$

Comme avant, le noyau $G(\Sigma_3)$ de Σ_3 est la partie de $G(\Sigma_2)$ qui n'est pas recouverte par les segments (2); on a donc

$$m_3 = |G(\Sigma_3)| \geq |G(\Sigma_2)| - \sum_{i=N_1+1}^{N_2} |s_i| = m_2 - \sigma_2,$$

et par conséquent $m_3 \geq m_1 - \sigma_1 - \sigma_2$.

Dans Σ_3 nous pouvons trouver un nombre fini de segments deux à deux disjoints

$$s_{N_2+1}, \ s_{N_2+2}, \ \ldots\ldots \ s_{N_3}$$

tels que la somme σ_3 de leurs longueurs soit plus grande que

$$\frac{m_3}{3} - \epsilon_3,$$

et ainsi de suite.

Les segments

$$s_1,\ s_2,\ \ldots s_{N_1},\ \ldots s_{N_2},\ \ldots s_{N_5},\ \ldots \qquad (\alpha)$$

sont deux à deux disjoints.
La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$$

est certainement convergente, puisque sa somme ne peut pas dépasser μ_1.
Et donc, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m_n}{3} - \epsilon_n\right)$$

est convergente, et finalement la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n$$

est convergente. Donc

$$\lim_{n=+\infty} m_n = 0.$$

Retenons que:

$$\text{la suite } m_n \text{ tend vers } 0. \qquad \text{(v)}$$

Nous aurons à revenir sur ce point et à le commenter dans la section suivante 4.2.

Mais

$$m_n \geq m_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_i$$

et, à la limite,

$$0 \geq m_1 - \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i,$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \geq m_1.$$

On voit ainsi que la somme des longueurs des segments (α) n'est pas plus petite que la mesure du noyau de Σ et le théorème est démontré.
Il est évident que la même démonstration est valable pour le théorème analogue dans les espaces de dimension deux ou plus.

4.2 Bizarre, bizarre...

L'énoncé correct

On peut noter un fait curieux. Au sens strict, l'énoncé donné par Vitali n'est pas un énoncé de recouvrement! Vitali précise bien qu'il trouve, dans la famille initiale Σ, des segments disjoints (s_n) dont la somme des longueurs est aussi grande que la mesure du noyau $G(\Sigma)$, mais il ne dit pas que ces segments couvrent le noyau, à une erreur de mesure nulle près. C'est pourtant l'énoncé qu'on donne toujours, aujourd'hui, pour le théorème de Vitali. Quoique,

Alain Michel: *chap. V, la légitimation du concept dans l'Analyse*, (1992); dans les queques lignes qu'il consacre au *Théorème de Vitali*,

> *p. 117 Les raisonnements de Vitali reposaient sur un théorème de recouvrement inspiré de Borel en dimension 1 et qui, encore aujourd'hui, joue un rôle essentiel dans le traitement de ces questions.*

reprend l'énoncé originel:

> *Si E est un ensemble mesurable et si chaque point de E appartient à une infinité d'intervalles arbitrairement petits apprtenant à une famille d'intervalles, on peut en extraire une suite disjointe, $\{e_i\}$, finie ou dénombrable dont la somme des mesures est plus grande que celle de E: $m(E) \leq \sum_i m(e_i)$.*

C'est Lebesgue qui va, en passant, corriger ce défaut. Dans l'introduction de son article, Lebesgue (Lebesgue (1910), §6 p. 365) commence par reproduire l'énoncé de Vitali, qu'il reprend encore tel quel dans le chapitre III sur les *familles régulières d'ensembles*, au §26 p. 391; puis au §27 p. 394, il passe, sans insister beaucoup, à l'énoncé de recouvrement presque sûr qui restera la façon normale de formuler ce théorème. À la page 393, §27, Lebesgue énonce une généralisation de son énoncé pour les familles régulières, le cas où le *paramètre de régularité* (voir la section 6.3) pourrait varier avec le point du domaine recouvert:

> *Soit un ensemble mesurable E dont chaque point appartient à une infinité de domaines de diamètres aussi petits qu'on veut, formant une famille régulière et extraits d'un ensemble donné $\mathcal{F}$ de domaines. Alors on peut trouver dans $\mathcal{F}$ un nombre fini ou une infinité dénombrable de domaines, sans point commun deux à deux et dont la somme des mesures n'est pas inférieure à $m(E)$.*

Comme on le voit, on est toujours dans la forme d'énoncé donnée par Vitali, tout comme dans la preuve qui suit cet énoncé:

> En effet, soit $\mathcal{F}_p$ la famille formée des domaines de $\mathcal{F}$ qui sont réguliers pour la valeur $\frac{1}{p}$ du paramètre. Soit d'ailleurs E_p l'ensemble des points de E contenus dans une infinité de domaines de diamètres aussi petits qu'on veut et appartenant

> à $\mathcal{F}_p$. E_p est mesurable et $m(E - E_p)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Or, d'après ce qui précède, on peut de $\mathcal{F}_1$ tirer un nombre fini de domaines de mesure supérieure à $m(E_1) - 1$; puis de $\mathcal{F}_2$ un nombre fini de domaines, sans point commun avec les précédents ni entre eux, de mesure supérieure à $m(\mathcal{E}_2) - \frac{1}{2}$, $\mathcal{E}_2$ étant la partie de E_2 extérieure aux domaines déjà employés. Et ainsi de suite.
> Comme il est évident que E_p contient E_{p-1} il s'ensuit qu'on arrive bien à effectuer le choix demandé.

Dans le passage précédent, l'ensemble E_p est le *noyau* de la famille $\mathcal{F}_p$, et Lebesgue s'en tient donc bien à la forme du lemme de Vitali. Et voici le tournant, sans précaution oratoire particulière:

> Supposons, comme précédemment, que nous ne sortions pas d'une certaine région bornée R; alors il est évident que $m(\mathcal{E}_p)$ doit tendre vers zéro, sans quoi les domaines successifs choisis, qui ont une mesure supérieure à $\sum\left[m(\mathcal{E}_p) - \frac{1}{p}\right]$, aurait une mesure totale indéfinie. Donc *les domaines choisis, comme il vient d'être dit, couvrent tout E aux points d'un ensemble de mesure nulle près*.

Réception de l'article de Vitali

Certainement, Lebesgue a servi de «passeur» pour le théorème de Vitali, en étendant sa portée, en présentant en détail ses conséquences et en le publiant dans une revue de renom, alors que les recensions de l'article de Vitali n'avaient pas souligné l'importance du résultat. Le *Jahrbuch über die Fortschritte der Math.*, vol. 39 pour l'année 1908 (1911), dans son article 0101.05, propose une recension particulièrement faible, qui se limite à dire que l'article de Vitali (1907–08) généralise aux fonctions de plusieurs variables les théorèmes de dérivation précédemment obtenus par l'auteur (Vitali 1905). Le *Bulletin des Sciences Mathématiques* 34, 1910, p. 118 de la seconde partie, ajoute au moins à la description précédente l'énoncé complet du théorème de recouvrement. Carathéodory (1918), qui a écrit un livre important pour la transmission du résultat dans tous les pays situés à l'Est de la France et au Nord de l'Italie, où on lisait mieux l'allemand que l'italien ou le français, a étudié l'article de Lebesgue. S'il ne mentionne pas Lebesgue dans le texte, il mentionne son article (Lebesgue 1910), tout comme celui de Vitali (1907–08) dans la liste des références à la fin du livre. Ajoutons que Carathéodory est l'un des premiers à avoir fixé l'appellation «théorème de recouvrement de Vitali». C'est en effet le titre de sa section 288, *Überdeckungssatz von Vitali*, et les premiers mots de la section précisent que le théorème de recouvrement de Vitali renforce de façon significative les résultats des sections 57–61 de son livre (consacrées aux théorèmes de recouvrement de Borel et de Lindelöf). Dans la mesure où c'est la version de Lebesgue du théorème de Vitali dont Carathéodory propose la rédaction, une version sensiblement différente de celle de Vitali, comme nous avons commencé de l'expliquer, il n'aurait pas été absurde de parler de théorème de Vitali–Lebesgue. Mais Carathéodory en a décidé autrement, et le nom de Lebesgue est absent de cette section 288 ainsi que des suivantes, consacrées au même sujet.

Passage à l'énoncé de recouvrement

Après avoir vu la transformation par Lebesgue de l'énoncé de Vitali en énoncé de recouvrement, montrons que la *preuve* de Vitali suffit à établir que les segments choisis recouvrent le noyau, à un ensemble de mesure nulle près; revenons au point (v): pour prouver que la série des longueurs des segments sélectionnés atteint ou dépasse la mesure du noyau, Vitali a montré que m_n tend vers 0. Rappelons que m_n est, par définition, la mesure du noyau $G(\Sigma_n)$ de la famille Σ_n des segments de Σ qui ne rencontrent pas les premiers segments sélectionnés

$$s_1, \ldots, s_{N_1}, \ldots, s_{N_2}, \ldots, s_{N_{n-1}}. \qquad (\beta_n)$$

Mais on a vu que $G(\Sigma_n)$ est égal aussi à la partie du noyau initial $G(\Sigma)$ qui n'est pas couverte par les segments (β_n), et d'après Vitali,

$$|G(\Sigma_n)| = m_n \to 0.$$

À la fin du processus, on aura bien établi que les segments (s_k), $k \geq 1$, couvrent presque sûrement le noyau; en effet, les ensembles $G(\Sigma_n)$ décroissent vers l'ensemble G_∞ des points du noyau $G(\Sigma)$ qui ne sont pas couverts par les segments sélectionnés, et la mesure m_n de $G(\Sigma_n)$ tend vers 0, ce qui entraîne que la mesure de G_∞ est nulle: l'argument ressemble à celui qu'a donné Lebesgue.

C'est sans doute l'absence de représentation ensembliste qui explique cette bizarrerie de l'énoncé de Vitali. Nous avons vu que Vitali ne consigne dans sa preuve que les conclusions en termes de mesure, bien que certaines d'entre elles semblent impossibles à concevoir sans la prise en compte d'inclusions d'ensembles. Nous avons ajouté ces considérations ensemblistes en commentaire, là où, par exemple, Vitali s'est contenté d'un

on a certainement $m_2 \geq m_1 - \sigma_1$

qui à notre sens, ne peut se comprendre que comme conséquence de l'inclusion d'ensembles $G(\Sigma_1) \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} s_i \subset G(\Sigma_2)$. Il serait présomptueux de notre part de supposer que Vitali n'a pas vu cette inclusion, mais alors, nous devons penser qu'il s'est interdit de l'écrire dans son article. Craignait-il que ces notations ensemblistes n'aient pas droit de cité? Ou pensait-il qu'elles doivent disparaître du tableau, comme l'esquisse au crayon tracée par le peintre, ou comme disparaît l'échafaudage autour de la construction achevée?

Pourtant, Vitali donne aussi des énoncés de recouvrement: au §4 du premier chapitre, il montre, en application du théorème de recouvrement, l'énoncé suivant: si un ensemble mesurable A est couvert par une famille Σ de segments (non réduits à des points), il existe une sous-famille *dénombrable* de Σ dont la réunion couvre un sous-ensemble de A, de même mesure que A. Vitali démontre ici l'existence d'un *recouvrement presque sûr*, mais il n'a pas jugé utile de donner cette forme à son théorème principal.

4.2.1 Du lemme au théorème, plus directement

Un nouveau pas dans la compréhension ensembliste

On peut aisément modifier le lemme pour qu'il permette d'affirmer que les segments qui y sont sélectionnés *couvrent* une fraction du noyau, au lieu de se contenter de parler de la somme de leurs longueurs: puisque le noyau $G = G(\Sigma)$ est mesurable (Vitali l'a affirmé), et qu'il est supposé de mesure finie, commençons par couvrir G par un ouvert U de mesure finie, dont la mesure soit très proche de celle du noyau,

$$G \subset U, \quad |U \setminus G| < \varepsilon,$$

et restreignons la famille Σ de segments à la sous-famille Σ_1 formée de ceux qui sont contenus dans U. Le noyau de Σ_1 est encore égal à G (c'est l'argument de *localisation*, dont on a eu besoin pour justifier une autre affirmation péremptoire de Vitali). Appliquons l'algorithme de Vitali à Σ_1. Les segments disjoints $s_1, \ldots, s_n$, sélectionnés dans Σ_1 par le lemme , sont donc contenus dans U; ils couvrent nécessairement une partie conséquente du noyau G, parce que la mesure de $U \setminus G$ est très petite: en effet, si S désigne leur réunion, on a que

$$S = \bigcup_{n=1}^{N} s_n, \quad S \subset U, \quad \text{et} \;\; S \setminus G \subset U \setminus G.$$

La mesure des points de S qui ne sont pas dans G vérifie donc la majoration

$$|S \setminus G| \leq |U \setminus G| < \varepsilon\,;$$

comme Vitali a effectué la sélection de façon que $|S| > \frac{1}{3}|G| - \varepsilon$, on voit que

$$|S \cap G| = |S| - |S \setminus G| \geq \frac{1}{3}|G| - 2\varepsilon.$$

Ainsi: *pour tout nombre $\mu < \frac{1}{3}$, il est possible de trouver dans la famille Σ un nombre fini de segments disjoints, qui couvrent une partie H du noyau $G(\Sigma)$ dont la mesure vérifie l'inégalité $|H| \geq \mu|G|$.*

Si le lemme est énoncé ainsi, il devient clair que le procédé d'exhaustion couvrira le noyau, sans qu'on ait besoin de recourir à l'argument indirect qui utilise la convergence de m_n vers 0: après une première application du lemme préliminaire ainsi modifié, la partie non couverte représente une proportion $< 1 - \mu$ de la mesure du noyau, puis $(1 - \mu)^2$ après deux applications, et $(1 - \mu)^k$ après k itérations. Par conséquent, la proportion non couverte tend vers 0 avec k, ce qui signifie qu'à la limite, le noyau est couvert presque sûrement.

Cette démarche a été suivie par plusieurs auteurs, en commençant par Carathéodory (1918, §288). Wheeden et Zygmund (1977, 7.2) énoncent d'abord le lemme préliminaire comme le fait Vitali, mais à l'entrée de la preuve du théorème (en 7.3), ils donnent la «version modifiée du lemme» et concluent par l'argument ci-dessus.

5 La méthode «en un coup»

5.1 L'apport de Banach

Dix-sept ans plus tard, Banach (1924) fera la preuve du théorème de Vitali *en un coup*, sans la découper en lemme préliminaire suivi d'un argument d'exhaustion. Mais il s'agit, au fond, d'une analyse plus précise de l'algorithme de Vitali, comme nous l'avons affirmé dans l'introduction. Il s'agit aussi de remplacer un raisonnement infini portant sur des nombres, les longueurs des segments, par un raisonnement infini sur des ensembles, qui permet de dégager *l'ensemble résidu*, la partie du noyau qui n'est pas couverte par les segments sélectionnés.

L'algorithme de Vitali produit (en général) une suite infinie $(t_n)_{n \geq 1}$ de segments deux à deux disjoints. Vitali a utilisé les propriétés de cet algorithme pour figer la conséquence suivante, qui est son *lemme préliminaire*: au bout d'un certain temps N_1, les segments $t_1, \ldots, t_{N_1}$ couvrent presque un tiers de la mesure du champ $\widetilde{\Sigma}$ couvert par la famille donnée Σ — et nous avons vu comment déduire qu'ils couvrent presque un tiers de la mesure de son noyau $G(\Sigma)$ —. Ayant consigné cette observation, il va, dans la preuve du théorème, commencer par prendre ces segments $t_1, \ldots, t_{N_1}$ pour obtenir la «première vague» de segments, qu'il a notée (1),

$$s_1, \ldots, s_{N_1},$$

puis il appliquera son observation une deuxième fois pour justifier l'existence d'une «deuxième vague», formée des segments (2)

$$s_{N_1+1}, \ldots, s_{N_2},$$

qu'il choisit sans rapport direct avec la construction de la première vague. Mais il aurait pu, comme nous allons l'expliquer, trouver cette deuxième liste finie en prenant, suffisamment longtemps, les segments du reste $t_{N_1+1}, t_{N_1+k}, \ldots$ de la suite infinie produite par la première exécution de l'algorithme, et ainsi de suite pour la troisième vague et les suivantes.

À chaque pas, l'algorithme reproduit la même situation: une nouvelle famille de segments dont on choisit un élément de longueur presque maximale. On peut constater que la suite infinie $t_{N_1+1}, t_{N_1+2}, \ldots, t_{N_1+k}, \ldots$ serait le résultat que produirait l'algorithme de Vitali, appliqué à la famille restreinte Σ_2 formée de tous les segments de Σ qui ne rencontrent pas $t_1, \ldots, t_{N_1}$; pour commencer, le premier pas de l'algorithme appliqué à Σ_2 doit y choisir un segment de longueur presque maximale, et t_{N_1+1} est un choix possible: en effet, t_{N_1+1} a été choisi au pas $N_1 + 1$ de l'algorithme appliqué à la famille totale Σ, comme un segment de longueur presque maximale dans la famille des segments restant en jeu après N_1 pas, famille qui, précisément, est égale à Σ_2. La même remarque s'applique aux choix suivants $t_{N_1+2}, t_{N_1+3}, \ldots$ Ainsi, la suite $t_{N_1+1}, \ldots, t_{N_1+k}, \ldots$ est le résultat de l'algorithme de Vitali, appliqué à Σ_2. En conséquence, pour N_2 assez grand, les segments $t_{N_1+1}, \ldots, t_{N_2}$ couvrent presque un tiers de la mesure de la réunion de la famille Σ_2, — et aussi presque un tiers de la mesure du noyau $G(\Sigma_2)$ —. Pour être tout à fait précis, ce qui précède n'est exact qu'à condition qu'on ait retouché la suite auxiliaire $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de façon appropriée, en la remplaçant par $\varepsilon_{N_1+1}, \varepsilon_{N_1+2}, \ldots$. Mais il n'y a aucune retouche à faire si, comme Lebesgue et Banach, on utilise un contrôle multiplicatif de constante c fixée, $0 < c < 1$, où le segment t_n suivant est choisi de longueur plus grande que $c\,\ell_n$, le nombre ℓ_n étant le sup des longueurs des segments restant en jeu au pas n.

Au lieu de dire qu'on trouve les «vagues successives»

$$s_{N_k+1}, \ldots, s_{N_{k+1}}$$

en relançant de nouvelles instances de l'algorithme, on peut laisser la même instance se dérouler plus longtemps pour obtenir les vagues successives, et finalement, on voit qu'une unique instance infinie de l'algorithme suffit. De cette façon, Banach montre que:

la suite infinie des segments deux à deux disjoints donnée par l'algorithme de Vitali couvre le noyau $G(\Sigma)$ à une erreur de mesure nulle près,

alors que Vitali a montré dans le lemme préliminaire que:

la suite infinie des segments deux à deux disjoints donnée par l'algorithme couvre presque un tiers de la réunion $\widetilde{\Sigma}$ des segments de Σ.

La formule de Banach

Pour obtenir le résultat, Banach démontre une formule qui sera reprise ou adaptée à de très nombreuses reprises, formule qui, dans notre contexte, peut s'écrire ainsi: pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$G(\Sigma) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m} s_i\right) \cup \left(\bigcup_{n>m} 5 * s_n\right), \tag{vi}$$

où, pour chacun des segments s_n sélectionnés, on a désigné par $5 * s_n$ le segment dilaté cinq fois. En réalité, Banach s'intéresse à une situation plus compliquée, que nous décrirons dans la section 6.3 sur les *familles régulières d'ensembles* de Lebesgue.

5.2 Description du résidu comme limite supérieure d'ensembles

Supposons que l'algorithme de Vitali, appliqué à une famille Σ de segments, a produit la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de segments deux à deux disjoints. Appelons *résidu* l'ensemble G_∞ des points du noyau $G(\Sigma)$ qui ne sont pas couverts par les segments sélectionnés,

$$G_\infty = G(\Sigma) \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} s_n\right).$$

La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ a la propriété d'exhaustivité suivante: tout segment de Σ rencontre au moins un segment s_n. Désignons par $\mathcal{S}_n$ la famille de tous les segments s de Σ qui rencontrent s_n, mais ne rencontrent aucun des segments précédents

$$s_1, \ldots, s_{n-1}$$

(c'est la famille Σ_n de la preuve du lemme préliminaire, le «paquet» de segments de cœur s_n); désignons par S_n la réunion des segments de $\mathcal{S}_n$. On va montrer que le résidu G_∞ est égal à la *limite supérieure* de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$

$$G_\infty = \limsup_n S_n := \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} S_n,$$

qui est l'ensemble formé des points qui appartiennent à une infinité d'ensembles S_n; on peut aussi décrire G_∞ comme

$$G_\infty = \limsup_n (S_n \setminus s_n) = \limsup_n G_n,$$

où les G_n sont les ensembles «débordants» introduits par Vitali dans la preuve du lemme préliminaire (voir à l'équation (ii) la définition de G_1). Comme Vitali a fait observer que la mesure de G_n est majorée par $2\ell_n$, et donc celle de S_n par $3\ell_n$, et comme la série $\sum \ell_n$ converge, on a

$$\sum |S_n| < +\infty.$$

Le lemme de Borel–Cantelli dit que la limite supérieure des S_n (le résidu) est de mesure nulle: c'est bien la conclusion du théorème de Vitali (c'est aussi sa preuve par Banach: invoquer Borel–Cantelli ne fait qu'apposer un nom qui résume un passage de l'article de Banach).

La *preuve* de l'identification du résidu comme lim sup a été souvent reprise, bien que peu d'auteurs mentionnent explicitement l'ensemble limite supérieure. Leader (2001, chap. 5, p. 171) est un des seuls à le faire, mais cette idée est déjà visible chez Natanson (1955, III §8), dont nous reprenons les arguments dans les lignes qui suivent. Notons en passant que Natanson, comme beaucoup d'autres, se doit de tirer un coup de chapeau respectueux à Banach, pour sa preuve «ingénieuse» du théorème de Vitali. De fait, Natanson installe pour longtemps une version particulièrement aboutie de la preuve, qui néglige les complications des versions Lebesgue–Carathéodory, traitées par Banach, pour se concentrer sur le cas crucial d'une famille de segments, auquel il applique la variante «en un coup», mais où toutes les idées-clés qui viennent directement de Vitali apparaissent clairement.

Pour commencer l'identification du résidu, rappelons que $|S_n| \to 0$; il est donc clair que les points de l'ensemble

$$\limsup S_n$$

appartiennent à des segments de Σ de longueur arbitrairement petite, donc ce sont des points du noyau $G(\Sigma)$; mais ils sont extérieurs à tous les segments s_k, puisque, par construction, S_n est disjoint de s_k pour tout $n > k$. Ainsi, la lim sup des ensembles S_n est contenue dans le résidu G_∞.

Inversement, soient x un point du résidu et m un entier fixé; par la définition du résidu, x est extérieur à l'ensemble fermé

$$F_m = s_1 \cup \cdots \cup s_m.$$

Puisque x est dans le noyau, on peut trouver un segment $s \in \Sigma$ qui contient x mais qui est assez petit pour être disjoint de F_m. Par l'exhaustivité, le segment s rencontre des segments s_k, dont l'indice k est nécessairement $> m$. Si n est le plus petit entier k tel que s rencontre le segment s_k, on a $n > m$, on voit que s est disjoint de $s_1, \ldots, s_{n-1}$ et rencontre s_n, donc s appartient à $\mathcal{S}_n$ et x appartient à S_n. Ainsi, pour tout m, il existe des entiers $n > m$ tels que $x \in S_n$, donc x appartient à $\limsup_n S_n$. On a donc démontré que

$$G_\infty = \limsup_n S_n.$$

Banach a prouvé l'inclusion (vi), qui correspond à la description du résidu par une lim sup, puisque cette inclusion implique immédiatement que pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$G_\infty \subset \bigcup_{n>m} 5 * s_n,$$

ou encore

$$G_\infty \subset \limsup_n \big(5 * s_n\big).$$

En poussant un peu loin notre dévotion à Vitali, nous pourrions prétendre que tout vient ici de la formule (iv) que nous avons donnée dans la section 4.1, l'égalité

$$G(\Sigma_1) \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} s_i = G(\Sigma_2),$$

que Vitali, le premier, a pensée! Mais il serait plus raisonnable de reconnaître que Vitali, qui n'a pas su s'appuyer sur la puissance des notations ensemblistes, ne pouvait pas calculer «de tête» la formule (vi) de Banach.

5.3 Ensembles de Cantor

Il est frappant de constater combien la construction du résidu est analogue à la construction d'ensembles de Cantor. Nous allons indiquer un recouvrement de Vitali de (0, 1) pour lequel l'algorithme de Vitali produira (à une nuance près) les tiers-médians de la construction de l'ensemble triadique comme suite $(s_n)_{n\geq 1}$ de segments disjoints sélectionnés, recouvrant presque sûrement [0, 1]. Le résidu sera alors égal à l'ensemble Δ^* obtenu à partir de l'ensemble de Cantor Δ en lui enlevant l'ensemble dénombrable des extrémités des tiers-médians; cette «nuance» résulte du fait que les tiers-médians retirés par Cantor sont ouverts, alors que les choix de Vitali sont des segments.

Rappelons les éléments de la construction de l'ensemble triadique, mais adaptés à la construction de sa variante Δ^*: on part de l'intervalle ouvert $(0, 1)$ au pas 0; au pas 1, on enlève, au milieu de cet intervalle de longueur 1, le segment médian $[1/3, 2/3]$ de longueur $1/3$, le tiers de la longueur de l'intervalle ambiant $(0, 1)$; après le pas 1, il reste deux intervalles ouverts de longueur $1/3$ qui sont $(0, 1/3)$ et $(2/3, 1)$. Au pas $n > 1$ de la construction on enlève, de chacun des 2^{n-1} intervalles ouverts de longueur $3^{-(n-1)}$ qui subsistent après le pas $n-1$, le segment médian de longueur 3^{-n}, le tiers de la longueur de l'intervalle; on obtient ainsi 2^{n-1} segments tiers-médians de longueur 3^{-n}. Après qu'on a enlevé au pas n ces 2^{n-1} tiers-médians, il subsiste 2^n intervalles ouverts de longueur 3^{-n}. L'ensemble Δ^* est formé des points de $(0, 1)$ qui n'appartiennent à aucun segment tiers-médian, c'est-à-dire les points qui «ont subsisté» tout au long de la construction.

Il est facile de décrire une famille Σ telle que l'ensemble triadique Δ^* soit *une possibilité* de résidu pour l'algorithme de Vitali: considérons la famille Σ des segments contenus dans $(0, 1)$ dont les longueurs sont dans la liste $1/3, 1/9, \ldots, 3^{-n}, \ldots$, où n prend toutes les valeurs ≥ 1. Clairement, le noyau de cette famille est égal à $(0, 1)$. Il est *possible* de commencer l'algorithme en choisissant $s_1 = [1/3, 2/3]$, le premier tiers-médian de la construction de Δ^*, car c'est un segment de longueur maximale dans Σ. Mais alors, tous les autres segments de longueur $1/3$ de la famille Σ rencontrent s_1 et sont donc invalidés pour le choix de s_2. La plus grande longueur pour les segments restant en jeu est $1/9$. Il est donc possible de choisir pour s_2 et s_3 les deux tiers-médians suivants, $[1/9, 2/9]$ et $[7/9, 8/9]$. À nouveau, les autres segments de longueur $1/9$ sont invalidés, et on passe à la longueur $1/27$, etc. Les segments sélectionnés par l'algorithme, aidé par nos décisions successives, sont les tiers-médians, et le résidu est l'ensemble Δ^*.

Il est un peu plus difficile de *forcer* l'égalité du résidu avec l'ensemble triadique. Remarquons que l'exemple précédent aurait pu être construit à partir de la famille Σ' de tous les segments $s \subset (0, 1)$ qui rencontrent un segment tiers-médian t de la construction de Δ^*, tiers-médian t qui soit au moins aussi long que s. Pour parvenir à forcer l'égalité, considérons maintenant la famille Σ^* constituée, d'une part, par tous les tiers-médians de la construction de Δ^*, dont nous dirons qu'ils constituent la *catégorie I*, et d'autre part, par tous les segments s de longueur 2.3^{-n}, pour un certain entier $n \geq 2$, qui rencontrent un segment tiers-médian t *plus long* que s,

$$2.3^{-n} = |s| < |t| = 3^{-k} \text{ où } 1 \leq k < n.$$

Nous dirons que ces segments s sont les *éléments de catégorie II* de la famille Σ^*. Les plus grands segments de catégorie II sont de longueur $2/9 = 2.3^{-2}$. Les longueurs possibles dans la famille Σ^* sont donc $1/3, 2/9, 1/9, 2/27$, etc.

Le lecteur pourra vérifier que les segments de catégorie II constituent déjà un recouvrement de Vitali de $(0, 1)$. L'algorithme de Vitali, appliqué à la famille Σ^*, choisira nécessairement les tiers-médians: si le nombre ε_1 de la «suite de contrôle» (ε_n) choisie par Vitali au début de la preuve est assez petit (plus petit que $1/9$, pour être précis), le seul choix possible pour le premier segment s_1 de l'algorithme est le premier tiers-médian $[1/3, 2/3]$, l'unique segment de Σ^* de taille maximale $1/3$. La deuxième longueur possible est $2/9$; par construction, tous les segments de Σ^* qui sont de longueur $2/9$ rencontrent un tiers-médian de longueur $> 2/9$, et il n'y a qu'un tiers-médian qui vérifie cette condition, à savoir $[1/3, 2/3]$, qui a été sélectionné comme segment s_1. Ainsi, tous ces segments de longueur $2/9$ rencontrent s_1 et sont donc invalidés pour le choix de s_2. On passe à la longueur suivante $1/9$: si $\varepsilon_2 < 1/27 = 1/9 - 2/27$, on *doit* choisir pour s_2 et s_3, dans un ordre quelconque, les deux tiers-médians de longueur $1/9$, à savoir $[1/9, 2/9]$ et $[7/9, 8/9]$. Quand s_1, s_2 et s_3 sont ainsi sélectionnés, tous les segments de longueur $2/27$, qui sont de catégorie II, rencontrent un tiers-médian plus long que $2/27$, c'est-à-dire s_1, s_2 ou s_3; à nouveau, ils sont tous invalidés et l'algorithme choisira pour $s_4, \ldots, s_7$ les quatre tiers-médians de longueur $1/27$, à condition que $\varepsilon_3 < 3^{-4}$. Ainsi de suite: à chaque pas, il n'y a qu'un choix possible, et le résidu est nécessairement égal à l'ensemble triadique Δ^*.

S'il n'est finalement pas si facile de forcer l'algorithme à avoir précisément pour résidu l'ensemble triadique, notons que dans tous les cas, à un recouvrement de Vitali de $(0, 1)$ par des segments contenus dans $(0, 1)$, l'algorithme de Vitali associera comme résidu *un* ensemble de Cantor de mesure nulle. Si nous travaillons avec des familles Σ constituées d'intervalles ouverts au lieu de segments, la parenté sera encore plus lisible; dans ce cas, nous pouvons demander que les intervalles extraits par l'algorithme *ouvert* de Vitali aient des *adhérences* deux à deux disjointes. Le résidu de «l'algorithme ouvert» est un ensemble fermé borné (en général nulle part dense), appelé *ensemble parfait* par Cantor, et dont la description générale, bien comprise à l'époque, est la suivante: c'est *un ensemble obtenu en enlevant de* $[0, 1]$ *une suite d'intervalles deux à deux disjoints et ne se touchant pas par leurs extrémités* (à lire, par exemple, chez Scheeffer (1884–85, p. 288); on trouve les mêmes mots, sans référence historique, chez Denjoy (1915, p. 109)).

6 Conclusion

6.3.1. Une application par Banach de la variante de Lebesgue, lui permet d'apporter à la théorie de la mesure sa touche de perfection.

Dans son article (Lebesgue 1910, Note p. 395), Lebesgue pose la question de savoir si le théorème de recouvrement reste vrai, dans le plan, quand on s'intéresse à une famille Σ de rectangles dont on ne suppose plus que le rapport du grand côté au petit côté reste borné? Banach (1924) y répond par la négative, par une méthode ingénieuse qui utilise le théorème de recouvrement lui-même, appliqué à des ensembles plans limités par une hyperbole et par des segments parallèles aux axes de coordonnées.

Avant de répondre à la question, Banach a donné sa preuve du théorème de Vitali; il a établi une formule que nous avons donnée pour des segments, la formule (vi). Bien que ce ne soit peut-être pas la partie de l'article dont Banach devait être le plus fier, c'est cette première partie, qui introduit la *méthode en un coup*, qui a été citée inlassablement pendant quatre-vingts ans. Dans le cas plus général où on couvre un ensemble mesurable E au sens de Vitali–Lebesgue par une famille régulière $\mathcal{F}$ de constante c, et où l'algorithme extrait une suite (F_n) de fermés disjoints, associés à des boules ouvertes (B_n), Banach montre la formule suivante: pour tout entier $m \geq 1$, on a

$$E \subset \left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i \right) \cup \left(\bigcup_{n>m} k * B_n \right),$$

où k est une valeur > 1 calculée à partir de la constante de régularité c.

C'est de Carathéodory, qui a relayé la question de Lebesgue (citeRE7, §289, Note p. 304), que Banach semble tirer toutes ses informations. Signalons que dans la deuxième édition (1927) de son livre, Carathéodory mentionne la réponse négative de Banach, mais donne dans la Note 1 une autre construction, assez proche, et qu'il dit tenir d'une lettre qu'il a reçue de H. Bohr en 1918.

Une construction complexe

Suivons la preuve de Banach. Considérons la partie A du plan qui est formée des points $P = (x, y)$ tels que $x, y \geq 0$ et $xy \leq 1$. C'est un fermé de mesure infinie. On observe que tout rectangle R, de côtés parallèles aux axes et contenu dans A, a une surface majorée par 1, cette valeur étant atteinte si le sommet inférieur gauche du rectangle est l'origine $O = (0, 0)$ et si le sommet supérieur droit se trouve sur l'hyperbole H d'équation $xy = 1$. Pour abréger et imager ce qui suit, nous dirons que le rectangle R est *basé* en un point P quand P est le sommet inférieur gauche (le coin sud-ouest) de R. On voit qu'il ne peut y avoir de «lemme préliminaire» pour des familles Σ formées de rectangles arbitraires: pour $b > 1$, désignons par A_b la partie de A formée des points qui vérifient de plus la condition $x, y \leq b$; pour b assez grand, la mesure de A_b, égale à $1 + 2 \ln b$, peut dépasser toute valeur $m > 0$ donnée à l'avance; la famille Σ de tous les rectangles contenus dans A_b et basés à l'origine O couvre l'ensemble A_b, mais les sous-familles disjointes extraites de Σ ne peuvent contenir qu'un seul rectangle, car tous contiennent le point O; de plus, chacun de ces rectangles est d'aire ≤ 1. Ainsi, la mesure extraite est limitée à 1, et la proportion de la mesure de A_b couverte par une sous-famille disjointe, extraite de Σ, ne peut donc dépasser $1/m$: il n'existe pas de valeur fixe $c > 0$ qui puisse remplacer la valeur $1/9$ valable pour les familles de carrés.

Fixons $b > 0$ et considérons la famille $\mathcal{F}_b$ formée de tous les translatés des homothétiques > 0 quelconques de A_b, ensembles de la forme $a = \lambda A_b + v$ où λ est le rapport d'homothétie et v le vecteur de translation. Il s'agit d'une famille régulière de fermés, et elle couvre le carré $C = [0, 1]^2$ au sens de Vitali–Lebesgue. D'après la version de Lebesgue du théorème de Vitali, il existe un ensemble E_0 de mesure 1 dans le carré C, tel que E_0 soit réunion d'une famille disjointe $(a_j)_{j \geq 1}$ extraite de $\mathcal{F}_b$. Considérons la famille Σ_0 des rectangles R qui sont contenus dans l'une quelconque des pièces qui forment E_0, en étant basés à l'origine $O + v_j$ de cette pièce $a_j = \lambda_j A_b + v_j$. Si (R_n) est une collection disjointe de rectangles extraits de Σ_0, les considérations précédentes sur l'absence de lemme préliminaire montrent que la somme des surfaces des R_n est majorée par $1/m$: en effet, la somme des mesures des a_j est égale à 1, et chacune des pièces a_j ne peut contenir qu'un seul rectangle R_n de la collection disjointe, lequel R_n couvre une proportion de a_j qui est majorée par $1/m$.

Pour conclure, Banach procède ainsi: répétons l'opération, pour chaque entier $k \geq 0$, avec une nouvelle famille $\mathcal{F}_{b_k}$ formée d'ensembles de taille $\leq 2^{-k}$ et déduits d'une pièce de base A_{b_k}, avec b_k assez grand pour que les rapports $1/m_k$ correspondants vérifient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m_k} = \sigma < 1.$$

On aura de même, pour tout k, un ensemble E_k de mesure 1, réunion d'une famille disjointe extraite de $\mathcal{F}_{b_k}$. Banach pose enfin

$$E = \bigcap_{k \geq 0} E_k.$$

C'est un ensemble de mesure 1 dans le carré C, et il est couvert au sens de Vitali–Lebesgue par la famille Σ des rectangles R qui, pour un certain k, sont basés à l'origine de l'une des pièces qui forment E_k et contenus dans cette pièce. Soit (R_n) une collection disjointe de rectangles, extraite de Σ; si k est donné, ceux de ces rectangles R_n qui proviennent d'une pièce de $\mathcal{F}_{b_k}$ couvrent, d'après la discussion précédente, une mesure majorée par $1/m_k$, de sorte que la famille entière de ces rectangles (R_n) ne pourra couvrir qu'une mesure $\leq \sigma < 1$, alors que E est de mesure 1. Ainsi, le théorème de recouvrement de Vitali–Lebesgue n'est pas valable pour la famille formée par tous les rectangles du plan, qui ne satisfait pas la restriction de *régularité*.

Avec cette construction de Banach, on peut considérer que la théorie de la mesure a atteint alors un certain degré de perfection. À la même époque, Souslin et Lusin ont mis au point la théorie des *ensembles analytiques*, qui est un autre prolongement des notions introduites par Borel vingt ans plus tôt. L'*opération A* de Souslin permet, à partir de réunions et d'intersections infinies, des constructions d'ensembles qui vont au delà de celles qui ont servi à définir les ensembles de la tribu de Borel, et elle permet d'élucider la nature des projections des boréliens du plan, une question suscitée par les travaux de Lebesgue (1905). Les résultats, annoncés dans deux Notes qui se suivent dans six pages des Comptes Rendus — Souslin (1917, p. 88), Lusin (1917, p. 91), — ont été largement développés par Lusin les années suivantes (par exemple Lusin 1927). Certainement, les mathématiciens des années 1920 ont complètement apprivoisé les *constructions ensemblistes infinies* qui font le sous-titre de notre article.

7 Remarques et compléments

7.1.1. Points de densité

Le théorème de recouvrement est particulièrement efficace pour démontrer l'existence de points de densité. La preuve que nous allons esquisser est essentiellement celle de Sierpiński (1923); mais comme ce dernier tient à présenter une preuve très élémentaire, il choisit de n'utiliser que la version finie du lemme préliminaire de Vitali. Pour notre part, nous souhaitons montrer ici l'efficacité du théorème de Vitali proprement dit.

Si A est un sous-ensemble mesurable de la droite réelle, un point $x \in A$ est dit *de densité* si

$$\lim_{x \in s} \frac{|A \cap s|}{|s|} = 1$$

lorsque la longueur du segment s contenant x tend vers 0. Ainsi, les points y de A qui ne sont pas de densité vérifient, pour un certain $r < 1$, qu'il existe des segments s arbitrairement petits contenant y et tels que

$$|A \cap s| < r|s|. \tag{ix}$$

Si A est un ensemble mesurable de mesure finie, si r est un nombre dans $(0, 1)$, considérons le sous-ensemble A_r des points y de A vérifiant (ix) pour des segments s arbitrairement petits contenant y. Pour montrer le théorème de densité, c'est-à-dire montrer que presque tout point de A est un point de densité, il suffit de prouver que l'ensemble A_r est négligeable, pour tout $r < 1$: on applique ensuite cette information à une suite (r_n) tendant vers 1. Fixons $\varepsilon > 0$, choisissons un ouvert U contenant A_r et dont la mesure soit plus petite que $|A_r| + \varepsilon$. L'ensemble A_r est recouvert au sens de Vitali par la famille des segments (ix) qui sont contenus dans U. Par le théorème de Vitali, l'ensemble A_r peut être recouvert presque sûrement par une suite de segments disjoints (s_n) vérifiant (ix) et contenus dans U, donc

$$|A_r| = \sum_n |A_r \cap s_n| \leq \sum_n |A \cap s_n| < r \sum_n |s_n| \leq r|U| < r(|A_r| + \varepsilon).$$

Comme ε est > 0 arbitraire, il en résulte que $|A_r| \leq r|A_r|$, ce qui entraîne que la mesure de A_r est nulle, et ceci termine la preuve.

7.1.2. Le cas fini suffit pour le lemme préliminaire

Nous avons dit que Sierpiński (1923) se contente du cas fini du lemme préliminaire pour démontrer le théorème de densité. Dans un registre voisin, Wheeden et Zygmund (1977, 7.2) font la remarque suivante: dans le cas où un ensemble E *mesurable* et de mesure finie est couvert au sens de Vitali par une famille Σ d'intervalles ouverts, on peut trouver un compact $K \subset E$ dont la mesure approche celle de E, puis, par le théorème de recouvrement de Borel, une sous-famille finie extraite de Σ qui couvre K. Le cas fini du lemme préliminaire permet alors d'en retrouver le cas général.

Pour pouvoir appliquer le théorème de Borel, Wheeden et Zygmund passent subrepticement de segments à des intervalles ouverts ("assume, as we may..."). Cela peut se justifier de la façon suivante: fixons $\lambda > 1$, proche de 1, et associons à chaque segment s de la famille Σ l'intérieur I_s du dilaté $\lambda * s$. Certainement, les intervalles ouverts I_s recouvrent aussi l'ensemble E et l'argument précédent donne, grâce au cas fini du lemme préliminaire, des intervalles disjoints I_s qui couvrent «le tiers» de K, donc presque le tiers de E: si $\mu < 1/3$ est donné, on pourra choisir K assez «proche de E » pour garantir l'existence d'intervalles $I_{s_1}, \ldots, I_{s_N}$ disjoints et tels que

$$\sum_{j=1}^{N} |I_{s_j}| > \mu |E|.$$

Mais alors, les segments s_j correspondants sont disjoints et vérifient

$$\sum_{j=1}^{N} |s_j| = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{N} |I_{s_j}| > \frac{\mu}{\lambda} |E|,$$

ce qui établit le cas général du lemme préliminaire de Vitali, à partir du cas fini et du théorème de Borel.

7.3 *La contribution d'Evans et Gariepy*

La notion de famille maximale disjointe

Plusieurs des éléments introduits par Lebesgue se retrouvent chez Evans et Gariepy (1992, section 1.5), qui ont mis en place un énoncé qui fixe précisément ce qui a été accompli à cet instant de la preuve de Vitali; cet énoncé ne parle pas de mesure, mais seulement de taille d'ensembles, en termes de rayons de boules dans un espace métrique. Il dégage la partie purement combinatoire de la preuve, indépendante des questions de mesure. À vrai dire, le lemme que nous donnons n'est pas exactement celui d'Evans et Gariepy: d'une part, nous avons complété son énoncé par une affirmation cruciale (*claim*) qu'ils font au milieu de leur preuve, et d'autre part, nous l'avons ramené à une famille de segments sur la droite. Rappelons que la notation $5 * t$ désigne le segment dilaté cinq fois obtenu à partir du segment t.

Lemme. *On considère une famille $\mathcal{F}$ de segments de longueur non nulle, et dont les longueurs sont bornées,*

$$\ell = \sup\{|s| : s \in \mathcal{F}\} < +\infty.$$

Il existe une famille $\mathcal{G}$ extraite de $\mathcal{F}$, formée de segments deux à deux disjoints et telle que tout segment s de $\mathcal{F}$ rencontre un segment $t \in \mathcal{G}$ qui, de plus, vérifie

$$|s| < 2|t|, \quad \textit{ce qui implique que} \quad s \subset 5 * t.$$

Il en résulte que

$$\bigcup \{s : s \in \mathcal{F}\} \subset \bigcup \{5 * t : t \in \mathcal{G}\}.$$

Preuve. Pour chaque entier $n \geq 0$, posons

$$\mathcal{F}_n = \{s \in \mathcal{F} : 2^{-n-1}\ell < |s| \leq 2^{-n}\ell\}.$$

On obtient ainsi une partition de la famille $\mathcal{F}$. Définissons par récurrence des familles de segments $\mathcal{G}_n$ et $\mathcal{H}_n$ de la façon suivante: on pose $\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0$, et on désigne par $\mathcal{G}_0$ une sous-famille de $\mathcal{H}_0$ *maximale disjointe*, c'est-à-dire formée de segments deux à deux disjoints et telle que tout segment de $\mathcal{H}_0$ rencontre un segment de $\mathcal{G}_0$. Quand les familles $\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_n$ sont définies, on désigne par $\mathcal{H}_{n+1}$ la sous-famille de $\mathcal{F}_{n+1}$ qui est formée des segments qui ne rencontrent aucun des segments précédemment sélectionnés dans $\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_n$. Enfin, on choisit pour $\mathcal{G}_{n+1}$ une sous-famille de $\mathcal{H}_{n+1}$, maximale disjointe.

La famille $\mathcal{G}$ qui est la réunion des $\mathcal{G}_n$ répond à la question: d'abord, c'est une famille disjointe; si t et u sont deux éléments de $\mathcal{G}$, distincts, on aura $t \in \mathcal{G}_m$ et $u \in \mathcal{G}_n$ pour certains entiers $m, n \geq 0$ qu'on peut supposer tels que $m \leq n$. Si $m = n$, les segments t et u sont disjoints parce que $\mathcal{G}_m$ est une famille disjointe, et si $m < n$, u est disjoint de t parce que $\mathcal{G}_n$ est contenue dans la famille $\mathcal{H}_n$, qui est formée de segments qui sont disjoints de ceux qu'on a sélectionnés précédemment dans $\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_m, \ldots, \mathcal{G}_{n-1}$. Ainsi, $\mathcal{G}$ est une famille de segments deux à deux disjoints.

Ensuite, si s est un élément quelconque de la famille $\mathcal{F}$, il existe un entier $n \geq 0$ (unique) tel que $s \in \mathcal{F}_n$. Si s n'est pas dans $\mathcal{H}_n$, on déduit que $n > 0$ (car $s \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{H}_0$ quand $n = 0$), et par définition de $\mathcal{H}_n$, le segment s doit rencontrer un segment t d'une des familles $\mathcal{G}_0, \ldots, \mathcal{G}_{n-1}$; si s est dans $\mathcal{H}_n$, il doit rencontrer un segment t de $\mathcal{G}_n$, par la maximalité de la sous-famille $\mathcal{G}_n$ de $\mathcal{H}_n$. Dans tous les cas, $s \in \mathcal{F}_n$ rencontre un segment $t \in \mathcal{G}_m$, avec $m \leq n$. On a donc

$$|s| \leq 2^{-n}\ell \leq 2^{-m}\ell = 2.2^{-m-1}\ell < 2|t|.$$

Si y est un point commun à s et à t, si c est le centre de t, on a pour tout point x de s

$$|x - c| \leq |x - y| + |y - c| \leq |s| + \frac{1}{2}|t| < \frac{5}{2}|t|,$$

ce qui montre que s est contenu dans le segment dilaté $5 * t$.

Notons que l'énoncé est valable pour une famille de segments sur la droite, couvrant un ensemble peut-être non borné; les familles maximales $\mathcal{G}_n$ de la preuve précédente ne sont plus nécessairement finies dans ce cas, mais leur existence peut s'établir en «remplissant au maximum», par des éléments de $\mathcal{H}_n$ deux à deux disjoints, tous les intervalles bornés $[-k, k]$ successivement, pour k variant dans l'ensemble des entiers ≥ 0. L'énoncé reste valable dans un cadre métrique tout à fait général, si on veut bien faire appel au lemme de Zorn pour produire ces classes maximales disjointes.

Rappelons pour finir le rôle de la restriction que le sup des longueurs soit fini: sans elle, on pourrait considérer la famille $\mathcal{F}$ formée de tous les segments $[-a, a]$, $a > 0$, qui couvrent la droite réelle, et qui contiennent tous le point 0. La famille disjointe $\mathcal{G}$ ne pourrait contenir qu'un seul segment $t_0 = [-a_0, a_0]$, et le dilaté $5 * t_0$, borné, ne pourrait pas contenir tous les segments de la famille $\mathcal{F}$.

7.4 *La constante 3*

La constante 3 apparaît à plusieurs reprises dans l'article de Vitali. Dans le lemme préliminaire, on extrait un nombre fini de segments deux à deux disjoints dont la réunion couvre (presque) un tiers de la mesure de la réunion de la famille donnée Σ. Pour le plan, Vitali nous dit que 3 sera remplacé par $9 = 3^2$, ou bien $27 = 3^3$ dans l'espace, etc…

NETTOYAGE

Mais Tibor Radó (1928) fera remarquer qu'on peut remplacer 3 par 2 pour le cas de la droite, par un argument très simple: si un intervalle s d'une famille finie Σ d'intervalles est contenu dans la réunion des autres intervalles de la famille, on peut le supprimer sans modifier la réunion de la famille. En répétant l'application de cette idée simple, on voit que toute famille finie Σ d'intervalles peut être «nettoyée» jusqu'au point où, dans la famille simplifiée Σ_s, aucun intervalle n'est contenu dans la réunion des autres intervalles de Σ_s; en particulier, au plus deux intervalles de Σ_s peuvent contenir un même point. Si α et β sont deux intervalles distincts dans Σ_s (nécessairement non vides), aucun des deux n'est contenu dans l'autre; il existe donc des points $x \in \alpha \setminus \beta$ et $y \in \beta \setminus \alpha$; si $x < y$, l'intervalle α contient des minorants de β, et β contient des majorants de α. Il est raisonnable de noter $\alpha \prec \beta$ dans ce cas, et de noter $\beta \prec \alpha$ si $y < x$. La famille Σ_s est totalement ordonnée par cette relation $\prec$.

Si on ordonne les segments de Σ_s de façon croissante, obtenant ainsi un classement $s_1, s_2, \ldots, s_N$ de Σ_s, on constate que les segments impairs $s_1, s_3, \ldots$ sont deux à deux disjoints: si s_1 rencontrait s_3, la configuration $s_1 \prec s_2 \prec s_3$ entraînerait que s_2 soit contenu dans la réunion de s_1 et s_3, ce qui est exclu. De même, les segments pairs $s_2, s_4, \ldots$ sont disjoints, et la famille Σ_s de tous ces segments, pairs et impairs, a la même réunion E que la famille finie initiale Σ. Il en résulte qu'ou bien les pairs, ou bien les impairs couvrent la moitié de la mesure de E. Contrairement à l'algorithme de Vitali, on ne peut pas dire avant d'avoir fini quels sont vraiment les segments qu'il faut utiliser. Cette idée sur le «nettoyage» d'une famille de segments, et son utilisation pour obtenir des théorèmes de dérivation, sont déjà chez Denjoy (1915), mais Radó semble ne pas le savoir: dans la Note p. 223, Denjoy discute les *systèmes stricts d'intervalles*, qui sont les systèmes où chaque intervalle possède un point qui n'appartient à aucun des autres.

Dans le cas d'une famille infinie d'intervalles (ou de segments), la valeur $1/2$ n'est pas nécessairement atteinte: la famille formée des segments $[-\varepsilon, 1 - 2\varepsilon]$ et de leurs symétriques $[-1 + 2\varepsilon, \varepsilon]$, où ε varie dans $(0, 1/2)$ recouvre $(-1, 1)$, mais aucune sous-famille disjointe ne couvre la moitié de cet intervalle de longueur 2: comme tous ces segments contiennent 0, une sous-famille disjointe contient un seul segment, et il est de longueur strictement inférieure à 1.

7.2.1 *Un autre aspect de la constante 3*

Intéressons-nous maintenant à la valeur de la meilleure constante dans le lemme d'Evans–Gariepy, c'est-à-dire la plus petite valeur C telle que de toute famille de segments, dont les longueurs sont bornées, on puisse extraire des segments disjoints $(s_n)_{n\geq 1}$ dont la réunion des dilatés $C * s_n$ contienne tous les segments de la famille donnée. Le lemme d'Evans et Gariepy donne $C = 5$, mais nous rappellerons plus bas comment Lebesgue explique que toute valeur $C > 3$ est acceptable. Pour une famille finie de segments, on a trouvé $C = 3$, et la constante 3 ne peut pas être remplacée par une valeur plus petite: considérer la famille constituée de $[-1, 0]$ et $[0, 1]$, dont les dilatés trois fois sont $[-2, 1]$ et $[-1, 2]$; chacun des dilatés contient la réunion $[-1, 1]$ de la famille initiale, mais aucune dilatation plus petite ne pourra le faire. Pour une famille infinie, la constante 3 ne peut pas en général être atteinte, comme le montre l'exemple de la famille Σ formée des segments $[-\varepsilon, 1-3\varepsilon]$ et de leurs symétriques $[-1+3\varepsilon, \varepsilon]$, où ε varie dans $(0, 1/3)$. Tous les segments de Σ contiennent 0, les sous-familles disjointes n'ont donc qu'un seul élément; si $s^* = [-\varepsilon^*, 1-3\varepsilon^*]$, avec $0 < \varepsilon^* < 1/3$, est l'unique élément extrait, le segment $3 * s^*$ est égal à $[-1+\varepsilon^*, 2-5\varepsilon^*]$: il ne peut pas contenir tous les segments $[-1+3\varepsilon, \varepsilon]$ de la famille (envisager le cas où $\varepsilon < \varepsilon^*/3$); le raisonnement serait le même si le segment extrait était $s^* = [-1+3\varepsilon^*, \varepsilon^*]$.

Beaucoup de versions du lemme de Vitali font apparaître la constante 5: il faut la voir comme étant égale à $1+2q$, où q est un nombre > 1. Et $q = 2$ est le plus simple des nombres > 1! Cette valeur $q = 2$ apparaît dans le classement de Lebesgue, qui a pour effet que deux éléments de la même classe $\mathcal{F}_n$ ont des longueurs dont les rapports sont entre $1/2$ et 2; cela entraîne que les dilatés de rapport $1+2q$ des segments disjoints sélectionnés contiennent les autres segments de la famille. Mais Lebesgue fait observer que s'il avait utilisé des classes définies par q^{-n} au lieu de 2^{-n}, $q > 1$ proche de 1, il aurait pu approcher la valeur 3 arbitrairement bien.

Ces constantes 3 ou 5 tirent leur importance de leur rôle dans le contrôle de la mesure des dilatés; leur valeur exacte importe peu pour le théorème de recouvrement, où il suffit d'avoir un contrôle uniforme de la mesure des dilatés. Dès lors, il est clair que le théorème de Vitali reste valable, avec la même preuve, pour les *mesures doublantes*: ce sont les mesures μ pour lesquelles existe une constante C telle que

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\,\mu(B(x, r))$$

pour toute boule $B(x, r)$ de l'espace considéré, de centre x et de rayon $r > 0$ (consulter Stein 1993, par exemple).

Le livre de Carathéodory (1918) fournit une méthode originale pour prouver le lemme préliminaire, mais cette méthode donne une plus mauvaise constante, égale à 6 dans le cas de la droite: c'est aussi la valeur qu'on avait trouvée par la méthode introduite par Lebesgue pour prouver le lemme préliminaire (voir la section 3.2). Exprimons d'abord une version linéaire du lemme établi par Carathéodory dans les sections §57–61 de son livre: *supposons donnée une famille $\mathcal{C}$ d'intervalles non nuls, contenus dans une partie bornée de la droite; si A désigne l'ensemble des centres de ces intervalles, il est possible d'extraire de la famille $\mathcal{C}$ une suite finie ou infinie (c_n) qui couvre A et dont les longueurs sont décroissantes.*

Examinons l'approche obtenue pour le lemme préliminaire: considérons une famille Σ de segments situés dans une partie bornée de $\mathbf{R}$. Pour chaque point x de la réunion $\widetilde{\Sigma}$ de Σ, choisissons un segment s_x de Σ qui contient x; désignons par c_x le plus petit segment centré en x qui contienne s_x. On a

$$x \in s_x \subset c_x, \quad |s_x| \leq |c_x| \leq 2|s_x|.$$

Carathéodory considère la famille $\mathcal{C}$ formée de tous les segments c_x; l'ensemble des centres de ces segments coïncide avec l'ensemble borné $\widetilde{\Sigma}$, et les longueurs des segments c_x sont bornées; par le résultat précédent, il peut extraire de $\mathcal{C}$ une suite (c_n) qui couvre l'ensemble $\widetilde{\Sigma}$ et dont les longueurs sont décroissantes. Par un argument presque identique à celui du cas fini (section 3.1), et qu'il est le premier à décrire, il peut sélectionner une sous-suite (c_{n_k}) de segments *disjoints* qui couvre au moins un tiers de la mesure de $\widetilde{\Sigma}$. Les segments correspondants (s_{n_k}) de Σ sont disjoints et couvrent au moins $1/6$ de la mesure de $\widetilde{\Sigma}$.

References

Aliprantis, Charalambos D., and Owen Burkinshaw. 1990. *Principles of real analysis* (2nd ed). San Diego: Academic Press.

Austin, Donald. 1965. A geometric proof of the Lebesgue differentiation theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society* 16: 220–221.

Banach, Stefan. 1924. Sur le théorème de M. Vitali. *Fund. Math.* 5: 130–136.

Besicovitch, Abram S. 1945. A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 41: 103–110.

Borel, Émile. 1898. *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris: Gauthier-Villars.

Botsko, Michael W. 2003. An elementary proof of Lebesgue's differentiation theorem. *American Mathematical Monthly* 110: 834–838.

Carathéodory, Constantin. 1918. *Vorlesungen über reelle Funktionen*. Leipzig: Teubner.

Denjoy, Arnaud. 1915. Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues. *J. Math. Pures et Appl.* 7: 105–240.

Evans, Lawrence C., and Ronald F. Gariepy. 1992. *Measure theory and fine properties of functions*. Boca Raton: CRC Press.

Hawkins, Thomas H. 1970. *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development*. Chelsea publishing company.

Hildebrandt, Theophil H. 1963. *Introduction to the theory of integration*. New York: Academic Press.

Leader, Solomon. 2001. *The Kurzweil-Henstock integral and its differentials*. New York: Marcel Dekker.

Lebesgue, Henri. 1904. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars.

Lebesgue, Henri. 1905. Sur les fonctions représentables analytiquement. *J. de Math. Pures et Appl.* 6: 139–216.

Lebesgue, Henri. 1910. Sur l'intégration des fonctions discontinues. *Ann. École Normale Supérieure* 27(3): 361–450.

Lusin, Nicolas N. 1917. Sur la classification de M. Baire. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 164: 91–94.

Lusin, Nicolas N. 1927. Sur les ensembles analytiques. *Fundamenta Math.* 10: 1–95.

Melas, Antonios D. 2003. The best constant for the centered Hardy–Littlewood maximal inequality. *Annals of Mathematics* 157: 647–688.

Michel, Alain. 1992. Constitution de la Théorie moderne de l'Integration. *Vrin*.

Natanson, Isidor P. 1955. *Teoriya funkciĭ veščestvennoĭ peremennoĭ.* Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscou-Leningrad, 1950. *Traductions: Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*. Berlin: Akademie-Verlag, 1954; *Theory of functions of a real variable*, vol. 1. New York: Frederick Ungar Publishing Co.

Radó, Tibor. 1928. Sur un problème relatif à un théorème de Vitali. *Fundamenta Math.* 11: 228–229.

Royden, Halsey L. 1988. *Real analysis*. 3^{e} édition. New-York: Macmillan.

Scheeffer, Ludwig. 1884–85. Zur Theorie der stetigen Funktionen einer reellen Veränderlichen b). *Acta Math.* 5: 279–296.

Sierpiński, Wacław. 1923. Démonstration élémentaire du théorème sur la densité des ensembles. *Fundamenta Math.* 4: 167–171.

Souslin, Mikhail Y. 1917. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* 164: 88–91.

Stein, Elias M. 1993. *Harmonic analysis*. Princeton Mathematical Series, 43. Princeton: Princeton University Press.

Vitali, Giuseppe. 1905. Sulle funzioni integrali. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* 40: 1021–1034.

Vitali, Giuseppe.1907–08. Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino* 43: 229–246.

Vitali, Giuseppe. 1984. *Opere sull'analisi reale e complessa*. Florence: Edizioni Cremonese.

Wheeden, Richard L., and Antoni Zygmund. 1977. *Measure and integral*. New York: Marcel Dekker.

Zajíček, Luděk. 2005. On σ-porous sets in abstract spaces. *Abstract and Applied Analysis* 2005(5): 509–534.