Κεφάλαιο 6

Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

Ομάδα Α΄

1. *Έστω* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε* $s_n = c_1 + \cdots + c_n$*. Δείξτε ότι:*

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *συγκλίνει στον* s*, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον* s*.*

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ *είναι Cesàro αθροίσιμη στον* s*, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον* s*.*

Υπόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Θέτοντας $s_0 = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= \sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s_{k-1}) r^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - r\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\
&= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $s_n = c_1 + \cdots + c_n \to 0$. Επειδή η (s_k) είναι συγκλίνουσα είναι και φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_k| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s_k \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|s_k| < \varepsilon$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές στην $(*)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| &\leqslant (1-r)\sum_{k=`}^{k_0} |s_k| r^k + (1-r)\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |s_k| r^k \\ &\leqslant (1-r)Mr\frac{1-r^{k_0}}{1-r} + \varepsilon(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \\ &\leqslant M(1-r^{k_0}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $r_0 \in (0,1)$ ώστε $M(1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$, τότε για κάθε $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| < 2\varepsilon,$$

το οποίο δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to 0$ καθώς $r \to 1^-$.

Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας την $(*)$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s) r^k + (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty}(s_k - s) r^k + (1-r)s\cdot\frac{r}{1-r} \\ &\to 0 + s = s.\end{aligned}$$

Για το (β): αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(**) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

Έχουμε ότι $\sigma_{k+1} = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_k}{k+1}$. Άρα, θέτοντας $\sigma_0 = 0$ έχουμε $s_k = (k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k$ για

$k = 0, 1, \dots$. Τότε, χρησιμοποιώντας και την πρώτη ταυτότητα από το (α), έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k]r^k \\ &= (1-r)\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k\right] \\ &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k \\ &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - s)kr^k + (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} skr^k \\ &= (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - s)kr^k + rs,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, έχουμε $\sigma_k - s \to 0$. Ειδικότερα, η $(\sigma_k - s)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $B > 0$ ώστε $|\sigma_k - s| \leqslant B$ για κάθε k. Αφού $\sigma_k - s \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|\sigma_k - s| < \varepsilon$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k - s\right| &\leqslant (1-r)^2\sum_{k=1}^{k_0}|\sigma_k - s|kr^k + (1-r)^2\sum_{k=k_0+1}^{\infty}|\sigma_k - s|kr^k + |s - rs| \\ &\leqslant (1-r)k_0B(1-r^{k_0}) + \varepsilon r + (1-r)|s|.\end{aligned}$$

Έστω $r_0 \in (0,1)$ ώστε $Bk_0(1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$ και $(1-r_0)|s| < \varepsilon$. Τότε, αν $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon r + (1-r)|s| < 3\varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to s$ καθώς $r \to 1^-$.

2. *Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι $s_n(f) = (f * D_n)$ και ότι η πράξη $*$ της συνέλιξης είναι προσεταιριστική και μεταθετική:

$$s_n(f) * g = (f * D_n) * g = f * (D_n * g) = f * (g * D_n) = f * s_n(g).$$

Όμοια δείχνουμε και την άλλη ισότητα.

3. *Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,*

$$\lim_{\delta\to 0} \|K_\delta\|_p = \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_\delta(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = +\infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Για κάθε $0 < \eta < \pi$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\eta = \chi_{[-\eta,\eta]}$. Από την ανισότητα Holder παίρνουμε

$$(\eta/\pi)^{1/q} \|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_\eta(t)|^q \, d\lambda(t) \right)^{1/q} \|K_\delta\|_p \geqslant \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(x) g_\eta(x) \, d\lambda(x) \right|.$$

Από την άλλη πλευρά, από τις ιδιότητες των καλών πυρήνων παίρνουμε

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(x) g_\eta(x) \, d\lambda(x) \right| = \left| 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\eta<|x|\leqslant\pi} K_\delta(x) \; d\lambda(x) \right|.$$

Έστω $M > 0$. Υπάρχει $\eta \in (0, \pi)$ ώστε $(\pi/\eta)^{1/q} > 2M$. Επιπλέον, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε αν $0 < \delta < \delta_0$ τότε $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\eta<|x|\leqslant\pi} K_\delta(x) \, d\lambda(x) \right| < 1/2$ (εξηγήστε γιατί). Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $0 < \delta < \delta_0$ τότε

$$\|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_\delta(x)|^p \, d\lambda(x) \right)^{1/p} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $\|K_\delta\|_p \to +\infty$ καθώς $\delta \to 0$.

4. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε το n-οστό μερικό άθροισμα Cesàro της f τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma_{2n-1}(f,0) = \frac{1}{2n}\sum_{m=0}^{2n-1} s_m(f,0) \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{m=n}^{2n-1} s_m(f,0) \geqslant \frac{1}{2}s_n(f,0),$$

διότι $s_m(f,0) = a_0/2 + a_1 + \cdots + a_m$ και $a_k \geqslant 0$ για κάθε k, άρα $s_m(f,0) \geqslant s_n(f,0)$ για κάθε $m = n, n+1, \ldots, 2n-1$. Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι

$$|\sigma_{2n-1}(f,x)| \leqslant \|f * F_{2n-1}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|F_{2n-1}\|_1 = \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι άνω φραγμένα:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant 2s_n(f,0) \leqslant 4\|f\|_\infty,$$

που αποδεικνύει τη σύγκλιση της σειράς.

5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την*

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η g είναι 2π-περιοδική, και $g(x) = g(x + 2\sqrt{2}\pi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x-2\sqrt{2}\pi)e^{-ik(x-2\sqrt{2}\pi)}d\lambda(x) \\ &= e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x) \\ &= e^{ik2\sqrt{2}\pi}\widehat{g}(k).\end{aligned}$$

Αν $k \neq 0$ έχουμε $e^{ik2\sqrt{2}\pi} \neq 1$, άρα $\widehat{g}(k) = 0$. Έπεται ότι $g(x) = \widehat{g}(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι σταθερή. Άρα, και η f είναι σταθερή.

6. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x-0) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \textit{και} \quad f(x+0) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-}(f * P_r)(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x-0)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x+0)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η P_r είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f * P_r)(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y)\, d\lambda(y) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y) - f(x+0)]\, d\lambda(y) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y) - f(x-0)]\, d\lambda(y).\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y) - f(x+0)]\, d\lambda(y)\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x+0)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\,|f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y) &\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\, d\lambda(y) = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y) &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,(|f(x-y)| + |f(x+0)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\, d\lambda(y) \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $r \to 1^-$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $r_0 \in (0,1)$ ώστε, για κάθε $r_0 \leqslant r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\,|f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y) - f(x+0)]\, d\lambda(y) \to 0$$

καθώς το $r \to 1^-$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y) - f(x-0)]\, d\lambda(y) \to 0$$

καθώς το $r \to 1^-$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

7. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2} \right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, d\lambda(t) = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγι- στικού θεωρήματος Weierstrass.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)d\lambda(t) = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} Q_n(t)d\lambda(t) = 2\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)d\lambda(t) \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

Έστω $0 < \delta < \pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2} \leqslant \frac{1+\cos \delta}{2} < 1$ για κάθε $t \in [\delta, \pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)d\lambda(t) \leqslant 2\pi\alpha_n \left(\frac{1+\cos\delta}{2} \right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leqslant 4(n+1)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\theta^n = 0$ για $\theta = \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

Γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2} \right)^n = 2\int_0^{\pi} \cos^{2n}(t/2)d\lambda(t) = 4\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} y\, d\lambda(y).$$

Η $f(y) = \cos y$ είναι κοίλη στο $[0, \pi/2]$ και $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$. Συνεπώς, $\cos y \geqslant 1 - \frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y \in [0, \pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geqslant 4\int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{2y}{\pi} \right)^{2n} d\lambda(y) = 2\pi \int_0^1 (1-s)^{2n} ds = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leqslant \frac{2n+1}{2}$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f * Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε γιατί). Έτσι, έχουμε απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$G_n(x) = F_n(x) \sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leqslant 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

Υπόδειξη. Τα δύο μέλη της ισότητας $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ είναι γραμμικά ως προς T, αρκεί λοιπόν να την επαληθεύσουμε για όλες τις συναρτήσεις $T_k(x) = e^{ikx}$, $|k| \leqslant n$. Έχουμε

$$T_k'(x) = ike^{ikx}$$

και

$$\begin{aligned}
(T_k * G_n)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T_k(x-y)G_n(y)\,d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}F_n(y)\sin(ny)\,d\lambda(y) \\
&= \sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)}e^{isy}\sin(ny)\,d\lambda(y) \\
&= e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)y}\frac{e^{iny}-e^{-iny}}{2i}\,d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2i}e^{ikx}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(1-\frac{|s|}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [e^{i(s-k+n)y}-e^{i(s-k-n)y}]\,d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k+n)y}d\lambda(y) = 0$$

εκτός αν $s = k - n$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k-n)y} d\lambda(y) = 0$$

εκτός αν $s = n + k$. Το πρώτο μπορεί να συμβεί μόνο αν $k > 0$ και το δεύτερο μόνο αν $k < 0$. Συνεπώς, αν $0 < k < n$ έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = \frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n-k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$

Αν $-n < k < -1$, έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = -\frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n+k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$

Σε κάθε περίπτωση, αν $k \neq 0$ παίρνουμε

$$(*) \qquad T_k'(x) = -2n(T_k * G_n)(x).$$

Αν πάλι $k = 0$, τα δύο μέλη της $(*)$ είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, έχουμε αποδείξει την $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n.

Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |T'(x)| &= 2n|(T * G_n)(x)| \leqslant 2n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T(x-y)|\,|F_n(y)\sin ny|\,d\lambda(y) \\ &\leqslant 2n\|T\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,d\lambda(y) = 2n\|T\|_\infty. \end{aligned}$$

9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g_n := s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)$. Χρησιμοποιώντας την $\sigma_n = \frac{s_0 + \cdots + s_{n-1}}{n}$ και την υπόθεση, θα δείξουμε ότι $g_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)| &= \frac{|(s_0 - s_n) + (s_1 - s_n) + \cdots (s_{n-1} - s_n)|}{n} \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} 1\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} k(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k|a_k \cos kx + b_k \sin kx|.
\end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την στοιχειώδη ανισότητα $|a\cos\theta + b\sin\theta| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $\theta \in \mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε:

$$\|s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$. Από το θεώρημα του Fejér ξέρουμε $\|f - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty \to 0$. Από την τριγωνική ανισότητα

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \|f - \sigma_{n+1}(f)\|_\infty + \|\sigma_{n+1}(f) - s_n(f)\|_\infty$$

έπεται το ζητούμενο.

10. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L_1(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα*

$$\|T\| := \sup\{\|T(g)\|_1 : \|g\|_1 \leqslant 1\} = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\|T(g)\|_1 = \|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1,$$

άρα ο T είναι φραγμένος τελεστής και $\|T\| \leqslant \|f\|_1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\|F_n\|_1 = 1$, άρα

$$\|T\| \geqslant \|T(F_n)\|_1 = \|F_n * g\|_1 = \|\sigma_n(g)\|_1.$$

Αφού $\|\sigma_n(g)-g\|_1 \to 0$, έχουμε $\|\sigma_n(g)\|_1 \to \|g\|_1$. Συνεπώς,

$$\|T\| \geqslant \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(g)\|_1 = \|g\|_1.$$

11. *Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει*

$$|s_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \widehat{f}(k)e^{ikx} \quad \text{και} \quad s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Άρα,

$$s_n(f,x) = \sigma_{n+1}(f,x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Αφού $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε k, έπεται ότι

$$\begin{aligned} |s_n(f,x)| &\leqslant |\sigma_{n+1}(f,x)| + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k\widehat{f}(k)|}{n+1}|e^{ikx}| \leqslant \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty + \frac{(2n+1)A}{n+1} \\ &\leqslant \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty + 2A. \end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty = \|f * F_{n+1}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|F_{n+1}\|_1 = \|f\|_\infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.

12. *Έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα*

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Για κάθε $k \neq 0$ και $n \geqslant |k|$ έχουμε

$$(\widehat{\sigma_n(f) - f})(k) = \left(1 - \frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = -\frac{|k|}{n}\widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$|\widehat{f}(k)| = \frac{n}{|k|}\,|(\widehat{\sigma_n(f) - f})(k)| \leqslant \frac{n}{|k|}\|\sigma_n(f) - f\|_1 \leqslant \frac{n}{|k|}\|\sigma_n(f) - f\|_p.$$

Από την $n\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$ έπεται ότι

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{1}{|k|} \cdot n\|\sigma_n(f) - f\|_p \to \frac{1}{|k|} \cdot 0 = 0,$$

δηλαδή $\widehat{f}(k) = 0$. Έπεται ότι $f \equiv \widehat{f}(0)$ (όλοι οι συντελεστές Fourier της $f - \widehat{f}(0)$ είναι ίσοι με μηδέν, και $f - \widehat{f}(0) \in L_p(\mathbb{T})$).

13. *Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L_1(\mathbb{T})$,*

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$(\widehat{g - g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - (\widehat{g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k)\widehat{f_n}(k) = \widehat{g}(k)(1 - \widehat{f_n}(k)).$$

Άρα,

$$|\widehat{g}(k)|\,|1 - \widehat{f_n}(k)| = |(\widehat{g - g * f_n})(k)| \leqslant \|g - g * f_n\|_1 \to 0.$$

Θεωρώντας την $g(x) = e^{ikx}$ (για την οποία $\widehat{g}(k) = 1$) παίρνουμε $|1 - \widehat{f_n}(k)| \to 0$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$.

14. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά*

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t) = \int_A \left(\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikt} \right) d\lambda(t) = \int_A s_n(f,t)\, d\lambda(t).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} := \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} S_m &= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \int_A s_m(f,t)\, d\lambda(t) \\ &= \int_A \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} s_m(f,t) \right) d\lambda(t) = \int_A \sigma_{n+1}(f,t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f) - f\|_1 \to 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_A \sigma_{n+1}(f,t) d\lambda(t) - \int_A f(t) d\lambda(t) \right| &\leqslant \int_A |\sigma_{n+1}(f,t) - f(t)|\, d\lambda(t) \\ &\leqslant \|\sigma_{n+1}(f) - f\|_1 \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\sigma_{n+1} \to \int_A f(t)\, d\lambda(t)$, δηλαδή η σειρά $\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

Ομάδα Β′

15. *Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M>0$ ώστε*

$$|\widehat{f}(k)|\leqslant\frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι η f προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$(*)\qquad g(x)=\sum_{k=1}^{N}t_k\chi_{[b_s,b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi=b_1<b_2<\cdots<b_{N+1}=\pi$ και $-\|f\|_\infty\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_N\leqslant\|f\|_\infty$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χωρίστε το $[-\|f\|_\infty,\|f\|_\infty]$ σε m διαδοχικά διαστήματα $I_1,\ldots,I_m$ του ιδίου μήκους, και θεωρήστε τα $J_r=f^{-1}(I_r)$, $r=1,\ldots,m$. Επειδή η f είναι αύξουσα, κάθε J_r είναι διάστημα ή μονοσύνολο ή το κενό σύνολο (εξηγήστε γιατί). Προκύπτει έτσι μια διαμέριση $-\pi=b_1<b_2<\cdots<b_{N+1}=\pi$ του $[-\pi,\pi]$, όπου $[b_s,b_{s+1}]$ είναι εκείνα τα J_r που είναι διαστήματα. Αν ορίσουμε $t_s=\inf\{f(x):b_s\leqslant x\leqslant b_{s+1}\}$, τότε $|f(x)-t_s|\leqslant\frac{1}{m}$ στο (b_s,b_{s+1}). Επίσης, $-\|f\|_\infty\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_N\leqslant\|f\|_\infty$, διότι η f είναι αύξουσα. Αν ορίσουμε $g_m(x)=\sum_{s=1}^{N}t_s\chi_{[b_s,b_{s+1}]}(x)$, τότε

$$(**)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g_m(x)|\,dx\leqslant\frac{1}{m}.$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $M>0$ ώστε για κάθε συνάρτηση g της μορφής $(*)$ και για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ να ισχύει $|k\widehat{g}(k)|\leqslant M$, τότε από την $(**)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}|k\widehat{f}(k)| &\leqslant |k\widehat{g_m}(k)|+|k||\widehat{f}(k)-\widehat{g_m}(k)|\\ &\leqslant M+|k|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g_m(x)|\,dx\leqslant M+|k|\frac{1}{m}\end{aligned}$$

για κάθε $m\in\mathbb{N}$, και αφήνοντας το $m\to\infty$, βλέπουμε ότι $|k\widehat{f}(k)|\leqslant M$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h:=\chi_{[b_s,b_{s+1}]}$: αν $k\neq0$, έχουμε

$$\widehat{h}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{b_s}^{b_{s+1}}e^{-ikx}dx=\frac{e^{-ikb_s}-e^{-ikb_{s+1}}}{2\pi ik}.$$

Έπεται ότι, για την $g(x) = \sum_{s=1}^{N} t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$,

$$\begin{aligned} 2\pi i k \widehat{g}(k) &= \sum_{s=1}^{N} t_s (e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}) \\ &= t_1 e^{-ib_1 x} - t_N e^{-ib_{N+1} x} + \sum_{s=2}^{N} e^{-ikb_s}(t_s - t_{s-1}). \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} 2\pi |k\widehat{g}(k)| &\leqslant |t_1| + |t_N| + \sum_{k=2}^{N} (t_s - t_{s-1}) = |t_1| + |t_N| + (t_N - t_1) \\ &\leqslant 4\|f\|_\infty, \end{aligned}$$

διότι $t_N - t_1 \leqslant \|f\|_\infty - (-\|f\|_\infty) = 2\|f\|_\infty$. Έπεται το ζητούμενο, με $M = 2\|f\|_\infty/\pi$.

16. *Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant A|x|^\alpha, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant \frac{\pi + 1}{1 - \alpha} \frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant 2\pi A \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $\alpha = 1$ (η περίπτωση $0 < \alpha < 1$ είναι παρόμοια). Αν $F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx)}{\sin(x/2)}\right)^2$ ο πυρήνας του Fejér τότε μπορούμε να γράψουμε $\sigma_n(f)(x) = (f * F_n)(x)$. Επομένως, αν $x \in \mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f,x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-t) - f(x)] F_n(t)\, d\lambda(t) \right| \\ &\leqslant \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| F_n(t)\, d\lambda(t) \\ &\leqslant \frac{M}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|t|}{|\sin(t/2)|} \frac{\sin^2(nt)}{|\sin(t/2)|}\, d\lambda(t), \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την συνθήκη Lipschitz για την f και το ότι η $\{F_n\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων που παίρνει θετικές τιμές. Καθώς, η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{\sin(t/2)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \pi)$, παίρνουμε $|\frac{t}{\sin(t/2)}| \leqslant \pi$ για κάθε $|t| \leqslant \pi$. Έτσι, βρίσκουμε:

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{M}{2n} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin nt}{\sin(t/2)} \right| d\lambda(t),$$

διότι $|\sin nt| \leqslant 1$. Τέλος, αν μιμηθούμε την απόδειξη της

$$\|D_n\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, d\lambda(t) \leqslant C\log n,$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right| d\lambda(t) \leqslant C\log n$$

και το συμπέρασμα έπεται. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin(t/2) > t/\pi$ για $0 < t < \pi$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right| d\lambda(t) &\leqslant 2\pi\int_0^{\pi} \frac{|\sin(nt)|}{t}\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, d\lambda(t) + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi^2 + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi}\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_0^{\pi} |\sin t|\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leqslant c\log n
\end{aligned}$$

για κάποια αριθμητική σταθερά $c > 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant c' M\frac{\log n}{n}.$$

17. *Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητεσ: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,*

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $b_n = a_{n-1} - a_n$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} - a_n) = a_0 < \infty.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} nb_{n+1} = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\, F_n(x).$$

Αφού $F_n \geqslant 0$ και $\int_{\mathbb{T}} F_n(x)d\lambda(x) = 2\pi$ για κάθε $n \geqslant 1$, από το θεώρημα Beppo-Levi έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{N} n(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} b_n - Nb_{N+1} \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Τέλος, υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \lim_{N\to\infty} \widehat{f_N}(k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=|k|}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \\
&= \sum_{n=|k|}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}) - |k| \sum_{n=|k|}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) = |k|b_{|k|} + \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n - |k|b_{|k|} \\
&= \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n = a_{|k|}.
\end{aligned}$$

18. *(α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την απολύτως συνεχή συνάρτηση $F(t) = (-i)\int_0^t f(s)ds$. Η F είναι 2π-περιοδική, διότι $\widehat{f}(0) = 0$ από την υπόθεση, άρα $F(2\pi) = 0 = F(0)$. Έχουμε

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\frac{e^{-ikx}}{k}d\lambda(x) = \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

για κάθε $k \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\sigma_{n+1}(F,0) = \widehat{F}(0) + \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\widehat{f}(k)}{k} \to F(0).$$

Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\widehat{f}(k)}{k} = \lim_{n\to\infty} \left(2\sum_{k=1}^{n} \frac{\widehat{f}(k)}{k} - \frac{2}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)\right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k)$ και $\widehat{f}(0) = 0$. Όμως, $\widehat{f}(k) \to 0$ άρα

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{n}{n+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k) \to 0.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$. Τότε, $\widehat{2if}(k) = a_k$. Οι συντελεστές Fourier της $g = 2if$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του (α), άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty.$$

19. *Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ και $b_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 1$. Δείξτε ότι*

$$|s_n(f,x)| \leqslant 5M$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$.

Υπόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} kb_k.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $|\sigma_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty \leqslant M$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$|\sigma_n(f,x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| F_n(t)\, d\lambda(t) \leqslant M\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, d\lambda(t) = M.$$

Επιπλέον, είναι $\sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})b_k \sin kx$. Οπότε, για $x_n = \pi/(4n)$ και $2n$ αντί n παίρνουμε

$$M \geqslant \sigma_{2n+1}(f,x_n) = \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)b_k\sin(kx_n) \geqslant \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)b_k\frac{k}{2n},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\sin x > (2/\pi)x$ για $0 < x < \pi/2$ και το γεγονός ότι $b_k \geqslant 0$. Συνεπώς, είναι

$$2nM \geqslant \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)kb_k \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}kb_k,$$

χρησιμοποιώντας ακόμη μια φορά το γεγονός ότι $b_k \geqslant 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k \leqslant 4nM.$$

Συνδυάζοντας με τα παραπάνω βρίσκουμε:

$$|s_n(f,x)| \leqslant |\sigma_{n+1}(f,x)| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} kb_k \leqslant M + \frac{4nM}{n+1} < 5M,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.