Κεφάλαιο 7

L_2-σύγκλιση σειρών Fourier

Ομάδα Α΄

1. *(α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \textit{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \textit{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{k\neq 0} \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0) = 0$. Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(kx)\, d\lambda(x) \\
&= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k} + \frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin(kx)\, d\lambda(x) \\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - \frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\, d\lambda(x) \\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - i\frac{(-1)^k\pi}{k} + \frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k\neq 0} \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3} e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^6} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)^2 x^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^4}{30}.$$

Έπεται ότι
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$
Όμως,
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{64}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$
Συνεπώς,
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}.$$

2. *Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης*
$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$
στο $[0, 2\pi]$, είναι η
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$
Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε
$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i\pi\alpha}e^{-ix(\alpha+k)}d\lambda(x) \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin \pi\alpha}\left[\frac{-e^{-ix(\alpha+k)}}{i(k+\alpha)}\right]_0^{2\pi} = \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\frac{1-e^{-2\pi i\alpha}}{i(k+\alpha)} \\
&= \frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i(k+\alpha)\sin\pi\alpha} = \frac{2i\sin\pi\alpha}{2i(k+\alpha)\sin\pi\alpha} \\
&= \frac{1}{k+\alpha}.
\end{aligned}$$
Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$
Από την ταυτότητα του Parseval,
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)},$$

αφού $|f(x)| = \frac{\pi}{|\sin(\pi\alpha)|}$ για κάθε x.

3. *Έστω $0 < a \leqslant \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.*

(α) Δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \textit{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

Υπόδειξη. (α) Για $k = 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \mathbf{1}\, d\lambda(x) = \frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \cos(kx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{a} \cos(kx)\, d\lambda(x) \\ &= \left[\frac{\sin(kx)}{\pi k} \right]_0^a = \frac{\sin(ka)}{\pi k}.\end{aligned}$$

(β) Αν $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x, άρα

$$f(x) = S(f, x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Θέτοντας $x = 0$ στην ισότητα του (β) έχουμε

$$1 = f(0) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} = \frac{a}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{\pi k},$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\pi} \right) = \frac{\pi - a}{2}.$$

Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Parseval: έχουμε $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ για κάθε k, άρα

$$\|f\|_2^2 = |\widehat{f}(0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{a^2}{\pi^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{\pi^2 k^2}.$$

Αφού

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \mathbf{1}^2 d\lambda(x) = \frac{a}{\pi},$$

τελικά έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{\pi^2}\right) = \frac{\pi a}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a(\pi - a)}{2}.$$

4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι $f \equiv S(f)$. Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f,x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές και κατόπιν supremum πάνω απ' όλα τα $x \in \mathbb{R}$, καταλήγουμε στην

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f': $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$, $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$ και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, διαδοχικά, για να πάρουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k}\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(f')|^2\right)^{1/2}\right] \\ &\leqslant \sqrt{2/n}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2\right)^{1/2},\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γενονός ότι

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$$

και την στοιχειώδη ανισότητα $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{2}\sqrt{a+b}$. Επομένως,

$$\sqrt{n}\|f-s_n(f)\|_\infty\leqslant\sqrt{2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(f')|^2+|b_k(f')|^2\right)^{1/2}.$$

Από την ανισότητα του Bessel έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f')|^2+|b_k(f')|^2)$ συγκλίνει και το συμπέρασμα έπεται.

5. *Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f)>0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)|\leqslant C(f)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim_{|k|\to\infty}|k\widehat{f}(k)|=0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|<+\infty$.

Υπόδειξη. Η απάντηση είναι καταφατική σε όλα τα ερωτήματα. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f'}(k)|^2=\|f'\|_2^2<+\infty.$$

Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k)=ik\widehat{f}(k)$, συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2|\widehat{f}(k)|^2<+\infty.$$

Έπεται το (β) (και από αυτό, το (α)): αφού η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\lim_{|k|\to\infty}|k\widehat{f}(k)|=0.$$

Για το (γ), από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(k)|\right)^2&=\left(\sum_{k\neq 0}(k|\widehat{f}(k)|)\frac{1}{k}\right)^2\\&\leqslant\left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k\neq 0}k^2|\widehat{f}(k)|^2\right)<+\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

6. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 d\lambda(x),$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a,b\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x) = 0.$$

Από την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) &= \|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \\ &= \sum_{k\neq 0} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{f'}(k)|^2}{k^2} \\ &\leqslant \sum_{k\neq 0} |\widehat{f'}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 d\lambda(x).\end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) d\lambda(x) = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi} = 0$$

από την 2π-περιοδικότητα της f. Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k\geqslant 2$ (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα αν

$$f(x) = \widehat{f}(1)e^{ix} + \widehat{f}(-1)e^{-ix}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχουν $a,b\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

7. *(α) Έστω $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\,d\lambda(t) = 0$. Δείξτε ότι*

$$\left|\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)\,d\lambda(t)\right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t)\int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 d\lambda(t).$$

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 d\lambda(t) \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Υπόδειξη. (α) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, d\lambda(t) \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 d\lambda(t).$$

Αφού $\int_0^{2\pi} g(t) d\lambda(t) = 0$, από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 d\lambda(t) \leqslant \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 d\lambda(t),$$

και έπεται το ζητούμενο.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $[a,b] = [0,\pi]$. Αφού $f(0) = f(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση με $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\lambda(t) = 0$, θέτοντας $f(x) = -f(-x)$ για $x \in [-\pi, 0]$. Η επέκταση της f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας το (α) με $g = f$, παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, d\lambda(t) \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η f είναι περιττή, συμπεραίνουμε ότι

$$(*) \qquad \int_0^{\pi} |f(t)|^2\, d\lambda(t) \leqslant \int_0^{\pi} |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Αν το $[a,b]$ είναι τυχόν, θεωρούμε την $F : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ με $F(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right)$. Τότε, η $(*)$ ισχύει για την F, δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left| f\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right) \right|^2 d\lambda(x) &= \int_0^{\pi} |F(x)|^2\, d\lambda(x) \leqslant \int_0^{\pi} |F'(x)|^2 d\lambda(x) \\ &= \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left| f'\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right) \right|^2 d\lambda(x). \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = a + \frac{b-a}{\pi} x$, παίρνουμε

$$\int_a^b |f(t)|^2\, d\lambda(t) \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Ομάδα Β′

8. *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας* $\{f_n\}$ *ολοκληρώσιμων συναρτήσεων* $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ *ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ *η ακολουθία* $\{f_n(x)\}$ *δεν συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{I_n\}$ υποδιαστημάτων του $[0, 2\pi]$ με τις ακόλουθες ιδιότητεσ:

(i) Για κάθε $x \in [0, 2\pi]$, τα σύνολα $A_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in I_n\}$ και $B_x = \{n \in \mathbb{N} : x \notin I_n\}$ είναι άπειρα.

(ii) $\ell(I_n) \to 0$, όπου $\ell(I)$ είναι το μήκος ενός διαστήματος I.

Ένας τρόπος να ορίσουμε μια τέτοια ακολουθία είναι ο εξής: παίρνουμε $I_1 = [0, 2\pi]$, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0, 2\pi]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα I_2 και I_3 μήκους π, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0, 2\pi]$ σε τέσσερα διαδοχικά διαστήματα $I_4, \ldots, I_7$ μήκους $\pi/2$ και ούτω καθεξής.

Ορίζουμε $f_n = \chi_{I_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell(I_n)}{2\pi} = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ έχουμε ότι τα A_x και B_x είναι άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, άρα μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών (k_n) και (r_n) στα A_x και B_x αντίστοιχα. Τότε,

$$f_{k_n}(x) = \chi_{I_{k_n}}(x) = 1 \to 1 \ \text{ και } \ f_{r_n}(x) = \chi_{I_{r_n}}(x) = 0 \to 0,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

9. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} \, d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα του n-οστού πυρήνα του Dirichlet στο $[-\pi, \pi]$ είναι ίσο με 2π. Δηλαδή,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin \frac{t}{2}} \, d\lambda(t) = 2\pi.$$

Γράφουμε

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\,d\lambda(t) + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,d\lambda(t),$$

όπου $g(t) = \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}$. Παρατηρούμε ότι η g μπορεί να οριστεί στο 0 ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,d\lambda(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t/2)\sin(nt)\,d\lambda(t)\\ &\quad+\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t/2)\cos(nt)\,d\lambda(t)\to 0\end{aligned}$$

όταν $n\to\infty$, από το Λήμμα Riemann–Lebesgue για τις συνεχείς συναρτήσεις $g(t)\cos(t/2)$ και $g(t)\sin(t/2)$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\,d\lambda(t) = 2\pi.$$

Όμως,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\,d\lambda(t) = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{2\sin x}{x}\,d\lambda(x).$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\,d\lambda(x)\to\frac{\pi}{2}$$

όταν $n\to\infty$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι υπάρχει το

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,d\lambda(x) = \lim_{M\to\infty}\int_0^{M} \frac{\sin x}{x}\,d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

10. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, όπου $K>0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t>0$ ορίζουμε $g_t(x)=f(x+t)-f(x-t)$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2\leqslant K^2t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g_t}(k)|^2.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της g_t: είναι

$$\widehat{g_t}(k) = \widehat{f(x+t)}(k) - \widehat{f(x-t)}(k) = e^{ikt}\widehat{f}(k) - e^{-ikt}\widehat{f}(k) = (2i\sin kt)\widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Lipschitz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t)-f(x-t)|^2 d\lambda(x)\\ &\leqslant \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} K^2(2t)^2 d\lambda(x) = K^2t^2.\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $t = \pi/2^{p+1}$ έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leqslant \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geqslant \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι¨ αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|<+\infty$. Χρησιμοποιώντας το (β) και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|\leqslant\sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\frac{K\pi}{\sqrt{2}2^p}=\frac{K\pi}{\sqrt{2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^p}<+\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|=\sum_{k=-1}^{1}|\widehat{f}(k)|+\sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)|<+\infty.$$

11. *Έστω $\alpha>1/2$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Holder*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|^{\alpha}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, όπου $K>0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της Άσκησης 10. Για κάθε $t>0$ ορίζουμε $g_t(x)=f(x+t)-f(x-t)$ και, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_t(x)|^2d\lambda(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}4|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Holder παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|^2d\lambda(x)\\ &\leqslant \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}K^2(2t)^{2\alpha}d\lambda(x)=K^2t^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $t=\pi/2^{p+1}$, έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2\leqslant\frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4}\leqslant\left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right|\leqslant\frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})|\geqslant\sin(\pi/4)=1/\sqrt{2}$ γι¨ αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2\leqslant\frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{2K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^{\alpha p+\alpha}} = \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)p}} < +\infty,\end{aligned}$$

διότι $\alpha - \frac{1}{2} > 0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1} |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

12. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Υπόδειξη. Για την $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \pi - x$ έχουμε $\widehat{g}(0) = 0$ και $\widehat{g}(k) = \frac{(-i)}{k}$ για κάθε $k \neq 0$. Έχουμε $f, g \in L_2(\mathbb{T})$, άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, d\lambda(x) = \langle g, f \rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k} (\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k} (-i) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.\end{aligned}$$

13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Υποθέτουμε ότι $a_0 = 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Επεκτείνουμε την $\ln(2\sin\frac{x}{2})$ σε μια άρτια 2π-περιοδική συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$. Εξηγήστε πρώτα ότι, γενικά, αν $f,g\in L_2(\mathbb{T})$ και οι f,g παίρνουν πραγματικές τιμές, τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)d\lambda(x)=\frac{1}{2}a_0(f)a_0(g)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)a_k(g)+b_k(f)b_k(g)).$$

Αφού η g είναι άρτια, έχουμε $b_k(g)=0$ για κάθε $k\geqslant 1$. Άρα,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)d\lambda(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)a_k(g).$$

Τέλος, για κάθε $k\geqslant 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_k(g) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\cos kx\,d\lambda(x)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln(2\sin\frac{x}{2})\cos kx\,d\lambda(x)\\
&= -\frac{2}{k\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin kx\cos\frac{x}{2}}{2\sin(x/2)}\,d\lambda(x)\\
&= -\frac{1}{k\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(k+1/2)x+\sin(k-1/2)x}{2\sin(x/2)}\,d\lambda(x)\\
&= -\frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_k(x)+D_{k-1}(x)}{2}\,d\lambda(x)=-\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

14. *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[w_1(f,\pi/n)]^2<\infty,$$

όπου

$$w_1(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x+t)-f(t)|\,d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι $f\in L^2(\mathbb{T})$.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Riesz-Fisher αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2$ συγκλίνει. Έστω $0\neq k\in\mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{f(\cdot+\pi/k)}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t+\pi/k)e^{-ikt}d\lambda(t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(s)e^{-iks}ds=-\widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$2|\widehat{f}(k)|=|\widehat{f(\cdot+\pi/k)}(k)-\widehat{f}(k)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t+\pi/k)-f(t)|\,d\lambda(t)=w_1(f,\pi/k).$$

Χρησιμοποιώντας και την $w_1(f,x) = w_1(f,-x)$ (η οποία προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητής $s = x+t$ στο $\int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)|\,d\lambda(t)$) έχουμε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{w_1(f,\pi/|k|)}{2}$$

για κάθε $k \neq 0$. Επίσης, $|\widehat{f}(0)| \leqslant \|f\|_1$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant |\widehat{f}(0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[w_1(f,\pi/k)]^2}{4} \leqslant \|f\|_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} [w_1(f,\pi/k)]^2 < \infty$$

από την υπόθεση.

15. *Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε*

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Άρα,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\,d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|^2}{n(n+1)^2} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k=-N}^{N} |k|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \sum_{n=|k|}^{N} \frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=|k|}^{N} \frac{1}{n(n+1)^2} &= \sum_{n=|k|}^{N} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\
&\leqslant \sum_{n=|k|}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \sum_{n=|k|+1}^{N+1} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \frac{1}{|k|} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{|k|+1} + \frac{1}{N+2} \\
&\leqslant \frac{1}{|k|(|k|+1)} \leqslant \frac{1}{|k|^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\,d\lambda(x) \leqslant \sum_{k=-N}^{N} |k|^2|\widehat{f}(k)|^2\,\frac{1}{|k|^2} = \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|F\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}\right)d\lambda(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\,d\lambda(x) \leqslant \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

16. *Έστω* $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n,m \geqslant 0$. *Δείξτε ότι*

$$\left|\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{x_ny_m}{n+m+1}\right| \leqslant \pi\left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}|y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $\phi : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ με $\phi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ότι $\widehat{\phi}(k) = \frac{1}{k+1}$ για κάθε $k \geqslant 0$ και $\|\phi\|_\infty = \pi$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=0}^{N}\frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} &= \sum_{n,m=0}^{N}|x_n|\,|y_m|\,\widehat{\phi}(n+m)\\ &= \sum_{n,m=0}^{N}|x_n|\,|y_m|\,\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\phi(t)e^{-i(n+m)t}d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\left(\sum_{n=0}^{N}|x_n|e^{-int}\right)\left(\sum_{m=0}^{N}|y_m|e^{-imt}\right)\phi(t)\,d\lambda(t).\end{aligned}$$

Δηλαδή, αν ορίσουμε $\alpha_N(t) = \sum_{n=0}^{N}|x_n|e^{-int}$ και $\beta_N(t) = \sum_{m=0}^{N}|y_m|e^{-imt}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=0}^{N}\frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}\alpha_n(t)\beta_n(t)\phi(t)d\lambda(t)\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|\alpha_N(t)|\,|\beta_N(t)|\,\|\phi\|_\infty d\lambda(t)\\ &\leqslant \|\phi\|_\infty\|\alpha_N\|_2\|\beta_N\|_2\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού

$$\|\alpha_N\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \quad \text{και} \quad \|\beta_N\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|^2\right)^{1/2},$$

παίρνουμε

$$\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} \leqslant \|\phi\|_\infty \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Αφού $\|\phi\|_\infty = \pi$, έπεται ότι

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Ειδικότερα, έχουμε το ζητούμενο.