Κεφάλαιο 4

Χώροι L_p

4.1 Χώροι L_p

Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{L}_p(E)$ όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, \infty]$ για τις οποίες

$$\int_E |f|^p d\lambda < \infty. \tag{4.1.1}$$

Παρατηρήστε ότι αν $f \in \mathcal{L}_p(E)$ τότε $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού στο E. Ορίζουμε σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}_p(E)$ θέτοντας $f \sim g$ αν $f = g$ λ-σχεδόν παντού. Το σύνολο $L_p(E)$ των κλάσεων ισοδυναμίας $[f]$, $f \in \mathcal{L}_p(E)$ γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις τις

$$[f] + [g] = [f + g] \;\text{ και }\; a[f] = [af]. \tag{4.1.2}$$

Θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο f για την κλάση $[f]$, εννοώντας ότι η $[f] \in L_p(E)$ αντιπροσωπεύεται από οποιαδήποτε συνάρτηση στοιχείο της. Αν λοιπόν $f \in L_p(E)$, ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^{1/p}. \tag{4.1.3}$$

Η ταύτιση συναρτήσεων που συμπίπτουν σχεδόν παντού γίνεται για να ικανοποιείται η $\|f\|_p = 0 \implies f = 0$. Πράγματι, αν $\int_E |f|^p d\lambda = 0$ τότε $f = 0$ σχεδόν παντού, δηλαδή $[f] = [0]$.

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα. Παρατηρούμε αρχικά ότι ο $L_p(E)$ είναι γραμμικός χώροσ: Πράγματι, έστω $f, g \in L_p(E)$. Τότε, για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x)|^p &\leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant \big(2\max\{|f(x)|, |g(x)|\}\big)^p \\ &= 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p),\end{aligned}$$

άρα

$$\int_E |f+g|^p \, d\lambda \leqslant 2^p \left(\int_E |f|^p \, d\lambda + \int_E |g|^p \, d\lambda \right) < \infty, \tag{4.1.4}$$

δηλαδή $f+g \in L_p(E)$.

Πρόταση 4.1.1. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Ο χώρος $(L_p(E), \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Προφανώς, $\|f\|_p \geqslant 0$ για κάθε $f \in L_p(E)$, και είδαμε ότι αν $\|f\|_p = 0$ τότε $f = 0$. Είναι επίσης άμεσο ότι αν $f \in L_p(E)$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε

$$\|af\|_p = |a| \|f\|_p.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα. Αυτή προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Minkowski, την οποία δείχνουμε παρακάτω. □

Λήμμα 4.1.2 (ανισότητα Young)**.** *Αν $x, y \geqslant 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{4.1.5}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a_1, \ldots, a_m > 0$ και $t_j \in (0,1)$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^m t_j \ln a_j \leqslant \ln(t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m), \tag{4.1.6}$$

από την ανισότητα Jensen. Έπεται ότι

$$a_1^{t_1} a_2^{t_2} \cdots a_m^{t_m} \leqslant t_1 a_1 + \cdots + t_m a_m \tag{4.1.7}$$

με ισότητα μόνο αν $a_1 = \cdots = a_m$. Η ανισότητα αυτή γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Αν $t_1 = \cdots = t_m = 1/m$, παίρνουμε

$$\sqrt[m]{a_1 \cdots a_m} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m}. \tag{4.1.8}$$

Ειδική περίπτωση της (4.1.7) είναι η

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b. \tag{4.1.9}$$

Εφαρμόζουμε την ανισότητα (4.1.9) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, επιλέγοντας $t = \frac{1}{p}$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{4.1.10}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

Ορισμός 4.1.3 (συζυγείς εκθέτες)**.** Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

Πρόταση 4.1.4 (ανισότητα Holder)**.** *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $f \in L_p(E)$ και $g \in L_q(E)$, όπου $p, q > 1$ συζυγείς εκθέτες. Τότε, $fg \in L_1(E)$ και*

$$\int_E |fg|\, d\lambda \leqslant \left(\int_E |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int_E |g|^q\, d\lambda\right)^{1/q}, \tag{4.1.11}$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.1.12}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p\, d\lambda = 1 \ \text{ και } \ \|g\|_q^q = \int_E |g|^q\, d\lambda = 1. \tag{4.1.13}$$

Από την ανισότητα του Young, για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q. \tag{4.1.14}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\int_E |fg|\, d\lambda \leqslant \frac{1}{p}\int_E |f|^p\, d\lambda + \frac{1}{q}\int_E |g|^q\, d\lambda = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.1.15}$$

Στην γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$ (αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ $\lambda-$σχεδόν παντού και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \ \text{ και } \ g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}. \tag{4.1.16}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_E |f_1|^p\, d\lambda = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f|^p\, d\lambda = 1 \ \text{ και } \ \int_E |g_1|^q\, d\lambda = \frac{1}{\|g\|_q^q}\int_E |g|^q\, d\lambda = 1. \tag{4.1.17}$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_E |f_1 g_1|\, d\lambda \leqslant 1, \ \text{ δηλαδή, } \int_E |fg|\, d\lambda \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{4.1.18}$$

□

Πρόταση 4.1.5 (ανισότητα Minkowski). *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f, g \in L_p(E)$, τότε*

$$\left(\int_E |f+g|^p \, d\lambda\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f|^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p \, d\lambda\right)^{1/p}, \tag{4.1.19}$$

δηλαδή

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{4.1.20}$$

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι απλή στην περίπτωση $p = 1$. Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση $1 < p < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int_E |f+g|^p \, d\lambda = \int_E |f+g|^{p-1}|f+g| \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f+g|^{p-1}|f| \, d\lambda + \int_E |f+g|^{p-1}|g| \, d\lambda \\ &\leqslant \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \|f\|_p + \left(\int_E |f+g|^{(p-1)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \|g\|_p, \end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Holder για τα ζευγάρια $|f+g|^{p-1}, |f|$ και $|f+g|^{p-1}, |g|$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_E |f+g|^{(p-1)q} \, d\lambda\right)^{1/q} = \left(\int_E |f+g|^p \, d\lambda\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}. \tag{4.1.21}$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q} \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right). \tag{4.1.22}$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \tag{4.1.23}$$

□

4.2 Θεώρημα Riesz-Fischer

Σε αυτήν την παράγραφο δείχνουμε την πληρότητα του $L_p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$. Ορίζουμε επίσης τον χώρο $L_\infty(E)$ και αποδεικνύουμε ότι είναι πλήρης. Τέλος, δείχνουμε ότι αν $1 \leqslant p < \infty$ τότε οι απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $L_p(E)$.

4.2.1 Θεώρημα Riesz-Fischer

Θεώρημα 4.2.1 (Riesz-Fischer). *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $1 \leqslant p < \infty$. Ο $L_p(E)$ είναι χώρος Banach.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε ένα γενικό κριτήριο. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 4.2.2. Έστω (x_n) ακολουθία σε έναν χώρο X με νόρμα. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει αν υπάρχει $x \in X$ ώστε

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} x_k \to x. \tag{4.2.1}$$

Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει απολύτως αν $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι πλήρης.*

(β) *Αν (x_k) είναι ακολουθία στον X με $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι πλήρης. Έστω (x_k) ακολουθία στον X, με την ιδιότητα $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n > m \geqslant n_0$,

$$\|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon. \tag{4.2.2}$$

Τότε, αν $n > m \geqslant n_0$,

$$\|s_n - s_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leqslant \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\| < \varepsilon. \tag{4.2.3}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η (s_n) είναι Cauchy. Ο X είναι πλήρης, άρα η s_n συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.

Αντίστροφα, έστω (x_k) ακολουθία Cauchy στον X. Για $\varepsilon = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε $s_1 < s_2 < \cdots < s_k < \cdots$ ώστε, για κάθε $n > m \geqslant s_k$,

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k}. \tag{4.2.4}$$

Ειδικότερα,

$$s_{k+1} > s_k \geqslant s_k \Longrightarrow \|x_{s_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k} \tag{4.2.5}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα,

(4.2.6)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{s_{k+1}} - x_{s_k}\| < 1 < +\infty.$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{s_{k+1}} - x_{s_k})$ συγκλίνει απολύτως, οπότε (από την υπόθεσή μας) συγκλίνει: υπάρχει $x \in X$ ώστε

(4.2.7)
$$\sum_{k=1}^{m}(x_{s_{k+1}} - x_{s_k}) \to x,$$

δηλαδή, $x_{s_{m+1}} - x_{s_1} \to x$. Άρα, $x_{s_k} \to x + x_{s_1}$. Δείξαμε ότι η (x_k) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Είναι όμως και ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει στον X. Έπεται ότι ο X είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1. Έστω (f_k) ακολουθία στον $L_p(E)$ με την ιδιότητα

(4.2.8)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M < +\infty.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|$, $x \in X$. Τότε,

(4.2.9)
$$\|g_n\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leqslant M,$$

δηλαδή $g_n \in L_p(E)$ και $\int_E g_n^p d\lambda \leqslant M^p$. Η (g_n) είναι αύξουσα, άρα ορίζεται η $g(x) = \lim g_n(x) \in [0, \infty]$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

(4.2.10)
$$\int_E g^p d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n^p d\lambda \leqslant M^p.$$

Συνεπώς, η g^p είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| < +\infty$ σχεδόν παντού.

Ορίζουμε $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Από την $g(x) < +\infty$ έχουμε ότι η $s(x) = \lim s_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ ορίζεται και παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού. Η s είναι μετρήσιμη και από την $|s_n(x)| \leqslant g_n(x) \leqslant g(x)$ συμπεραίνουμε ότι $|s(x)| \leqslant g(x)$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι

(4.2.11)
$$\int_E |s|^p d\lambda \leqslant \int_E g^p d\lambda \leqslant M^p < \infty,$$

δηλαδή $s \in L_p(E)$. Τέλος, παρατηρούμε ότι

(4.2.12)
$$|s_n(x) - s(x)|^p \leqslant 2^p \max\{|s_n(x)|^p, |s(x)|^p\} \leqslant 2^p |g(x)|^p$$

σχεδόν παντού. Αφού $|s_n(x) - s(x)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_E |s_n - s|^p d\lambda \to 0. \tag{4.2.13}$$

Αυτό δείχνει ότι $\|s_n - s\|_p \to 0$. Από το Λήμμα 4.2.3 έπεται ότι ο $L_p(E)$ είναι χώρος Banach. □

4.2.2 Ο χώρος $L_\infty(E)$

Στην περίπτωση $p = \infty$, ο χώρος $L_\infty(E)$ αποτελείται από τις μετρήσιμες f που είναι «φραγμένες σχεδόν παντού». Ο ακριβής ορισμός είναι ο εξής.

Ορισμός 4.2.4. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Η κλάση $\mathcal{L}_\infty(E)$ αποτελείται από όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις $f : E \to [-\infty, \infty]$ για τις οποίες υπάρχει $\beta > 0$ ώστε

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \beta\}\right) = 0. \tag{4.2.14}$$

Για μια τέτοια f, θέτουμε $\|f\|_\infty$ το infimum όλων αυτών των β. Παρατηρήστε ότι το infimum είναι minimum: αν (β_n) είναι μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία με $\beta_n \to \|f\|_\infty$, τότε

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \beta_n\}\right) = 0 \tag{4.2.15}$$

για κάθε n και $\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in E : |f(x)| > \beta_n\}$, άρα

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\}\right) = 0. \tag{4.2.16}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ο $\mathcal{L}_\infty(E)$ είναι γραμμικός χώρος. Αν για κάποια $f \in \mathcal{L}_\infty(E)$ ισχύει $\|f\|_\infty = 0$, τότε συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού. Έτσι, για $f, g \in \mathcal{L}_\infty(E)$, θέτουμε $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού στο E.

Ορισμός 4.2.5. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τότε, το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας του χώρου $\mathcal{L}_\infty(E)$ ως προς τη σχέση $\sim$ συμβολίζεται με $L_\infty(E)$. Ο $L_\infty(E)$ γίνεται γραμμικός χώρος με τις προφανείς πράξεις.

Θα γράφουμε, όπως και πριν, $f \in L_\infty(E)$ αντί για $[f] \in L_\infty(E)$. Τέλος, για μια $f \in L_\infty(E)$ θέτουμε

$$\|f\|_\infty = \min\left\{\beta > 0 : \lambda\left(\{x \in E : |f(x)| > \beta\}\right)\right\}. \tag{4.2.17}$$

Λέμε ότι ο $\|f\|_\infty$ είναι το *ουσιώδες supremum* της f.

Πρόταση 4.2.6. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Ο χώρος $(L_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Θεώρημα 4.2.7. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Ο χώρος με νόρμα $(L_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_{n,m} = \{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty\}, \qquad n, m \in \mathbb{N} \tag{4.2.18}$$

για τα οποία ισχύει $\lambda(E \setminus A_{n,m}) = 0$. Έτσι, αν ορίσουμε $A = \bigcap_{n,m} A_{n,m}$ έχουμε $\lambda(E \setminus A) = 0$ και

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty \tag{4.2.19}$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, άρα η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στο A και συνεπώς ομοιόμορφα συγκλίνουσα. Υπάρχει λοιπόν μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Δηλαδή,

$$\|f_n - f\|_\infty = \|(f_n - f)\chi_A\|_\infty \leqslant \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0. \tag{4.2.20}$$

Αυτό δείχνει ότι $f \in L_\infty(E)$ και $f_n \to f$ στον $L_\infty(E)$. □

4.2.3 Προσέγγιση συναρτήσεων στον L_p

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε δύο βασικά αποτελέσματα προσέγγισης των συναρτήσεων που ανήκουν σε χώρους L_p.

Θεώρημα 4.2.8. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{S}$ που αποτελείται από όλες τις απλές μετρήσιμες συναρτήσεις $\phi : E \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει*

$$\lambda(\{x \in E : \phi(x) \neq 0\}) < \infty. \tag{4.2.21}$$

Η $\mathcal{S}$ είναι πυκνή στον $L_p(E)$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $\phi \in \mathcal{S}$ είναι μια απλή συνάρτηση με κανονική μορφή

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{A_j},$$

όπου τα $A_j \in \mathcal{M}$ είναι ξένα και αν $a_j \neq 0$ τότε $\lambda(A_j) < \infty$, έχουμε

$$\int_E |\phi|^p \, d\lambda = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \lambda(A_j) < \infty.$$

Δηλαδή $\mathcal{S} \subseteq L_p(E)$.

Έστω $f \in L_p(E)$, $f \geqslant 0$. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών συναρτήσεων $\{\phi_n\}$ με $0 \leqslant \phi_n \leqslant f$ και $\phi_n \nearrow f$. Αφού $0 \leqslant \phi_n \leqslant f$, έχουμε $\phi_n \in L_p(E)$ για κάθε n, άρα $\phi_n \in \mathcal{S}$ (άσκηση). Επιπλέον, $|f - \phi_n|^p \leqslant f^p$ και αφού $f \in L_p(E)$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δείχνει ότι

$$\int_E |\phi_n - f|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή ότι $\|\phi_n - f\|_p \to 0$. Άρα, οι μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L_p(E)$ προσεγγίζονται από απλές ως προς την $\|\cdot\|_p$. Για την γενική περίπτωση, αν $f \in L_p(E)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και βρίσκουμε $\phi_n, \psi_n \in \mathcal{S}$ με $\|\phi_n - f^+\|_p \to 0$ και $\|\psi_n - f^-\|_p \to 0$. Τότε, οι $\zeta_n := \phi_n - \psi_n$ ανήκουν στην $\mathcal{S}$ και

$$\|\zeta_n - f\|_p = \|(\phi_n - \psi_n) - (f^+ - f^-)\|_p \leqslant \|\phi_n - f^+\|_p + \|\psi_n - f^-\|_p \to 0,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Ορισμός 4.2.9 (φορέας). *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$. Το κλειστό σύνολο*

(4.2.22) $$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in E : f(x) \neq 0\}}$$

λέγεται φορέας της f.

Θεωρούμε τον υπόχωρο $C_c(\mathbb{R}^d)$ του χώρου $C(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που αποτελείται από όλες τις συνεχείς f που έχουν συμπαγή φορέα, δηλαδή μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές σύνολο $K = K(f) \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε ότι κάθε $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, όπου $1 \leqslant p < \infty$, προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα.

Θεώρημα 4.2.10. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Το σύνολο $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα του $\mathbb{R}^d$ είναι πυκνό στον $L_p(\mathbb{R}^d)$.*

Απόδειξη. Λογω του Θεωρήματος 4.2.8, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απλή συνάρτηση $\phi \in \mathcal{S}$, που επιπλέον έχει συμπαγή φορέα (άσκηση), προσεγγίζεται από συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Λόγω γραμμικότητας του ολοκληρώματος, μπορούμε εύκολα να αναχθούμε στην περίπτωση που $\phi = \chi_A$ για κάποιο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < \infty$. Από την κανονικότητα του μέτρου Lebesgue, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές K_ε

και ανοικτό U_ε ώστε $K_\varepsilon \subseteq A \subseteq U_\varepsilon$ και $\lambda(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon^p$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Urysohn μπορούμε να ορίσουμε $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ που ικανοποιεί τις $0 \leqslant f \leqslant 1$, $f \equiv 0$ στο U_ε^c και $f \equiv 1$ στο K_ε. Τότε, $|f - \chi_A| \leqslant 1$ και $f = \chi_A$ στο $K_\varepsilon \cup U_\varepsilon^c$, άρα

$$\|f - \chi_A\|_p \leqslant [\lambda(U_\varepsilon \setminus K_\varepsilon)]^{1/p} < \varepsilon.$$

□

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια Πρόταση που θα μας φανεί χρήσιμη αρκετές φορές.

Πρόταση 4.2.11. *Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$. Τότε,*

$$\lim_{|z|\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p := \lim_{|z|\to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+z) - f(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = 0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα g συνεχή, η οποία μηδενίζεται έξω από κάποια μπάλα $\widehat{B}(r) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant r\}$. Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}^d$ και $|u - v| \leqslant \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon$. Τότε, αν $|z| < \delta$ έχουμε $f(x+z) = 0$ έξω από τη μπάλα $\widehat{B}(r+1)$ και

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+z) - f(x)|^p d\lambda(x) = \int_{\widehat{B}(r+1)} |f(x+z) - f(x)|^p d\lambda(x) \leqslant \varepsilon^p \lambda(\widehat{B}(r+1)),$$

δηλαδή

$$\|f(x+z) - f(x)\|_p \leqslant [\lambda(\widehat{B}(r+1))]^{1/p}\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{|z|\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p = 0$.

Έστω τώρα $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε g συνεχή, η οποία μηδενίζεται έξω από κάποια μπάλα $B(r)$, με την ιδιότητα $\|f(x) - g(x)\|_p \leqslant \varepsilon$. Τότε, για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$ έχουμε $\|f(x+z) - g(x+z)\|_p \leqslant \varepsilon$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|f(x+z) - f(x)\|_p &\leqslant \|f(x+z) - g(x+z)\|_p + \|g(x+z) - g(x)\|_p + \|g(x) - f(x)\|_p \\ &\leqslant 2\varepsilon + \|g(x+z) - g(x)\|_p \end{aligned}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$, και αφήνοντας το $z \to 0$ έχουμε

$$\limsup_{z\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p \leqslant 2\varepsilon$$

διότι $\lim_{|z|\to 0} \|g(x+z) - g(x)\|_p = 0$.

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{|z|\to 0} \|f(x+z) - f(x)\|_p = 0$. □

4.3 Θεώρημα Fubini

Έστω d_1, d_2 θετικοί ακέραιοι και $d = d_1 + d_2$. Γράφουμε τον $\mathbb{R}^d$ στη μορφή $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ και συμβολίζουμε τα σημεία του $\mathbb{R}^d$ με (x, y), όπου $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ και $y \in \mathbb{R}^{d_2}$. Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ ορίζουμε:

(i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ την συνάρτηση $f_x : \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ με $f_x(y) := f(x, y)$.

(ii) Για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ την συνάρτηση $f^y : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}$ με $f^y(x) := f(x, y)$.

Τελείως ανάλογα, για κάθε σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ ορίζουμε:

(i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ το σύνολο $E_x := \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x, y) \in E\}$.

(ii) Για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο $E^y := \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\}$.

Το θεώρημα του Fubini μας επιτρέπει να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώνοντας «πρώτα ως προς x και μετά ως προς y» ή «πρώτα ως προς y και μετά ως προς x».

Θεώρημα 4.3.1 (Fubini). *Έστω $f : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση f^y είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και η συνάρτηση*

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x) d\lambda_{d_1}(x) \tag{4.3.1}$$

είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$. Επιπλέον,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y). \tag{4.3.2}$$

Το Θεώρημα 4.3.1 είναι φυσικά συμμετρικό ως προς x και y. Δηλαδή, αν $f : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ η συνάρτηση f_x είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$ και η συνάρτηση

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_x(y) d\lambda_{d_2}(y) \tag{4.3.3}$$

είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$, και ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) d\lambda_{d_2}(y) \right) d\lambda_{d_1}(x). \tag{4.3.4}$$

Δηλαδή, μπορούμε να κάνουμε εναλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης:

(4.3.5)
$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)d\lambda_{d_2}(y)\right)d\lambda_{d_1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 έχει αρκετά λεπτά σημεία. Αν γνωρίζουμε ότι η $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη, δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση f^y είναι μετρήσιμη. Παρομοίως, αν το $E \subset \mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο, δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο E^y είναι μετρήσιμο (για παράδειγμα, θεωρήστε το $E = N \times \{0\}$ στο $\mathbb{R}^2$, όπου N είναι ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ - τότε, $\lambda_2(E) = 0$ αλλά το $E^0 = N$ δεν είναι μετρήσιμο).

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Ορίζουμε $\mathcal{F}$ την κλάση των συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα τρία συμπεράσματα του θεωρήματος, και θα αποδείξουμε ότι $L_1(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{F}$. Η απόδειξη θα γίνει σε έξι βήματα.

Βήμα 1. *Κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων από την $\mathcal{F}$ ανήκει κι αυτός στην $\mathcal{F}$.*

Πράγματι, έστω $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{F}$ και έστω $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Για κάθε $i = 1, \dots, k$ υπάρχει σύνολο $Z_i \subset \mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(Z_i) = 0$ ώστε για κάθε $y \notin Z_i$ η f_i^y να είναι ολοκληρώσιμη. Αν θέσουμε $Z = Z_1 \cup \dots \cup Z_k$, τότε $\lambda_{d_2}(Z) = 0$ και για κάθε $y \notin Z$ έχουμε ότι οι f_i^y είναι ολοκληρώσιμες. Έπεται ότι η

$$(a_1f_1 + \dots + a_kf_k)^y = a_1f_1^y + \dots + a_kf_k^y$$

είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $y \notin Z$. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος συμπεραίνουμε τώρα ότι η

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} (a_1f_1 + \dots + a_kf_k)^y(x)d\lambda_{d_1}(x) = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_i^y(x)d\lambda_{d_1}(x)$$

είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} (a_1f_1 + \dots + a_kf_k)(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_i(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_i(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y) \\
&\qquad = \sum_{i=1}^k a_i \int_{\mathbb{R}^d} f_i d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^d} (a_1f_1 + \dots + a_kf_k)d\lambda_d.
\end{aligned}$$

Άρα, $a_1f_1+\cdots+a_kf_k\in\mathcal{F}$.

Βήμα 2. *Έστω (f_k) μια αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία συναρτήσεων στην $\mathcal{F}$, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια ολοκληρώσιμη $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$. Τότε, $f\in\mathcal{F}$.*

Παίρνοντας τις $-f_k$ στην θέση των f_k αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k\nearrow f$. Μπορούμε επίσης (χρησιμοποιώντας και το Βήμα 1) να αντικαταστήσουμε τις f_k με τις f_k-f_1 και να υποθέσουμε ότι οι f_k είναι μη αρνητικές. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_kd\lambda_d=\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d. \tag{4.3.6}$$

Αφού $f_k\in\mathcal{F}$, για κάθε k υπάρχει $A_k\subset\mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(A_k)=0$ ώστε: αν $y\notin A_k$ τότε η f_k^y είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$. Θέτουμε $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$. Τότε, $\lambda_{d_2}(A)=0$ και αν $y\notin A$ έχουμε ότι η f_k^y είναι ολοκληρώσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ για κάθε k. Επίσης, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$g_k(y):=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f_k^y(x)d\lambda_{d_1}(x)\to g(y):=\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)d\lambda_{d_1}(x).$$

Αφού $f_k\in\mathcal{F}$ έχουμε επίσης ότι κάθε g_k είναι ολοκληρώσιμη και, πάλι από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g_k(y)d\lambda_{d_2}(y)\to\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g(y)d\lambda_{d_2}(y). \tag{4.3.7}$$

Αφού $f_k\in\mathcal{F}$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g_k(y)d\lambda_{d_2}(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f_kd\lambda_d.$$

συνδυάζοντας αυτήν την σχέση με τις (4.3.6) και (4.3.7) παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}g(y)d\lambda_{d_2}(y)=\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d.$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα το δεξιό μέλος είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, η g είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι $g(y)<\infty$ σχεδόν παντού, δηλαδή η f^y είναι ολοκληρώσιμη σχεδόν για κάθε y, και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f(x,y)d\lambda_{d_1}(x)\right)d\lambda_{d_2}(y)=\int_{\mathbb{R}^d}fd\lambda_d.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f\in\mathcal{F}$.

Βήμα 3. *Αν το E είναι G_δ-σύνολο και $\lambda_d(E)<\infty$, τότε η χ_E ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

(α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι ένας φραγμένος ανοικτός κύβος, δηλαδή $E=Q_1\times Q_2$ όπου Q_1 και Q_2 είναι ανοικτοί κύβοι στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και τον $\mathbb{R}^{d_2}$ αντίστοιχα. Τότε, η

$(\chi_E)^y$ είναι ολοκληρώσιμη για κάθε y, με ολοκλήρωμα $\lambda_{d_1}(Q_1)$ αν $y \in Q_2$ και ολοκλήρωμα ίσο με μηδέν αν $y \notin Q_2$. Άρα, η $g = \lambda_{d_1}(Q_1)\chi_{Q_2}$ είναι επίσης ολοκληρώσιμη, και

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)d\lambda_{d_2}(y) = \lambda_{d_1}(Q_1)\lambda_{d_2}(Q_2).$$

Αφού

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = \lambda_d(E) = \lambda_{d_1}(Q_1)\lambda_{d_2}(Q_2),$$

έχουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι το E περιέχεται στο σύνορο κάποιου κλειστού κύβου. Αφού το σύνορο του κύβου έχει μέτρο μηδέν στον $\mathbb{R}^d$, έχουμε $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = 0$. Παρατηρούμε τώρα, διακρίνοντας περιπτώσεις, ότι σχεδόν για κάθε y, το σύνολο E^y έχει μέτρο μηδέν στον $\mathbb{R}^{d_1}$, άρα αν ορίσουμε $g(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_E(x,y)d\lambda_{d_1}(x)$ τότε $g(y) = 0$ σχεδόν για κάθε y. Έπεται ότι $\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(y)d\lambda_{d_2}(y) = 0$, το οποίο δείχνει ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(γ) Υποθέτουμε τώρα ότι το E είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών κύβων με ξένα εσωτερικά. Έστω $E = \bigcup_{i=1}^k Q_i$. Αν γράψουμε $\tilde{Q}_i$ για το εσωτερικό του Q_k, τότε μπορούμε να γράψουμε την χ_E σαν γραμμικό συνδυασμό των $\chi_{\tilde{Q}_i}$ και των χ_{A_i}, όπου κάθε A_i είναι υποσύνολο του συνόρου του Q_i. Από τα (α) και (β) έχουμε ότι $\chi_{\tilde{Q}_i} \in \mathcal{F}$, $\chi_{A_i} \in \mathcal{F}$, και από το Βήμα 1 συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$.

(δ) Υποθέτουμε τώρα ότι το E είναι ανοικτό και έχει πεπερασμένο μέτρο. Μπορούμε να γράψουμε το E στη μορφή

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

όπου Q_k είναι κύβοι με ξένα εσωτερικά. Αν θέσουμε $f_m = \sum_{k=1}^m \chi_{Q_k}$, τότε $f_k \nearrow \chi_E$ σχεδόν παντού. Αφού $f_k \in \mathcal{F}$ (από το (γ)) και η χ_E είναι ολοκληρώσιμη (διότι $\lambda_d(E) < \infty$) συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$ χρησιμοποιώντας το Βήμα 2.

(ε) Τέλος, έστω E ένα G_δ-σύνολο με $\lambda_d(E) < \infty$. Μπορούμε να γράψουμε το E στη μορφή

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

όπου (G_k) είναι μια φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων, και $\lambda_d(G_1) < \infty$ (άσκηση). Τότε, οι συναρτήσεις χ_{G_k} ανήκουν στην $\mathcal{F}$ από το (δ) και σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο στην χ_E. Από το Βήμα 2 συμπεραίνουμε ότι $\chi_E \in \mathcal{F}$, και το Βήμα 3 έχει ολοκληρωθεί.

Βήμα 4. *Αν* $\lambda_d(E) = 0$ *τότε* $\chi_E \in \mathcal{F}$.

Πράγματι, αφού το E είναι μετρήσιμο και $\lambda_d(E)=0$, μπορούμε να βρούμε G_δ-σύνολο $G\supseteq E$ με $\lambda_d(G)=0$. Από το Βήμα 3 έχουμε ότι $\chi_G\in\mathcal{F}$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_G(x,y)d\lambda_1(x)\right)d\lambda_2(y)=\int_{\mathbb{R}^d}\chi_G d\lambda_d=0.$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_G(x,y)d\lambda_{d_1}(x)=0\ \text{ σχεδόν για κάθε } y.$$

Έπεται ότι $\lambda_{d_1}(G^y)=0$ σχεδόν για κάθε y. Αφού $E^y\subseteq G^y$ για κάθε y, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_{d_1}(E^y)=0$ σχεδόν για κάθε y, δηλαδή $\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_E(x,y)d\lambda_{d_1}(x)=0$ σχεδόν για κάθε y. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}}\chi_E(x,y)d\lambda_1(x)\right)d\lambda_2(y)=0=\int_{\mathbb{R}^d}\chi_E d\lambda_d.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\chi_E\in\mathcal{F}$.

Βήμα 5. *Αν το E είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και $\lambda_d(E)<\infty$, τότε η χ_E ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

Πράγματι, θεωρούμε ένα G_δ-σύνολο $G\supseteq E$ με $\lambda_d(G\setminus E)=0$, γράφουμε

$$\chi_E=\chi_G-\chi_{G\setminus E},$$

και χρησιμοποιώντας το Βήμα 3, το Βήμα 4 και το γεγονός ότι η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς, συμπεραίνουμε ότι $\chi_E\in\mathcal{F}$.

Βήμα 6. *Κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση ανήκει στην $\mathcal{F}$.*

Παρατηρούμε πρώτα ότι, αφού η f γράφεται στη μορφή $f=f^+-f^-$ και οι f^+,f^- είναι ολοκληρώσιμες, και αφού η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι μη αρνητική. Γνωρίζουμε τώρα ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ϕ_k ώστε $\phi_k\nearrow f$. Κάθε ϕ_k είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων πεπερασμένου μέτρου, άρα κάθε $\phi_k\in\mathcal{F}$ από το Βήμα 5 και το Βήμα 1. Έπεται ότι $f\in\mathcal{F}$, από το Βήμα 2. $\square$

Στο υπόλοιπο αυτής της παραγράφου δίνουμε κάποιες χρήσιμες εφαρμογές του θεωρήματος Fubini, ξεκινώντας από το θεώρημα Tonelli.

Θεώρημα 4.3.2 (Tonelli)**.** *Έστω $f:\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\to\mathbb{R}$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, σχεδόν για κάθε $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ η συνάρτηση f^y είναι μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και η συνάρτηση*

$$y\mapsto\int_{\mathbb{R}^{d_1}}f^y(x)d\lambda_{d_1}(x)\tag{4.3.8}$$

είναι μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^{d_2}$*. Επιπλέον,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y). \tag{4.3.9}$$

Απόδειξη. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{αν } |(x,y)| < k \text{ και } f(x,y) < k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Κάθε f_k είναι ολοκληρώσιμη. Από το θεώρημα Fubini, υπάρχει $E_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ με $\lambda_{d_2}(E_k) = 0$ ώστε: αν $y \notin E_k$ τότε η f_k^y είναι ολοκληρώσιμη. Αν θέσουμε $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, βλέπουμε ότι $\lambda_{d_2}(E) = 0$ και αν $y \notin E$ τότε η f_k^y είναι μετρήσιμη για κάθε k. Αφού $f_k^y \nearrow f^y$, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \to \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x)$$

για κάθε $y \notin E$. Πάλι από το θεώρημα Fubini, η $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y) d\lambda_{d_1}(x)$ είναι μετρήσιμη στο E^c, άρα και η $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x)$. Εφαρμόζοντας και πάλι το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \to \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y). \tag{4.3.10}$$

Όμως, από το θεώρημα Fubini γνωρίζουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f_k d\lambda_d. \tag{4.3.11}$$

Εφαρμόζοντας απευθείας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για τις f_k έχουμε επίσης

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_k d\lambda_d \to \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d. \tag{4.3.12}$$

Συνδυάζοντας τις (4.3.10), (4.3.11) και (4.3.12) έχουμε το συμπέρασμα. □

Παρατήρηση 4.3.3. Πολύ συχνά, το θεώρημα Tonelli χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με το θεώρημα Fubini. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι ολοκληρώσιμη και, αν ναι, να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμά της κάνοντας *διαδοχική ολοκλήρωση* (πρώτα ως προς x και μετά ως προς y). Για να αιτιολογήσουμε την χρήση της διαδοχικής ολοκλήρωσης, εφαρμόζουμε πρώτα το θεώρημα Tonelli για την $|f|$: αυτό μας επιτρέπει να υπολογίσουμε ή να εκτιμήσουμε τα διαδοχικά ολοκληρώματα της $|f|$, διότι η $|f|$ είναι μη αρνητική. Αν αυτά είναι πεπερασμένα, από το Θεώρημα 4.3.2 έχουμε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\lambda_d < \infty$. Τότε όμως, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.3.1 και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκείνο το θεώρημα για να υπολογίσουμε το $\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$.

Πόρισμα 4.3.4. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Τότε, σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ το σύνολο*

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\}$$

είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d_1}$. Επιπλέον, η $y \mapsto \lambda_{d_1}(E^y)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και

$$\lambda_d(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y) d\lambda_{d_2}(y).$$

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος 4.3.2. Επιλέγουμε σαν f την χ_E και παρατηρούμε ότι $(\chi_E)^y = \chi_{E^y}$. Πράγματι, $(\chi_E)^y(x) = 1$ αν και μόνο αν $\chi_E(x, y) = 1$ δηλαδή αν και και μόνο αν $(x, y) \in E$. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με την $x \in E^y$, δηλαδή την $\chi_{E^y}(x) = 1$. Από το Θεώρημα 4.3.2 η $(\chi_E)^y$ είναι μετρήσιμη σχεδόν για κάθε y, δηλαδή η χ_{E^y} είναι μετρήσιμη σχεδόν για κάθε y. Ισοδύναμα, το E^y είναι μετρήσιμο σχεδόν για κάθε y. Τέλος, πάλι από το Θεώρημα 4.3.2, έχουμε

$$\begin{aligned}
\lambda_d(E) &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_E d\lambda_d = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} (\chi_E)^y(x) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \chi_{E^y}(x) d\lambda_{d_1}(x) \right) d\lambda_{d_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y) d\lambda_{d_2}(y).
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.3.5. *Έστω $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ και $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ μετρήσιμα σύνολα. Τότε, το $E = E_1 \times E_2$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Επιπλέον,*

$$\lambda_d(E) = \lambda_{d_1}(E_1)\lambda_{d_2}(E_2),$$

με την σύμβαση ότι αν κάποιο από τα $\lambda_{d_i}(E_i)$ είναι ίσο με μηδέν, τότε $\lambda_d(E) = 0$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.3.5 θα χρειαστούμε ένα λήμμα:

Λήμμα 4.3.6. *Έστω $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ και $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$. Τότε,*

$$\lambda_d^*(E_1 \times E_2) \leqslant \lambda_{d_1}^*(E_1)\lambda_{d_2}^*(E_2),$$

με την σύμβαση ότι αν κάποιο από τα $\lambda_{d_i}^*(E_i)$ είναι ίσο με μηδέν, τότε $\lambda_d^*(E) = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, υπάρχουν ακολουθίες ανοικτών ορθογωνίων (I_k) και (J_s) στον $\mathbb{R}^{d_1}$ και τον $\mathbb{R}^{d_2}$ αντίστοιχα, ώστε

$$E_1 \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, \quad E_2 \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} J_s,$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < \lambda^*_{d_1}(E_1) + \varepsilon, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \ell(J_s) < \lambda^*_{d_2}(E_2) + \varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι

$$E_1 \times E_2 \subseteq \bigcup_{k,s=1}^{\infty} I_k \times J_s,$$

και χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου γράφουμε

$$\begin{aligned}\lambda^*_d(E_1 \times E_2) &\leqslant \sum_{k,s=1}^{\infty} \ell(I_k \times J_s) = \sum_{k,s=1}^{\infty} \ell(I_k)\ell(J_s)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k)\right)\left(\sum_{s=1}^{\infty} \ell(J_s)\right) \leqslant (\lambda^*_{d_1}(E_1) + \varepsilon)(\lambda^*_{d_2}(E_2) + \varepsilon).\end{aligned}$$

Αν $\lambda^*_{d_1}(E_1) > 0$ και $\lambda^*_{d_2}(E_2) > 0$, τότε

$$\lambda^*_{2d}(E_1 \times E_2) \leqslant \lambda^*_{d_1}(E_1)\lambda^*_{d_2}(E_2) + A\varepsilon + \varepsilon^2$$

όπου $A = \lambda^*_{d_1}(E_1) + \lambda^*_{d_2}(E_2)$, και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε το ζητούμενο (αν κάποιο από τα E_i έχει άπειρο εξωτερικό μέτρο και το άλλο θετικό εξωτερικό μέτρο, τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε).

Μένει η περίπτωση όπου, για παράδειγμα, $\lambda^*_{d_1}(E_1) = 0$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $E_2^m = E_2 \cap \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : |y| \leqslant m\}$. Το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\lambda^*_d(E_1 \times E_2^m) \leqslant \varepsilon(\lambda^*_{d_2}(E_2^m) + \varepsilon)$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε $\lambda^*_d(E_1 \times E_2^m) = 0$. Αφού $E_1 \times E_2^m \nearrow E_1 \times E_2$ καθώς το $m \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda^*_d(E_1 \times E_2) = 0$. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.3.5. Αρκεί να δείξουμε ότι το E είναι μετρήσιμο. Κατόπιν, αφού $E^y = E_1$ για κάθε $y \in E_2$ και $E^y = \emptyset$ αλλιώς, από το Πόρισμα 4.3.4 παίρνουμε

$$\lambda(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \lambda_{d_1}(E^y)d\lambda_{d_2}(y) = \int_{E_2} \lambda_{d_1}(E_1)d\lambda_{d_2}(y) = \lambda_{d_1}(E_1)\lambda_{d_2}(E_2).$$

Για την μετρησιμότητα του E, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι, αφού τα E_1 και E_2 είναι μετρήσιμα, μπορούμε να βρούμε G_δ-σύνολα G_i με $E_i \subseteq G_i$ και $\lambda_{d_i}(G_i \setminus E_i) = 0$. Το σύνολο $G = G_1 \times G_2$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, και

$$((G_1 \times G_2) \setminus (E_1 \times E_2)) \subseteq ((G_1 \setminus E_1) \times G_2) \cup (G_1 \times (G_2 \setminus E_2)).$$

Από το Λήμμα 4.3.6 βλέπουμε ότι

$$\lambda_d^*((G_1 \setminus E_1) \times G_2) \leqslant \lambda_{d_1}(G_1 \setminus E_1)\lambda_{d_2}(G_2) = 0$$

και

$$\lambda_d^*(G_1 \times (G_2 \setminus E_2)) \leqslant \lambda_{d_1}(G_1)\lambda_{d_2}(G_2 \setminus E_2) = 0.$$

Άρα, $\lambda_d^*(G \setminus E) = 0$. Έπεται ότι το $E = G \setminus (G \setminus E)$ είναι μετρήσιμο. $\square$

Πόρισμα 4.3.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, η $\tilde{f} : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την*

$$\tilde{f}(x, y) = f(x)$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Απόδειξη. Αφού η f είναι μετρήσιμη, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $E_a = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : f(x) < a\}$ είναι μετρήσιμο. Αφού

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : \tilde{f}(x, y) < a\} = E_a \times \mathbb{R}^{d_2},$$

από την Πρόταση 4.3.5 βλέπουμε ότι το $\{\tilde{f} < a\}$ είναι μετρήσιμο για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Με βάση τον ορισμό, η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. $\square$

Πόρισμα 4.3.8. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μη αρνητική συνάρτηση. Ορίζουμε*

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Τότε, η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν το $\mathcal{A}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$, και αν αυτό συμβαίνει τότε

$$\lambda_{d+1}(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μετρήσιμη. Από το Πόρισμα 4.3.7 βλέπουμε εύκολα ότι η συνάρτηση

$$F(x, y) = f(x) - y$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση (διότι οι $F_1(x, y) = f(x)$ και $F_2(x, y) = y$ είναι μετρήσιμες). Έπεται ότι το

$$\mathcal{A} = \{(x, y) : y \geqslant 0\} \cap \{(x, y) : F(x, y) \leqslant 0\}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^{d+1}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^{d_1}$ έχουμε

$$\mathcal{A}_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathcal{A}\} = [0, f(x)].$$

Από το Πόρισμα 4.3.4 (με εναλλαγή των ρόλων των x και y) η συνάρτηση $f(x) = \lambda_1(\mathcal{A}_x)$ είναι μετρήσιμη. Επιπλέον,

$$\lambda_{d+1}(\mathcal{A}) = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} \chi_A d\lambda_{d+1} = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_1(\mathcal{A}_x) d\lambda_d(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda_d(x),$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.3.9. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την*

$$\tilde{f}(x, y) = f(x - y)$$

είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι: αν $a \in \mathbb{R}$ και αν $E_a = \{z \in \mathbb{R}^d : f(z) < a\}$, τότε το σύνολο

$$\tilde{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : x - y \in E_a\}$$

είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Θα δείξουμε, γενικότερα, ότι αν A είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε το $\tilde{A} = \{(x, y) : x - y \in A\}$ είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Παρατηρούμε αρχικά ότι αν το G είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ τότε το $\tilde{G}$ είναι επίσης ανοικτό. Παίρνοντας αριθμήσιμες τομές βλέπουμε ότι αν το A είναι G_δ-σύνολο τότε το $\tilde{A}$ είναι επίσης G_δ-σύνολο.

Θεωρούμε τώρα ένα σύνολο Z με $\lambda_d(Z) = 0$. Υπάρχει ακολουθία (G_n) ανοικτών συνόλων στον $\mathbb{R}^d$ με $Z \subset G_n$ και $\lambda_d(G_n) \to 0$. Ορίζουμε $B_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2d} : |y| \leqslant k\}$ και θεωρούμε το $\tilde{G_n} \cap B_k$. Παρατηρούμε ότι $\chi_{\tilde{G_n} \cap B_k} = \chi_{G_n}(x - y)\chi_{B_k}(y)$, άρα

$$\begin{aligned}
\lambda_{2d}(\tilde{G_n} \cap B_k) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \chi_{G_n}(x - y)\chi_{B_k}(y) d\lambda_{2d}(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{G_n}(x - y) d\lambda_d(x) \right) \chi_{B_k}(y) d\lambda_d(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \lambda_d(G_n)\chi_{B_k}(y) d\lambda_d(y) = \lambda_d(G_n)\lambda_d(B_k)
\end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{G_n}(x - y) d\lambda_d(x) = \lambda_d(y + G_n) = \lambda_d(G_n)$ για κάθε y, η οποία ισχύει γιατί το λ_d είναι αναλλοίωτο ως προς μεταφορές). Έπεται ότι, για κάθε k,

$$0 \leqslant \lambda_{2d}(\tilde{Z} \cap B_k) \leqslant \lambda_{2d}(\tilde{G_n} \cap B_k) \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$, άρα $\lambda_{2d}(\tilde{Z} \cap B_k) = 0$. Αφού $\tilde{Z} \cap B_k \nearrow \tilde{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda_{2d}(\tilde{Z}) = 0$.

Τώρα, αφού κάθε μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ γράφεται στη μορφή $E = A \setminus Z$, όπου το A είναι G_δ-σύνολο και το Z έχει μέτρο μηδέν, παρατηρώντας ότι $\tilde{E} = \tilde{A} \setminus \tilde{Z}$ και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι το $\tilde{E}$ είναι μετρήσιμο. □

4.4 Συνέλιξη

Έστω $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(x,y) = f(x-y)g(y), \tag{4.4.1}$$

η οποία είναι μετρήσιμη (βλέπε Πρόταση 4.3.9 και Πόρισμα 4.3.7). Ανήκει επίσης στον $L_1(\mathbb{R}^{2d})$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x,y)|\, d\lambda(x) = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|\, d\lambda(x) = |g(y)|\|f\|_1$$

(βλέπε Άσκηση 15 για την τελευταία ισότητα). Επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x,y)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\|f\|_1\, d\lambda(y) = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Από το θεώρημα Tonelli έπεται ότι $\phi \in L_1(\mathbb{R}^{2d})$ και από από το θεώρημα Fubini έχουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y)$$

ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και επιπλέον (αν θέσουμε την τιμή του ίση με μηδέν εκεί που δεν ορίζεται) σαν συνάρτηση του x ορίζει ένα στοιχείο του $L_1(\mathbb{R}^d)$.

Ορισμός 4.4.1 (συνέλιξη). Έστω $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Τότε, η συνάρτηση $f * g$ που ορίζεται σχεδόν παντού από την

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y) \tag{4.4.2}$$

ανήκει στον $L_1(\mathbb{R}^d)$ και λέγεται *συνέλιξη* των f και g.

Οι επόμενες προτάσεις περιγράφουν κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης.

Πρόταση 4.4.2. *Αν $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, τότε*

$$\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1. \tag{4.4.3}$$

Επιπλέον, η απεικόνιση $(f,g) \mapsto f * g$ είναι συνεχής (ως προς την $\|\cdot\|_1$).

Απόδειξη. Για τη συνάρτηση $\phi(x,y) = f(x-y)g(y)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, d\lambda(y) \right| d\lambda(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\phi(x,y)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1.\end{aligned}$$

Για τη συνέχεια της $f * g$ θα δείξουμε ότι αν οι $f_k, f, g_k, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ικανοποιούν τις $\|f_k - f\|_1 \to 0$ και $\|g_k - g\|_1 \to 0$, τότε $\|f_k * g_k - f * g\|_1 \to 0$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\|f_k * g_k - f * g\|_1 &= \|f_k * (g_k - g) + (f_k - f) * g\|_1 \leqslant \|f_k * (g_k - g)\|_1 + \|(f_k - f) * g\|_1 \\ &\leqslant \|f_k\|_1 \|g_k - g\|_1 + \|f_k - f\|_1 \|g\|_1 \to 0,\end{aligned}$$

αν συνδυάσουμε τις υποθέσεις με το γεγονός ότι $\sup_k \|f_k\|_1 < \infty$ (αφού η (f_k) είναι συγκλίνουσα στον $L_1(\mathbb{R}^d)$). □

Πρόταση 4.4.3. *Έστω $f, g, h \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Η συνέλιξη έχει τις εξής ιδιότητεσ:*

(i) *Είναι διγραμμική, δηλαδή*

(4.4.4) $$(f + g) * h = f * h + g * h \ \text{ και } \ f * (g + h) = f * g + f * h.$$

(ii) *Είναι μεταθετική, δηλαδή*

(4.4.5) $$f * g = g * f.$$

(iii) *Είναι προσεταιριστική, δηλαδή*

(4.4.6) $$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Απόδειξη. Το (α) είναι άμεσο. Λόγω της συνέχειας της $(f, g) \mapsto f * g$, για να αποδείξουμε τα (β) και (γ) σε πλήρη γενικότητα αρκεί να τα αποδείξουμε για τις συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, λόγω του Θεωρήματος 4.2.10.

(β) Για τη μεταθετικότητα, γράφουμε

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y) \, d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g(x - z) \, d\lambda(z) = (g * f)(x),$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $z = x - y$.

(γ) Για την προσεταιριστικότητα, έχουμε:

$$\begin{aligned}\big(f * (g * h)\big)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)(g * h)(y) \, d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y - z) h(z) \, d\lambda(z) \right) d\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y) g(y - z) \, d\lambda(y) \right) h(z) \, d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - z - u) g(u) \, du \right) h(z) \, d\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x - z) h(z) \, d\lambda(z) \\ &= \big((f * g) * h\big)(x),\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u = y - z$. □

Η τελευταία Πρόταση δίνει κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης συναρτήσεων στον $L_p(E)$, $p > 1$. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 4.4.4. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 < p < \infty$. Για κάθε $f \in L_p(E)$ ισχύει

$$\|f\|_p = \max\left\{\int_E fhd\lambda : \|h\|_q \leqslant 1\right\},$$

όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Για την απόδειξη, παρατηρούμε αρχικά ότι αν $h \in L_q(E)$ και $\|h\|_q \leqslant 1$, τότε

$$\left|\int_E fhd\lambda\right| \leqslant \|f\|_p\|h\|_q \leqslant \|f\|_p,$$

από την ανισότητα Holder. Άρα,

$$\|f\|_p \geqslant \sup\left\{\int_E fhd\lambda : \|h\|_q \leqslant 1\right\}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\|f\|_p \neq 0$ και αν ορίσουμε $h = \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}|f(x)|^{p-1}\text{sign}(f(x))$ (όπου $\text{sign}(a) = 1$ αν $a > 0$, $\text{sign}(a) = -1$ αν $a < 0$ και $\text{sign}(0) = 0$) τότε

$$\|h\|_q^q = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f(x)|^{(p-1)q}d\lambda(x) = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int_E |f(x)|^p d\lambda(x) = 1$$

και

$$\begin{aligned}\int_E f(x)h(x)d\lambda(x) &= \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}\int_E |f(x)|^p d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\|f\|_p^{p/q}}\|f\|_p^p = \|f\|_p^{p-p/q} = \|f\|_p.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

Πρόταση 4.4.5. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $1 < p < \infty$.*

(i) *Αν $f \in L_p(E)$ και $g \in L_1(E)$, τότε σχεδόν για κάθε x η συνάρτηση $y \mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς y, άρα η $f * g$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, $f * g \in L_p(E)$ και*

$$\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1.$$

(ii) *Αν $f \in L_p(E)$ και $g \in L_q(E)$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, τότε $f*g \in L_\infty(E)$ και*

$$\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Επίσης, η $f * g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\lim\limits_{|x|\to\infty}(f * g)(x) = 0$.

Απόδειξη. (i) Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $h \in L_q(E)$ με $\|h\|_q \leqslant 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |(f*g)(x)|\,|h(x)|\,d\lambda(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y)\right)|h(x)|\,d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|h(x)|\,d\lambda(x)\right)d\lambda(y)\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|g(y)|\,\|f\|_p\|h\|_q\,d\lambda(y)\\ &= \|f\|_p\|h\|_q\|g\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_1.\end{aligned}$$

Με βάση την Παρατήρηση 4.4.4, η $f*g$ ανήκει στον $L_p(E)$ και $\|f*g\|_p \leqslant \|f\|_p\|g\|_1$. Από την απόδειξη φαίνεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y)\right)^p d\lambda(x) < \infty,$$

άρα σχεδόν για κάθε x έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y) < \infty,$$

δηλαδή η συνάρτηση $y \mapsto f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς y.

(ii) Από την ανισότητα Holder, για κάθε x έχουμε

$$|(f*g)(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\,|g(y)|\,d\lambda(y) \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,$$

άρα

$$\|f*g\|_\infty = \sup\{|(f*g)(x)| : x \in \mathbb{R}^d\} \leqslant \|f\|_p\|g\|_q.$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon \in (0,1)$ και βρίσκουμε $u, v \in C_c(\mathbb{R}^d)$ με $\|f-u\|_p \leqslant \varepsilon$ και $\|g-v\|_q \leqslant \varepsilon$. Τότε,

$$\begin{aligned}\|u*v - f*g\|_\infty &\leqslant \|u*(v-g)\|_\infty + \|(u-f)*g\|_\infty\\ &\leqslant \|u\|_p\|v-g\|_q + \|u-f\|_p\|g\|_q \leqslant (\|f\|_p+1)\,\varepsilon + \|g\|_q\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Επιπλέον, η $u*v$ έχει συμπαγή φορέα, δηλαδή υπάρχει $M>0$ ώστε: αν $|x|>M$ τότε $(u*v)(x)=0$. Άρα, αν $|x|>M$ έχουμε

$$|(f*g)(x)| = |(f*g)(x) - (u*v)(x)| \leqslant \|f*g - u*v\|_\infty \leqslant C\varepsilon,$$

όπου $C = \|f\|_p + \|g\|_q + 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{|x|\to\infty}(f*g)(x) = 0$. □

4.5 Ασκήσεις

Ομάδα Α΄

1. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L_p(E)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

2. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

3. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(E)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

4. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(E)$.

5. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.

(α) Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(E) \subseteq L_p(E)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(E) \neq L_p(E)$.

6. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το $B = \{|f| > 1\}$ και τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$.

7. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E) \cap L_r(E)$ τότε $f \in L_q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.

8. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L_p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι

$$\log \|f\|_p \geqslant \int_E \log |f|.$$

9. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i| \right)^{c_i}.$$

10. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geqslant 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $r = tp + (1-t)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp} + \|f\|_q^{(1-t)q}.$$

11. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.

12. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mathbb{R})$ με $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n = 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

13. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(E)$. Δείξτε ότι

$$\int |f|^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, dt.$$

14. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο E. Δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.

15. Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim_{t\to 0} \int |f - f_t| = 0$.

16. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

17. Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$.

(γ) $f \in L_p(0,\infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

[*Υπόδειξη.* Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^a |\log x|^b$.]

18. Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F+x)) > 0$.

Ομάδα Β′

19. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\, dt = 1.$$

Έστω $g \in L_1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

20. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E)$ και $g \in L_q(E)$ τότε $fg \in L_r(E)$ και

$$\|fg\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

21. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

22. Έστω $r \geqslant 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.

23. Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\phi_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\, d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\|\phi_h\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\phi_h - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

24. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι $n \cdot \left(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\right) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.

25. Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

26. Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L_p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f)\chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f \, d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

27. Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L_p[0,\infty)$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^x f(t) \, d\lambda(t) \right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t) \, d\lambda(t) = 0.$$

28. Υποθέτουμε ότι $f \in L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$ και επιπλέον ότι

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

29. Έστω $f \in L_1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\int_A |f| \, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $f \in L_p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L_2[0,1]$;

30. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$(*) \qquad \int_E \exp\left(f(x)\right) \, d\lambda(x) = 1.$$

όπου $E = \text{supp}(f)$. Αποδείξτε ότι $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $\|f\|_p \leqslant Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την $(*)$ αλλά $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

31. Έστω $f \in L^1((0,1))$. Για $x \in (0,1)$ ορίζουμε

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} \, dt.$$

Δείξτε ότι $g \in L^1((0,1))$ και
$$\int_0^1 g(x)\,d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\,d\lambda(x).$$

32. Έστω $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x,y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)\times(0,1)$, δείξτε ότι $f \in L^1(0,1)$.

33. Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) *συζυγή εκθέτη* q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0,\infty]$ δείξτε ότι
$$\int fg\;d\mu \geqslant \left(\int f^p\;d\mu\right)^{1/p}\left(\int g^q\;d\mu\right)^{1/q}$$
και
$$\left(\int (f+g)^p\;d\mu\right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p\;d\mu\right)^{1/p} + \left(\int g^p\;d\mu\right)^{1/p}.$$

34. Δείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L_q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0,1]$.