Κεφάλαιο 6

Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

6.1 Οικογένειες καλών πυρήνων και προσεγγίσεων της μονάδας

Σε αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μέσες τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f οι οποίες προκύπτουν από την συνέλιξη της f

(6.1.1) $$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) K_\delta(y)\, d\lambda(y)$$

με μια οικογένεια (K_δ) συναρτήσεων οι οποίες ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες.

Ορισμός 6.1.1 (οικογένεια καλών πυρήνων)**.** Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ λέγεται **οικογένεια καλών πυρήνων**, ή πιο απλά **πυρήνας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

(6.1.2) $$\int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)\, d\lambda(y) = 1.$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$,

(6.1.3) $$\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \leqslant M.$$

(iii) Για κάθε $\eta > 0$,

(6.1.4) $$\lim_{\delta\to 0} \int_{|y|\geqslant \eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) = 0.$$

Η συνέλιξη $f * K_\delta$ μιας φραγμένης μετρήσιμης συνάρτησης f με μια οικογένεια καλών πυρήνων $(K_\delta)_{\delta>0}$ συγκλίνει στην f σε κάθε σημείο στο οποίο η f είναι συνεχήσ:

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι συνεχής, έχουμε*

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x). \tag{6.1.5}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|y| < \eta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) της (K_δ), γράφουμε

$$(f * K_\delta)(x) - f(x) = \int K_\delta(y) f(x-y)\, d\lambda(y) - f(x) = \int K_\delta(y)[f(x-y) - f(x)]\, d\lambda(y).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| &= \left| \int K_\delta(y)[f(x-y) - f(x)]\, d\lambda(y) \right| \\ &\leqslant \int_{|y|<\eta} |K_\delta(y)|\, |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \\ &\qquad + \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y). \end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι: αν $|y| < \eta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon$. Χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα (ii) της (K_δ), παίρνουμε

$$\int_{|y|<\eta} |K_\delta(y)|\, |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \leqslant M\varepsilon.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι η f είναι φραγμένη και την ιδιότητα (iii) της (K_δ) για το συγκεκριμένο η: έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) &\leqslant \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, (|f(x-y)| + |f(x)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant 2\|f\|_\infty \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \to 0 \end{aligned}$$

καθώς το $\delta \to 0$. Συνεπώς,

$$\limsup_{\delta\to 0} |(f * K_\delta)(x) - f(x)| \leqslant M\varepsilon, \tag{6.1.6}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $(f * K_\delta)(x) \to f(x)$ καθώς το $\delta \to 0$. $\square$

Ορισμός 6.1.3 (οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας)**.** Μια οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ λέγεται **οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας**, ή πιο απλά **προσέγγιση της μονάδας**, αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} K_\delta(y)\, d\lambda(y) = 1. \tag{6.1.7}$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$,

$$|K_\delta(y)| \leqslant \frac{M}{\delta} \tag{6.1.8}$$

και, για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$|K_\delta(y)| \leqslant \frac{M\delta}{y^2}. \tag{6.1.9}$$

Παρατηρήστε ότι η πρώτη ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από την δεύτερη όταν $|y| \leqslant \delta$. Τελείως αντίστοιχα, η δεύτερη ανισότητα στην (ii) είναι ισχυρότερη από την πρώτη όταν $|y| \geqslant \delta$.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι υποθέσεις του Ορισμού 6.1.3 είναι ισχυρότερες από αυτές του Ορισμού 6.1.1.

Πρόταση 6.1.4. *Κάθε οικογένεια $(K_\delta)_{\delta>0}$ προσεγγίσεων της μονάδας είναι οικογένεια καλών πυρήνων.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $R > 0$ ώστε: για κάθε $\delta > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \leqslant R. \tag{6.1.10}$$

Έστω $\delta > 0$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) &= \int_{|y|<\delta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) + \int_{|y|\geqslant\delta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\
&\leqslant \frac{M}{\delta} \int_{|y|<\delta} \mathbf{1}\, d\lambda(y) + M\delta \int_{|y|\geqslant\delta} \frac{d\lambda(y)}{y^2} \\
&= \frac{M}{\delta} \int_{|y|<\delta} \mathbf{1}\, d\lambda(y) + M\delta \cdot 2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{d\lambda(y)}{y^2} \\
&= \frac{M}{\delta} \cdot 2\delta + M\delta \cdot \frac{2}{\delta} \\
&= 4M.
\end{aligned}$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο με $R = 4M$.

Για την τρίτη ιδιότητα της οικογένειας καλών πυρήνων, σταθεροποιούμε $\eta > 0$ και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iii) των προσεγγίσεων της μονάδας, γράφουμε

$$\int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\,d\lambda(y) \leqslant M\delta \int_{|y|\geqslant\eta} \frac{d\lambda(y)}{|y|^2} = \frac{2M}{\eta}\delta \to 0 \tag{6.1.11}$$

καθώς το $\delta \to 0$. □

Παραδείγματα 6.1.5. (α) Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια μη αρνητική, φραγμένη συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$ και έχει ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,d\lambda(y) = 1. \tag{6.1.12}$$

Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε $K_\delta(y) = \delta^{-1}\varphi(\delta^{-1}y)$. Η $(K_\delta)_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

(β) Ο πυρήνας της θερμότητας $\mathcal{H}_t$ στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{H}_t(y) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-|y|^2/4t}. \tag{6.1.13}$$

Η οικογένεια $(\mathcal{H}_{\delta^2})_{\delta>0}$ είναι οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας.

Το επόμενο βασικό θεώρημα «επεκτείνει» το Θεώρημα 6.1.2.

Θεώρημα 6.1.6. *Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια προσεγγίσεων της μονάδας. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ ισχύει*

$$\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x) \tag{6.1.14}$$

σε κάθε σημείο Lebesgue x της f. Συνεπώς, $f * K_\delta \to f$ σχεδόν παντού καθώς το $\delta \to 0$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6 θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.1.7. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και έστω $f \in \mathrm{Leb}(f)$. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A}(r) = \frac{1}{r}\int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\,d\lambda(y), \qquad r > 0. \tag{6.1.15}$$

Τότε, η συνάρτηση $\mathcal{A}$ είναι φραγμένη, συνεχής, και

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{A}(r) = 0. \tag{6.1.16}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $r \mapsto r\mathcal{A}(r)$ είναι συνεχής σε κάθε $r > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματοσ: αφού $f \in L^1(\mathbb{R})$, αν θεωρήσουμε μια ακολουθία $r_k \to r^+$ τότε

$$\begin{aligned}0 \leqslant r_k\mathcal{A}(r_k) - r\mathcal{A}(r) &= \left| \int_{|y|\leqslant r_k} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) - \int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \right| \\ &= \int_{r<|y|\leqslant r_k} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $k \to \infty$, διότι η $y \mapsto |f(x-y) - f(x)|$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και $\lambda(\{y : r < |y| \leqslant r_k\}) \to 0$ όταν $k \to \infty$. Παρόμοιο επιχείρημα δείχνει τη συνέχεια από αριστερά.

Αφού $x \in \mathrm{Leb}(f)$ έχουμε

$$\lim_{\substack{\lambda(I)\to 0\\ x\in I}} \frac{1}{\ell(I)} \int_I |f(z) - f(x)|\, dz = 0. \tag{6.1.17}$$

Όμως,

$$\mathcal{A}(r) = \frac{2}{\ell(x-r, x+r)} \int_{x-r}^{x+r} |f(z) - f(x)|\, dz, \tag{6.1.18}$$

άρα είναι φανερό ότι $\mathcal{A}(r) \to 0$ καθώς το $r \to 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι συνεχής και $\lim_{r\to 0} \mathcal{A}(r) = 0$. Συνεπώς, υπάρχει $M_1 > 0$ ώστε $0 \leqslant \mathcal{A}(r) \leqslant M_1$ για κάθε $r \in [0, 1]$. Για $r > 1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(r) &= \frac{1}{r} \int_{|y|\leqslant r} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{1}{r} \int_{x-r}^{x+r} |f(z)|\, dz + \frac{1}{r} \int_{|y|\leqslant r} |f(x)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \int_{x-r}^{x+r} |f(z)|\, dz + \frac{1}{r}|f(x)|\, 2r \\ &\leqslant M_2 := \|f\|_1 + 2|f(x)|.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $0 \leqslant \mathcal{A}(r) \leqslant \max\{M_1, M_2\}$ για κάθε $r > 0$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε πρώτα $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \varepsilon. \tag{6.1.19}$$

Στη συνέχεια, για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,d\lambda(y) \\
&\leqslant \int_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,d\lambda(y) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k\delta<|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\,|K_\delta(y)|\,d\lambda(y) \\
&\leqslant \frac{M}{\delta} \int_{|y|\leqslant\delta} |f(x-y) - f(x)|\,d\lambda(y) \\
&\qquad + \sum_{k=0}^{\infty} M\delta \int_{2^k\delta<|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\,\frac{1}{|y|^2}d\lambda(y) \\
&\leqslant M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\delta}{(2^k\delta)^2} \int_{|y|\leqslant 2^{k+1}\delta} |f(x-y) - f(x)|\,d\lambda(y) \\
&= M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M\delta}{(2^k\delta)^2}(2^{k+1}\delta)\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \\
&= M\,\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2M}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \\
&\leqslant M_1\left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\right],
\end{aligned}$$

όπου $M_1 = 2M$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\|\mathcal{A}\|_\infty < \infty$ και το γεγονός ότι $\lim_{\delta\to 0}\mathcal{A}(\delta) = 0$. Υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ να έχουμε

$$\mathcal{A}(2^k\delta) < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad k = 0, 1, \dots, N. \tag{6.1.20}$$

Τότε, για κάθε $0 < \delta < \delta_0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant M_1\left[\mathcal{A}(\delta) + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta)\right] \\
&\leqslant M_1\left[\frac{\varepsilon}{3} + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^k}\right)\frac{\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right] \\
&\leqslant M_1\left[\frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} + \|\mathcal{A}\|_\infty\varepsilon\right] \\
&= M_1(1 + \|\mathcal{A}\|_\infty)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{\delta\to 0}(f * K_\delta)(x) = f(x)$. $\square$

Το τελευταίο θεώρημα αυτής της παραγράφου αναφέρεται στη σύγκλιση της $f * K_\delta$ στην f ως προς την $\|\cdot\|_1$.

Θεώρημα 6.1.8. *Έστω $(K_\delta)_{\delta>0}$ οικογένεια καλών πυρήνων. Για κάθε $f \in L^1(\mathbb{R})$ και για κάθε $\delta > 0$, η συνέλιξη*

(6.1.21)
$$(f * K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) K_\delta(y)\, d\lambda(y)$$

είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, και

(6.1.22)
$$\|(f * K_\delta) - f\|_1 \to 0 \;\; \text{καθώς το } \delta \to 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $\delta > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|(f * K_\delta) - f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |(f * K_\delta)(x) - f(x)|\, d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y) - f(x)|\, d\lambda(x) \right) |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \|f_{-y} - f\|_1\, |K_\delta(y)|\, d\lambda(y),
\end{aligned}$$

όπου $f_{-y}(x) = f(x-y)$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

(6.1.23)
$$\lim_{y\to 0} \|f_{-y} - f\|_1 = 0$$

(βλέπε Κεφάλαιο 4). Δηλαδή, υπάρχει $\eta > 0$ ώστε

(6.1.24)
$$|y| < \eta \Longrightarrow \|f_{-y} - f\|_1 < \varepsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας και την $\|f_{-y} - f\|_1 \leqslant \|f_{-y}\|_1 + \|f\|_1 = 2\|f\|_1$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|(f * K_\delta) - f\|_1 &\leqslant \int_{|y|<\eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) + \int_{|y|\geqslant\eta} \|f_{-y} - f\|_1 |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) + 2\|f\|_1 \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) \\
&\leqslant M\varepsilon + 2\|f\|_1 \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y),
\end{aligned}$$

όπου $M := \sup \|K_\delta\|_1 < \infty$ (αφού η (K_δ) είναι πυρήνας). Αφήνοντας το $\delta \to 0$ και χρησιμοποιώντας την

(6.1.25)
$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|y|\geqslant\eta} |K_\delta(y)|\, d\lambda(y) = 0,$$

παίρνουμε

$$\limsup_{\delta\to 0} \|(f * K_\delta) - f\|_1 \leqslant M\varepsilon, \tag{6.1.26}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\|(f*K_\delta)-f\|_1 \to 0$ καθώς το $\delta \to 0$. □

6.2 Cesáro αθροισιμότητα

Ορισμός 6.2.1. Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Λέμε ότι η $\{c_k\}$ συγκλίνει **κατά Cesáro** στον $\ell \in \mathbb{C}$ αν η ακολουθία

$$C_k := \frac{c_1 + \cdots + c_k}{k} \to \ell \tag{6.2.1}$$

καθώς το $k \to \infty$.

Πρόταση 6.2.2. *Αν* $\lim_{k\to\infty} c_k = \ell$ *τότε η* $\{c_k\}$ *συγκλίνει κατά Cesàro στον* ℓ.

Απόδειξη. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $c_k \to 0$ και δείχνουμε ότι $C_k \to 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $k_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_1$ ισχύει $|c_k| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $k > k_1$ έχουμε

$$|C_k| \leqslant \frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} + \frac{k-k_1}{k}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2.2}$$

Ο $A := |c_1 + \cdots + c_{k_1}|$ εξαρτάται από το ε. Επιλέγουμε $k_2(A) = k_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant k_2$,

$$\frac{|c_1 + \cdots + c_{k_1}|}{k} = \frac{A}{k} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2.3}$$

Αν θέσουμε $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ τότε, για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$|C_k| \leqslant \frac{A}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{6.2.4}$$

Άρα, $C_k \to 0$.

Για τη γενική περίπτωση εφαρμόζουμε το προηγούμενο στην ακολουθία $c_k' := c_k - \ell$. □

Παρατήρηση 6.2.3. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η ακολουθία $c_k = 1 + (-1)^k$ αποκλίνει, αλλά συγκλίνει κατά Cesàro στο 1.

Ορισμός 6.2.4. Έστω $\{c_k\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ορίζουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \quad \text{και} \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k. \tag{6.2.5}$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει **κατά Cesáro** στον $s \in \mathbb{C}$ αν

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s. \tag{6.2.6}$$

Παρατήρηση 6.2.5. Από την Πρόταση 6.2.2 έπεται ότι: αν $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ τότε $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον s.

Από την άλλη πλευρά, αν $z \neq 1$, $|z| = 1$, και αν ορίσουμε $c_k = z^k$, $k \geqslant 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ αποκλίνει διότι $c_k \not\to 0$, όμως

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{k} z^k = \frac{1}{1-z}. \tag{6.2.7}$$

Δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ συγκλίνει κατά Cesàro στον $\frac{1}{1-z}$.

6.3 Ο πυρήνας του Fejér

Ορισμός 6.3.1 (Cesàro μέσοι)**.** Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f ορίστηκε ως εξής:

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx}. \tag{6.3.1}$$

Ο n-οστός Cesàro μέσος της σειράς Fourier της f ορίζεται από την

$$\sigma_n(f,x) = \frac{s_0(f,x) + s_1(f,x) + \cdots + s_{n-1}(f,x)}{n}, \qquad n \geqslant 1. \tag{6.3.2}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την $\sigma_n(f,t)$ σε κλειστή μορφή, γράφοντας

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,x) &= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} s_m(f,x) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=-m}^{m} \widehat{f}(k) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(\sum_{m=|k|}^{n-1} \mathbf{1} \right) \widehat{f}(k) e^{ikx} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n-|k|) \widehat{f}(k) e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) \widehat{f}(k) e^{ikx}.
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$s_m(f,x) = (f * D_m)(x) \tag{6.3.3}$$

όπου D_m είναι ο m-οστός πυρήνας του Dirichlet, μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(f * D_m)(x) = \left(f * \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}{n}\right)(x). \tag{6.3.4}$$

Ορισμός 6.3.2 (πυρήνας Fejér)**.** Ο n-οστός πυρήνας του Fejér είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} D_m(x). \tag{6.3.5}$$

Παρατηρήστε ότι

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikx} = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}. \tag{6.3.6}$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε τον F_n σε κλειστή μορφή, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$D_m(x) = \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{6.3.7}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\sum_{m=0}^{n-1} 2\sin\frac{x}{2}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x \\
&= \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\sum_{m=0}^{n-1}[\cos(mx) - \cos(m+1)x] = \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}[1-\cos(nx)] \\
&= \frac{1}{2n\sin^2(x/2)}\cdot 2\sin^2(nx/2) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε το εξής:

Λήμμα 6.3.3. *Για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$,*

$$F_n(x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{ikx} \tag{6.3.8}$$

και

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2. \tag{6.3.9}$$

Παρατηρήσεις 6.3.4. Από το Λήμμα 6.3.3 είναι φανερό ότι ο πυρήνας του Fejér F_n είναι μη αρνητική άρτια συνάρτηση. Λόγω της $F_n(-x) = F_n(x)$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(x)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} F_n(x)\,d\lambda(x) = 1. \tag{6.3.10}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant F_n(x) &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|D_m(x)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(2m+1) \\ &= \frac{1}{n}\cdot [n(n-1)+n] = n. \end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $0 < |x| < \pi$ έχουμε

$$0 \leqslant F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{(x/\pi)^2} = \frac{\pi^2}{nx^2}. \tag{6.3.11}$$

Για τους Cesàro μέσους $\sigma_n(f,x)$ θα χρησιμοποιούμε συχνά την αναπαράσταση

(6.3.12)
$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x-t)F_n(t)\,d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\right) F_n(t)\,d\lambda(t)$$

ή την

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x+t)+f(x-t)\right) F_n(t)\,d\lambda(t). \tag{6.3.13}$$

Οι σχέσεις αυτές προκύπτουν άμεσα από το γεγονός ότι η F_n είναι άρτια συνάρτηση (με απλές αλλαγές μεταβλητής).

Θεώρημα 6.3.5 (Fejér). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και έστω $x \in \mathbb{T}$. Αν τα πλευρικά όρια $f(x+0)$ και $f(x-0)$ υπάρχουν, τότε*

$$\sigma_n(f,x) \to \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \tag{6.3.14}$$

καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I \subset \mathbb{T}$, τότε $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ ομοιόμορφα στο I.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \sigma_n(f,x) - f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right) F_n(t)d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right) F_n(t)d\lambda(t). \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f(x+t) - f(x+0)| < \varepsilon$ και $|f(x-t) - f(x-0)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in (0, \delta)$. Άρα,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right) F_n(t) d\lambda(t)\right| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \left(\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2} + \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2}\right) F_n(t) d\lambda(t) \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \varepsilon\, F_n(t)\, d\lambda(t) \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Στο (δ, π) έχουμε

$$F_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{n\delta^2}. \tag{6.3.15}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \left(\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{2}\right) F_n(t) d\lambda(t)\right| \\
&\qquad \leqslant \frac{\pi^2}{n\delta^2}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \left(\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{2} + \frac{|f(x-t)-f(x-0)|}{2}\right) d\lambda(t) \\
&\qquad \leqslant \frac{M(f)}{n\delta^2} \to 0
\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Άρα,

$$\limsup_{n\to\infty} |\sigma_n(f,x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \tag{6.3.16}$$

και έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος $I \subset \mathbb{T}$, από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο I βλέπουμε ότι η επιλογή του δ στο παραπάνω επιχείρημα είναι ανεξάρτητη από το $x \in I$ (εξαρτάται μόνο από το ε), άρα $\sigma_n(f,x) \to f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ ομοιόμορφα στο I. □

Ένα πόρισμα του Θεωρήματος 6.3.5 είναι η πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$ και στον $(L^1(\mathbb{T}), \|\cdot\|_1)$ που είχε χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του λήμματος Riemann-Lebesgue.

Θεώρημα 6.3.6. *Για κάθε $g \in C(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε*

$$\|g - q_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon. \tag{6.3.17}$$

Επίσης, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$, για κάθε $f \in L_p(\mathbb{T})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε

$$\|f - q_\varepsilon\|_p < \varepsilon. \tag{6.3.18}$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι η $\sigma_n(g) = g * F_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, ως συνέλιξη μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης με το τριγωνομετρικό πολυώνυμο F_n. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $\sigma_n(g) \to g$ ομοιόμορφα, διότι η g είναι συνεχής. Δηλαδή, $\|g - \sigma_n(g)\|_\infty \to 0$. Για το τυχόν λοιπόν $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\|g - \sigma_n(g)\|_\infty < \varepsilon \tag{6.3.19}$$

αν το n είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό.

Για τον δεύτερο, έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $g \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο q_ε ώστε $\|g - q_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon/2$. Αφού

$$\|g - q_\varepsilon\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(x) - q_\varepsilon(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \leqslant \|g - q_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon/2, \tag{6.3.20}$$

ο ισχυρισμός έπεται από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$. □

Παρατήρηση 6.3.7. Για κάθε n ορίζουμε $\delta_n = \frac{1}{n}$ και $K_{\delta_n} = F_n$. Η οικογένεια $\{K_{\delta_n}\}$ είναι προσέγγιση της μονάδας (στο $\mathbb{T}$). Πράγματι, για κάθε n ισχύει

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_{\delta_n}(t)d\lambda(t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} F_n(t)d\lambda(t) = 1. \tag{6.3.21}$$

Επίσης,

$$|K_{\delta_n}(t)| = F_n(t) \leqslant n = \frac{1}{\delta_n} \tag{6.3.22}$$

και, για κάθε $0 < |t| < \pi$, έχουμε

$$|K_{\delta_n}(t)| = F_n(t) \leqslant \frac{\pi^2}{nt^2} = \frac{\pi^2\delta_n}{t^2}. \tag{6.3.23}$$

Από τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.1 (ή μια απλή παραλλαγή της απόδειξής τους) έχουμε το εξής θεώρημα που «συμπληρώνει» το Θεώρημα 6.3.5:

Θεώρημα 6.3.8. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(f)$ ισχύει $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα, $\sigma_n(f,x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.* □

Το επόμενο θεώρημα αναφέρεται στην L_p-σύγκλιση των Cesàro μέσων $\sigma_n(f)$ στην f.

Θεώρημα 6.3.9. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Για κάθε $f \in L_(\mathbb{T})$ ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - f\|_p = 0. \tag{6.3.24}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|\sigma_n(f) - f\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f,x) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x)) F_n(t)\, d\lambda(t) \right|^p dx \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Υπάρχει $h \in L_q(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, τέτοια ώστε $\|h\|_q = 1$ και

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x)) F_n(t)\, d\lambda(t) \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (f(x+t) - f(x)) F_n(t)\, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} h(x)(f(x+t) - f(x))\, d\lambda(x) \right) F_n(t)\, d\lambda(t) \\ &\qquad \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|h\|_q \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p\, d\lambda(x) \right)^{1/p} F_n(t)\, d\lambda(t) \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(x)|^p\, d\lambda(x) \right)^{1/p} F_n(t)\, d\lambda(t)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Fubini και την ανισότητα Holder. Αν θέσουμε $f_t(x) = f(x+t)$, συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p F_n(t)\, d\lambda(t). \tag{6.3.25}$$

Ορίζουμε $A(t) = \|f_t - f\|_p$. Γνωρίζουμε ότι η A είναι συνεχής στο 0, άρα

$$\sigma_n(A, 0) \to A(0) = 0 \ \text{ καθώς το } n \to \infty. \tag{6.3.26}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\sigma_n(A,0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} A(t) F_n(-t)\, d\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} A(t) F_n(t)\, d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t - f\|_p F_n(t)\, d\lambda(t),\end{aligned}$$

άρα

$$\|\sigma_n(f) - f\|_p \leqslant \sigma_n(A, 0) \tag{6.3.27}$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 6.3.9 έχει ως συνέπεια το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 6.3.6. Δείχνει επίσης ότι η απεικόνιση $f \mapsto \{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι 1-1.

Θεώρημα 6.3.10 (μοναδικότητα)**.** *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Αν $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.*

Απόδειξη. Αφού $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε k, έχουμε

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ikx} = 0 \tag{6.3.28}$$

για κάθε n, δηλαδή $\sigma_n(f) \equiv 0$. Από το Θεώρημα 6.3.9 βλέπουμε ότι

$$\|f\|_p = \|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0. \tag{6.3.29}$$

Άρα, $\|f\|_p = 0$ και αυτό δείχνει ότι $f \equiv 0$. □

6.4 Χαρακτηρισμός των τριγωνομετρικών σειρών που είναι σειρές Fourier

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε αν υπάρχουν κάποια απλά κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν να δούμε αν κάποια τριγωνομετρική σειρά είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_p(\mathbb{T})$. Θεωρούμε λοιπόν μια τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt} \tag{6.4.1}$$

και τους Cesàro μέσους

$$\sigma_n(t) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k e^{ikt}. \tag{6.4.2}$$

της σειράς (6.4.1).

Θεώρημα 6.4.1. *Η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης $f \in C(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία συναρτήσεων $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{f}(k) = c_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε,

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(f,x). \tag{6.4.3}$$

Από το Θεώρημα 6.3.5 συμπεραίνουμε ότι $\sigma_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{T}$.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\{\sigma_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση f στο $\mathbb{T}$. Η f είναι συνεχής ως ομοιόμορφο όριο τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $n > |k|$ τότε

$$\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x). \tag{6.4.4}$$

Καθώς το $n \to \infty$ έχουμε

$$\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) c_k \to c_k \tag{6.4.5}$$

και, αφού $\sigma_n \to f$ ομοιόμορφα,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \sigma_n(x) e^{-ikx} d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \widehat{f}(k). \tag{6.4.6}$$

Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε k, δηλαδή η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier της f. $\square$

Στη συνέχεια μελετάμε την περίπτωση $1 < p < \infty$.

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω $1 < p < \infty$. Η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f \in L_p(\mathbb{T})$ αν και μόνο αν η ακολουθία $\{\sigma_n\}$ των Cesàro μέσων της είναι φραγμένη στον $L_p(\mathbb{T})$. Δηλαδή, αν υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|\sigma_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}
\|\sigma_n(f)\|_p &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |\sigma_n(f,x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left|\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x+t) F_n(t)\, d\lambda(t)\right|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t)|^p \, d\lambda(x)\right)^{1/p} F_n(t)\, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \|f_t\|_p F_n(t)\, d\lambda(t),
\end{aligned}$$

όπου $f_t(x) = f(x+t)$, χρησιμοποιώντας τον δυϊσμό όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.9. Αφού $\|f_t\|_p = \|f\|_p$ για κάθε $t \in \mathbb{T}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|\sigma_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} F_n(t)\, d\lambda(t) = \|f\|_p \tag{6.4.7}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $1 < p < \infty$ και $\{f_n\}$ είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $L_p(\mathbb{T})$ τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L^p(\mathbb{T})$: αυτό σημαίνει ότι

(6.4.8) $$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f_{k_n}(x)h(x)\,d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)h(x)\,d\lambda(x)$$

για κάθε $h \in L_q(\mathbb{T})$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Μια άμεση απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έχουμε αν σκεφτούμε ότι η μοναδιαία μπάλα B_p του $L_p(\mathbb{T})$ είναι ασθενώς συμπαγής (διότι ο L_p είναι αυτοπαθής χώρος, άρα ισοδύναμα μιλάμε για τη μοναδιαία μπάλα του $(L_q(\mathbb{T}))^*$ με την w^*-τοπολογία). Επίσης, η ασθενής τοπολογία στην B_p είναι μετρικοποιήσιμη διότι αναφερόμαστε σε διαχωρίσιμους χώρους. Εφαρμόζουμε λοιπόν αυτό το αποτέλεσμα για την $\{f_n\}$ η οποία περιέχεται σε κάποιο πολλαπλάσιο της B_p.

Υποθέτουμε ότι η $\{\sigma_n(f)\}$ είναι φραγμένη στον $L_p(\mathbb{T})$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $\{\sigma_{k_n}(f)\}$ της $\{\sigma_n(f)\}$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποια $g \in L_p(\mathbb{T})$: για κάθε $h \in L_q(\mathbb{T})$,

(6.4.9) $$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,x)h(x)\,d\lambda(x) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(x)h(x)\,d\lambda(x).$$

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, παρατηρούμε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αν θεωρήσουμε $k_n > |m|$ τότε

(6.4.10) $$\left(1 - \frac{|m|}{k_n}\right) c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,t)e^{-imt}d\lambda(t).$$

Καθώς το $n \to \infty$ έχουμε

(6.4.11) $$\left(1 - \frac{|m|}{k_n + 1}\right) c_m \to c_m$$

και, αφού η $t \mapsto e^{-imt}$ ανήκει στον $L_q(\mathbb{T})$,

(6.4.12) $$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \sigma_{k_n}(f,t)e^{-imt}d\lambda(t) \to \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(t)e^{-imt}d\lambda(t) = \widehat{g}(m).$$

Έπεται ότι $c_m = \widehat{g}(m)$ για κάθε m, δηλαδή η (6.4.1) είναι η σειρά Fourier της g. □

6.5 Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Μια σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ λέγεται *Abel αθροίσιμη* στον $s \in \mathbb{C}$ αν για κάθε $0 \leqslant r < 1$ η σειρά

(6.5.1) $$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k$$

συγκλίνει, και

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = s. \tag{6.5.2}$$

Οι ποσότητες $A(r)$ λέγονται *Abel μέσοι* της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Αποδεικνύεται ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s. Το παράδειγμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) = 1-2+3-4+5-\cdots \tag{6.5.3}$$

δείχνει ότι μια σειρά μπορεί να είναι Abel αθροίσιμη χωρίς να είναι Cesàro αθροίσιμη. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = \frac{1}{(1+r)^2} \tag{6.5.4}$$

για κάθε $0 \leqslant r < 1$, συνεπώς

$$\lim_{r\to 1^-} A(r) = \frac{1}{4}. \tag{6.5.5}$$

Όμως, η σειρά αυτή δεν είναι Cesàro αθροίσιμη: θα έπρεπε να ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n/n) = 0$. Για αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε στο Παράρτημα και τις σχετικές ασκήσεις.

Ορισμός 6.5.1 (πυρήνας του Poisson)**.** Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ θεωρούμε τη συνάρτηση $P_r : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της

$$P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikx}. \tag{6.5.6}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass βλέπουμε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως για κάθε x και ομοιόμορφα σαν σειρά συναρτήσεων στο $[-\pi,\pi]$. Η συνάρτηση P_r λέγεται *r-πυρήνας του Poisson*. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (6.5.6) έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\widehat{P_r}(k) = r^{|k|}, \qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{6.5.7}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο πυρήνας P_r παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμέσ: δίνεται μάλιστα από την

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}. \tag{6.5.8}$$

Για την απόδειξη της τελευταίας ισότητας θέτουμε $\omega = re^{ix}$. Τότε,

$$\begin{aligned} P_r(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k (e^{ix})^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} r^{-k}(e^{-ix})^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (re^{ix})^k + \sum_{s=1}^{\infty} (re^{-ix})^s \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k + \sum_{s=1}^{\infty} \overline{\omega}^s = \frac{1}{1-\omega} + \frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}} = \frac{1-\overline{\omega}+(1-\omega)\overline{\omega}}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})} \\ &= \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $|\omega| = r$ και $1-\omega = 1-re^{ix} = (1-r\cos x) - ir\sin x$, καταλήγουμε στην

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{(1-r\cos x)^2 + r^2\sin^2 x} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}. \tag{6.5.9}$$

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\{P_r\}_{0\leqslant r\leqslant 1}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων. Δεδομένου ότι το σύνολο δεικτών είναι τώρα το διάστημα $[0,1)$, αυτό που χρειάζεται να τροποποιήσουμε είναι η τρίτη συνθήκη του ορισμού. Ουσιαστικά ζητάμε το εξής: για κάθε ακολουθία $\{r_n\}$ στο $[0,1)$ με $r_n \to 1^-$, ζητάμε η ακολουθία $\{P_{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Η δεύτερη συνθήκη του ορισμού είναι άμεση συνέπεια της πρώτης συνθήκης, διότι οι P_r παίρνουν μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Αποδεικνύουμε λοιπόν την εξής πρόταση.

Πρόταση 6.5.2. *Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ έχουμε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,d\lambda(x) = 1, \tag{6.5.10}$$

και για κάθε $0 < \delta < \pi$ ισχύει ότι

$$\lim_{r\to 1^-} \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} P_r(x)\,d\lambda(x) = 0. \tag{6.5.11}$$

Απόδειξη. Έστω $0 \leqslant r < 1$. Αφού η σειρά συναρτήσεων $P_r(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{r^{|k|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}d\lambda(x) = \frac{r^0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^0 d\lambda(x) = 1, \tag{6.5.12}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}d\lambda(x) = 0$ αν $k \neq 0$. Έστω τώρα $0 < \delta < \pi$ και έστω $1/2 \leqslant r < 1$. Έχουμε

(6.5.13)

$$1-2r\cos x + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos x) \geqslant (1-r)^2 + 2r(1-\cos\delta) \geqslant c_\delta = 1-\cos\delta > 0$$

για κάθε $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$ (διότι $\cos x \leqslant \cos\delta$). Συνεπώς,

$$0 \leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} P_r(x)\,d\lambda(x) \leqslant \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} \frac{1-r^2}{c_\delta}\,d\lambda(x) \leqslant \frac{2\pi}{c_\delta}(1-r^2) \to 0 \tag{6.5.14}$$

όταν $r \to 1^-$. Έπεται το συμπέρασμα της πρότασης. □

Ορισμός 6.5.3 (Abel μέσοι της f)**.** Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ ορίζουμε τον r-*Abel μέσο* της f μέσω της

$$A_r(f)(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ikx}. \tag{6.5.15}$$

Αφού η ακολουθία $\{|\widehat{f}(k)|\}$ είναι φραγμένη, το κριτήριο του Weierstrass δείχνει ότι η σειρά συναρτήσεων στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$. Παρατηρήστε ότι $A_r(f)(x)$ είναι ο r-Abel μέσος της σειράς Fourier $S(f)$ της f.

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς (6.5.15), μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
A_r(f)(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y)\right)e^{ikx} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{-ik(y-x)}\right)d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)P_r(x-y)\,d\lambda(y) \\
&= (f * P_r)(x).
\end{aligned}$$

Αφού η $\{P_r\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων, παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 6.5.4. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Τότε, η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στην f σε κάθε σημείο συνέχειας της f: αν η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{T}$, τότε*

$$A_r(f)(x) \to f(x). \tag{6.5.16}$$

Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{T}$, τότε η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι ομοιόμορφα Abel αθροίσιμη στην f: δηλαδή,

$$A_r(f) \xrightarrow{o\mu} f. \tag{6.5.17}$$

6.6 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n = c_1 + \cdots + c_n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

2. Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

3. Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{\delta\to 0}\|K_\delta\|_p = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\delta(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} = +\infty.$$

4. Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x\in\mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-} (f*P_r)(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(x)\,d\lambda(x).$$

7. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\,d\lambda(t) = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f*Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x) = F_n(x)\sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T\in\mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x) = -2n(T*G_n)(x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leqslant 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ για κάθε $T\in\mathcal{T}_n$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

10. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L_1(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον πυρήνα του Fejér F_n, $n \in \mathbb{N}$.

11. Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$s_n(f,x) = \sigma_{n+1}(f,x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

12. Έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

13. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L_1(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

14. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

Ομάδα Β′

15. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Υπολογίστε αρχικά τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$. Κατόπιν, δείξτε ότι η f προσεγγίζεται (ως προς την $\|\cdot\|_1$) από κλιμακωτές συναρτήσεις της μορφής

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$.

16. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant A|x|^\alpha, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant \frac{\pi + 1}{1 - \alpha}\,\frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant 2\pi A\,\frac{\ln(n+1)}{n}.$$

17. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητεσ: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ και θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\, F_n(x).$$

18. (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

19. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και $b_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Δείξτε ότι

$$|s_n(f)(x)| \leq 5M$$

για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.