

Κεφάλαιο 7

L_2 -σύγκλιση σειρών Fourier

7.1 Χώροι Hilbert

7.1.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και χώροι Hilbert

Ορισμός 7.1.1. Έστω X γραμμικός χώρος πάνω από το \mathbb{K} . Μια συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ λέγεται *εσωτερικό γινόμενο* αν ικανοποιεί τα εξής:

- (α) $\langle x, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in X$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.
- (β) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, για κάθε $x, y \in X$.
- (γ) για κάθε $y \in X$ η συνάρτηση $x \mapsto \langle x, y \rangle$ είναι γραμμική.

Πρόταση 7.1.2 (ανισότητα Cauchy-Schwarz). Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x, y \in X$, τότε

$$(7.1.1) \quad |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Έστω $x, y \in X$ και έστω $M = |\langle x, y \rangle|$. Υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $\langle x, y \rangle = Me^{i\theta}$. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $\lambda = re^{it}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \overline{\lambda \langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= |\lambda|^2 \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \\ &= r^2 \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re}(rMe^{i(\theta+t)}) + \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε το t έτσι ώστε $e^{i(\theta+t)} = -1$. Τότε, έχουμε

$$(7.1.2) \quad r^2 \langle x, x \rangle - 2rM + \langle y, y \rangle \geq 0$$

για κάθε $r > 0$. Παίρνοντας $r = \sqrt{\langle y, y \rangle} / \sqrt{\langle x, x \rangle}$ έχουμε το ζητούμενο (η περίπτωση $x = 0$ ή $y = 0$ είναι προφανής).

Στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(7.1.3) \quad 0 \leq \langle tx + y, tx + y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle + 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς t πρέπει να είναι μικρότερη ή ίση από μηδέν. Άρα, $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$. Αυτό δίνει το ζητούμενο. \square

Ορίζουμε $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Η ανισότητα Cauchy-Schwarz μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα:

Πρόταση 7.1.3. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Η συνάρτηση $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, με $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ είναι νόρμα.

Απόδειξη. Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα (οι άλλες ιδιότητες είναι απλές). Όμως,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. \square

Παρατήρηση 7.1.4. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έπεται εύκολα ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι συνεχές ως προς την $\|\cdot\|$: Αν $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$ ως προς την $\|\cdot\|$, τότε

$$(7.1.4) \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle.$$

Για την απόδειξη γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| &= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle| \\ &\leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x_n - x, y \rangle| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\|. \end{aligned}$$

Η (x_n) συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, και $\|y_n - y\| \rightarrow 0$, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Άρα,

$$(7.1.5) \quad \langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle.$$

Ειδικότερα, για κάθε $y \in X$ η απεικόνιση $x \mapsto \langle x, y \rangle$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον X .

Ορισμός 7.1.5. Ένας χώρος Banach λέγεται *χώρος Hilbert* αν υπάρχει εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον X ώστε $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ για κάθε $x \in X$.

Στη συνέχεια συμβολίζουμε τους χώρους Hilbert με H . Κάθε χώρος Hilbert ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου: για κάθε $x, y \in H$,

$$(7.1.6) \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Αντίστροφα, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ ενός χώρου Banach X ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου, τότε προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο το οποίο ορίζεται από την

$$(7.1.7) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \{ \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \}$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, και από την

$$(7.1.8) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

στην περίπτωση $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

7.1.2 Καθετότητα

Ορισμός 7.1.6 (καθετότητα). Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Λέμε ότι τα $x, y \in X$ είναι *ορθογώνια* (ή *κάθετα*) και γράφουμε $x \perp y$, αν $\langle x, y \rangle = 0$. Αν $x \in X$ και M είναι ένα μη κενό υποσύνολο του X , λέμε ότι το x είναι *κάθετο* στο M και γράφουμε $x \perp M$ αν $x \perp y$ για κάθε $y \in M$.

Παρατηρήσεις 7.1.7. (α) Το 0 είναι κάθετο σε κάθε $x \in X$, και είναι το μοναδικό στοιχείο του X που έχει αυτήν την ιδιότητα.

(β) Αν $x \perp y$, ισχύει το *Πυθαγόρειο θεώρημα*: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Ορισμός 7.1.8. Έστω X ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω M γραμμικός υπόχωρος του X . Ορίζουμε

$$(7.1.9) \quad M^\perp = \{x \in X : \forall y \in M, \langle x, y \rangle = 0\}.$$

Ο M^\perp είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X

Πρόταση 7.1.9. Έστω H χώρος Hilbert, M κλειστός γραμμικός υπόχωρος του H , και $x \in H$. Υπάρχει μοναδικό $y_0 \in M$ ώστε

$$(7.1.10) \quad \|x - y_0\| = \text{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Το μοναδικό αυτό $y_0 \in M$ συμβολίζεται με $P_M(x)$, ονομάζεται *προβολή* του x στον M και ικανοποιεί την $x - P_M(x) \perp M$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\delta = \text{dist}(x, M)$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) στον M ώστε

$$(7.1.11) \quad \|x - y_n\| \rightarrow \delta.$$

Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(y_n - x) + (x - y_m)\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - \|(y_n + y_m) - 2x\|^2 \\ &= 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\|^2. \end{aligned}$$

Όμως, $\frac{y_n + y_m}{2} \in M$, άρα $\left\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\right\| \geq \delta$. Επομένως,

$$(7.1.12) \quad \|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4\delta^2 \rightarrow 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0$$

όταν $m, n \rightarrow \infty$. Άρα, η (y_n) είναι ακολουθία Cauchy στον H . Ο H είναι πλήρης, άρα υπάρχει $y_0 \in H$ ώστε $y_n \rightarrow y_0$. Έπεται ότι $y_0 \in M$ (ο M είναι κλειστός) και $\|x - y_0\| = \lim_n \|x - y_n\| = \delta$.

Για τη μοναδικότητα, χρησιμοποιούμε και πάλι τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αν $\|x - y\| = \delta = \|x - y'\|$, τότε

$$\begin{aligned} 0 \leq \|y - y'\|^2 &= 2\|x - y'\|^2 + 2\|x - y\|^2 - 4\left\|\frac{y + y'}{2} - x\right\|^2 \\ &\leq 2\delta^2 + 2\delta^2 - 4\delta^2 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $y = y'$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό θέτουμε $w = x - P_M(x)$. Έστω ότι το w δεν είναι κάθετο στον M . Τότε, υπάρχει $z \in M$ ώστε $\langle w, z \rangle > 0$. Για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό, έχουμε $2\langle w, z \rangle - \varepsilon\|z\|^2 > 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|x - (P_M(x) + \varepsilon z)\|^2 &= \|w - \varepsilon z\|^2 = \langle w - \varepsilon z, w - \varepsilon z \rangle \\ &= \|w\|^2 - 2\varepsilon\langle w, z \rangle + \varepsilon\|z\|^2 \\ &= \delta^2 - \varepsilon(2\langle w, z \rangle - \varepsilon\|z\|^2) < \delta^2, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί $P_M(x) + \varepsilon z \in M$. □

Πόρισμα 7.1.10. Αν H χώρος Hilbert και M κλειστός γνήσιος υπόχωρος του H , τότε υπάρχει $z \in H$, $z \neq 0$, ώστε $z \perp M$.

Απόδειξη. Έστω $x \in H \setminus M$. Παίρνουμε $z = x - P_M(x) \neq 0$. □

7.1.3 Ορθοκανονικές βάσεις

Ορισμός 7.1.11. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία $(e_k) \subseteq X$ λέγεται *ορθοκανονική*, αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ (1 αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$). Αν (e_k) είναι μια ορθοκανονική ακολουθία στον X , τότε το $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Πράγματι, αν $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k} = 0$, τότε για κάθε $j = 1, \dots, n$ έχουμε

$$(7.1.13) \quad 0 = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j.$$

Ορισμός 7.1.12. Έστω H χώρος Hilbert. Μία ορθοκανονική ακολουθία (e_k) λέγεται *ορθοκανονική βάση* του H αν

$$(7.1.14) \quad H = \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Πρόταση 7.1.13. Έστω H ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του H .

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{e_i : i \in I\}$ του H είναι αριθμήσιμο σύνολο: πράγματι, αν $e_i \neq e_j$ είναι στοιχεία μιας τέτοιας οικογένειας, τότε $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. Την ίδια στιγμή, αφού ο χώρος είναι διαχωρίσιμος δεν γίνεται να υπάρχουν υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του που να απέχουν ανά δύο απόσταση ίση με $\sqrt{2}$. Θεωρούμε λοιπόν μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ του H (η διάταξη των στοιχείων της βάσης είναι τυχούσα) η οποία να είναι μεγιστική, δηλαδή να μην περιέχεται γνήσια σε κάποια άλλη. Αυτό γίνεται με χρήση του λήμματος του Zorn. Τότε, ο υπόχωρος $\text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός στον H (αλλιώς, θα μπορούσαμε να βρούμε μοναδιαίο $z \perp e_k$ για κάθε k , και η (e_k) δεν θα ήταν μεγιστική). Άρα, η (e_k) είναι ορθοκανονική βάση του H . \square

Λήμμα 7.1.14. Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και έστω (e_n) ορθοκανονική ακολουθία στον X . Για κάθε $x \in H$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(7.1.15) \quad d(x, \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}) = \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ και $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k + \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\lambda_k - \langle x, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$ είναι κάθετο σε όλα τα e_k , άρα και στο $\sum_{k=1}^n (\langle x, e_k \rangle - \lambda_k) e_k$, οπότε εφαρμόσαμε το Πυθαγόρειο θεώρημα γι' αυτά τα δύο διανύσματα). Άρα,

$$(7.1.16) \quad \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 \geq \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2$$

και ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $\lambda_k = \langle x, e_k \rangle$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, δηλαδή αν $y = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$. \square

Σημείωση. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2. \end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει ισοδύναμους χαρακτηρισμούς του ότι η (e_n) είναι ορθοκανονική βάση.

Θεώρημα 7.1.15. Έστω (e_k) ορθοκανονική ακολουθία σε έναν χώρο Hilbert H . Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $H(e_k)$ είναι ορθοκανονική βάση του H .

(β) Αν $x \in H$ και $\langle x, e_k \rangle = 0$ για κάθε k , τότε $x = 0$.

(γ) Αν $x \in H$ και $s_n(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$, τότε $s_n(x) \rightarrow x$. Δηλαδή,

$$(7.1.17) \quad x = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k.$$

(δ) Ισχύει η ισότητα του Parseval: για κάθε $x \in H$,

$$(7.1.18) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Απόδειξη. (α) \implies (β) Έστω $x \in H$. Αφού ο $F = \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνός, υπάρχει ακολουθία $(y_n) \in F$ με $y_n \rightarrow x$. Από την υπόθεση έχουμε $x \perp y$ για κάθε $y \in F$. Τότε, $0 = \langle x, y_n \rangle \rightarrow \langle x, x \rangle$. Άρα, $\langle x, x \rangle = 0$, το οποίο σημαίνει ότι $x = 0$.

(β) \implies (γ) Παρατηρούμε πρώτα ότι $x - s_n(x) \perp s_n(x)$: πράγματι,

$$(7.1.19) \quad \langle x, s_n(x) \rangle = \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|s_n(x)\|^2 = \langle s_n(x), s_n(x) \rangle.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε

$$(7.1.20) \quad \|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \|s_n(x)\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Συνεπώς, $\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ για κάθε n , και αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ παίρνουμε την ανισότητα Bessel

$$(7.1.21) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ειδικότερα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2$ συγκλίνει, και από την

$$(7.1.22) \quad \|s_m(x) - s_n(x)\|^2 = \sum_{k=n+1}^m |\langle x, e_k \rangle|^2$$

η οποία ισχύει για κάθε $m > n$, έπεται ότι η $\{s_n(x)\}$ είναι ακολουθία Cauchy. Αφού ο H είναι πλήρης, υπάρχει $y \in H$ ώστε $s_n(x) \rightarrow y$. Από την σύγκλιση αυτή βλέπουμε ότι $\langle x - y, e_k \rangle = 0$ για κάθε k , και η υπόθεσή μας (το β)) εξασφαλίζει ότι

$$(7.1.23) \quad x = y = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

(γ) \implies (δ) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$ για κάθε n . Αφού $\|x - s_n(x)\| \rightarrow 0$, έπεται ότι

$$(7.1.24) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

(δ) \implies (α) Έστω $x \in H$. Ελέγξαμε ότι $\|x\|^2 = \|x - s_n(x)\|^2 + \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2$ για κάθε n . Αφού $\sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \rightarrow \|x\|^2$, έπεται ότι $\|x - s_n(x)\| \rightarrow 0$. Δηλαδή, $s_n(x) \rightarrow x$. Αφού κάθε $s_n(x) \in \text{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, έπεται ότι

$$(7.1.25) \quad H = \overline{\text{span}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Δηλαδή, η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H . □

7.2 Σύγκλιση στον $L_2(\mathbb{T})$

Εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου στην L_2 -σύγκλιση των σειρών Fourier. Το ερώτημα είναι αν για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$ ισχύει

$$(7.2.1) \quad \|s_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0 \text{ καθώς το } n \rightarrow \infty.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι χώρος Hilbert. Η $\|\cdot\|_2$ επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$(7.2.2) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Λήμμα 7.2.1. Η ακολουθία $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση στον $L^2(\mathbb{T})$.

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι

$$(7.2.3) \quad \langle e^{ikx}, e^{isx} \rangle = \delta_{k,s}$$

για κάθε $k, s \in \mathbb{Z}$, και από το Θεώρημα 6.3.10 έχουμε ότι αν $f \in L^2(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$. Ισοδύναμα, αν $\langle f, e^{ikx} \rangle = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ τότε $f = 0$. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 7.1.15. □

Άμεσο πόρισμα της γενικής θεωρίας των χώρων Hilbert είναι τώρα το εξής.

Θεώρημα 7.2.2. Έστω $f \in L_2(\mathbb{T})$. Τότε,

$$(7.2.4) \quad \|s_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0 \text{ καθώς το } n \rightarrow \infty$$

και

$$(7.2.5) \quad \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Παρατήρηση 7.2.3. Στην απόδειξη της $\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \|s_n(f)\|_2^2$ χρησιμοποιήθηκε μόνο το γεγονός ότι το $\{e^{ik\theta} : |k| \leq n\}$ είναι ορθοκανονικό. Με το ίδιο επιχείρημα μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι: αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ συναρτήσεων στον $L_2(\mathbb{T})$ και αν, για τυχόν n , θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n = \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e_k$, τότε

$$(7.2.6) \quad \|f\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |\langle f, e_k \rangle|^2.$$

Συνεπώς,

$$(7.2.7) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k \rangle|^2 \leq \|f\|_2^2,$$

για κάθε ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{R}$. Αυτή είναι η (γενική) **ανισότητα του Bessel**. Ισότητα στην ανισότητα του Bessel ισχύει για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$, ακριβώς όταν το E είναι ορθοκανονική βάση του $L_2(\mathbb{T})$, δηλαδή

$$(7.2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^n \langle f, e_k \rangle e_k \right\|_2 = 0$$

για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 7.2.4 (Riesz-Fisher). Ο $L_2(\mathbb{T})$ είναι ισομετρικά ισομορφος με τον $\ell_2(\mathbb{Z})$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $T : L_2(\mathbb{T}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z})$ με

$$(7.2.9) \quad T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος, γιατί

$$(7.2.10) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \|f\|_2^2 < +\infty$$

από την ταυτότητα του Parseval, άρα $T(f) \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Η γραμμικότητα του T ελέγχεται εύκολα.

Η ταυτότητα του Parseval δείχνει επιπλέον ότι

$$(7.2.11) \quad \|T(f)\|_{\ell_2(\mathbb{Z})} = \|f\|_2$$

για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$, άρα ο T είναι ισομετρία (ειδικότερα, είναι ένα προς ένα).

Δείχνουμε τέλος ότι ο T είναι επί: έστω $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{Z})$. Ορίζουμε $f_N(x) = \sum_{k=1}^N a_k e^{ikx}$. Τότε, αν $N > M$ έχουμε

$$(7.2.12) \quad \|f_N - f_M\|_2^2 = \sum_{k=M+1}^N a_k^2 \rightarrow 0$$

καθώς $N, M \rightarrow \infty$, και αυτό δείχνει ότι η (f_N) είναι ακολουθία Cauchy στον $L_2(\mathbb{T})$. Ο $L_2(\mathbb{T})$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $f \in L_2(\mathbb{T})$ ώστε $f_N \rightarrow f$. Αφού

$$(7.2.13) \quad \|f - f_N\|_1 \leq \|f - f_N\|_2 \rightarrow 0,$$

είναι εύκολο να δούμε (άσκηση του Κεφαλαίου 5) ότι

$$(7.2.14) \quad \widehat{f_N}(k) \rightarrow \widehat{f}(k)$$

(και μάλιστα ομοιόμορφα ως προς k). Όμως, για κάθε $N > |k|$ ισχύει $\widehat{f}(k) = a_k$, από τον ορισμό των f_N . Συνεπώς,

$$(7.2.15) \quad \widehat{f}(k) = a_k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $T(f) = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. □

Παρατήρηση 7.2.5. Άμεση συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το Λήμμα Riemann-Lebesgue για τον $L_2(\mathbb{T})$. Για κάθε $f \in L_2(\mathbb{T})$ έχουμε

$$(7.2.16) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 < +\infty,$$

άρα

$$(7.2.17) \quad \lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0.$$

Συχνά, χρησιμοποιούμε το Λήμμα Riemann-Lebesgue στην εξής μορφή: αν η $f \in L_2(\mathbb{T})$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$(7.2.18) \quad a_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos(kx) d\lambda(x) \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad b_k(f) = \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin(kx) d\lambda(x) \rightarrow 0$$

όταν $k \rightarrow \infty$. Από τις σχέσεις που συνδέουν τους $\widehat{f}(k)$, $a_k(f)$ και $b_k(f)$, ελέγχουμε εύκολα ότι η πρόταση « $a_k(f) \rightarrow 0$ και $b_k(f) \rightarrow 0$ όταν $k \rightarrow \infty$ » είναι ακριβώς ισοδύναμη με την « $\widehat{f}(k) \rightarrow 0$ όταν $|k| \rightarrow \infty$ » (εξηγήστε γιατί).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια γενίκευση της ταυτότητας του Parseval.

Πρόταση 7.2.6. Έστω $f, g \in L_2(\mathbb{T})$. Τότε,

$$(7.2.19) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι αν X είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το \mathbb{C} με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, τότε

$$(7.2.20) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2].$$

Έχουμε

$$(7.2.21) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{4} [\|f + g\|_2^2 - \|f - g\|_2^2 + i\|f + ig\|_2^2 - i\|f - ig\|_2^2]$$

και

$$(7.2.22) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{4} [\|\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)\|^2 - \|\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)\|^2 + i\|\widehat{f}(k) + i\widehat{g}(k)\|^2 - i\|\widehat{f}(k) - i\widehat{g}(k)\|^2].$$

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα, αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Parseval για τις $f + g$, $f - g$, $f + ig$ και $f - ig$. \square

7.3 Ασκήσεις

Ομάδα Α'

1. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π -περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

2. Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{i(\pi-x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k + \alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

3. Έστω $0 < a \leq \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a, a]}(x)$.

(α) Δείξτε ότι $\hat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\hat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_{\infty} = 0.$$

5. Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\hat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\hat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| < +\infty$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a \cos x + b \sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

7. (α) Έστω $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

Ομάδα Β'

8. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

9. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π -περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

11. Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π -περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Holder

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x)f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

13. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx.$$

14. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} [w_1(f, \pi/n)]^2 < \infty,$$

όπου

$$w_1(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)| dt.$$

Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$.

15. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f, x) - \sigma_n(f, x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leq \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο \mathbb{T} .

16. Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geq 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leq \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $\phi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$. Παρατηρήστε ότι $\hat{\phi}(k) = \frac{1}{k+1}$ και $\|\phi\|_{\infty} = \pi$.