Κεφάλαιο 5

Σειρές Fourier

Ομάδα Α΄

1. *Έστω $T(x) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{n}(\nu_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι:*

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\nu_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\nu_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, d\lambda(x).$$

Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, d\lambda(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\cos(-ky)\, d\lambda(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [-T(y)\cos ky]\, d\lambda(y)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\cos ky\, d\lambda(y) = -\nu_k.\end{aligned}$$

Από την $\nu_k = -\nu_k$ έπεται ότι $\nu_k = 0$. Για $k = 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\, d\lambda(y)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\, d\lambda(y) = -\nu_0,\end{aligned}$$

άρα, $\nu_0 = 0$.

(β) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\, d\lambda(x).$$

Αφού το T είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\sin(-ky)\,d\lambda(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[T(y)(-\sin ky)]\,d\lambda(y)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\sin ky\,d\lambda(y) = -\mu_k.$$

Από την $\mu_k = -\mu_k$ έπεται ότι $\mu_k = 0$.

2. *Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Με επαγωγή ως προς k. Έχουμε $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = p_1(\cos x)$, όπου $p_1(t) = 1 - t^2$, πολυώνυμο βαθμού 2.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_k(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p_k(\cos x)$. Τότε,

$$\sin^{2k+2} x = \sin^{2k} x \cdot \sin^2 x = p_k(\cos x)p_1(\cos x).$$

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο

$$p_{k+1}(t) = p_k(t)p_1(t) = p_k(t)(1-t^2)$$

έχει βαθμό $2k+2$ και $\sin^{2k+2} x = p_{k+1}(\cos x)$.

3. *(α) Δείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.*

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\mu_1 x}, e^{i\mu_2 x}, \ldots, e^{i\mu_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι μ_j είναι θετικοί;

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \cdots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

Τότε, για κάθε $s = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_s x}\left(\sum_{j=1}^n t_j e^{ik_j x}\right) d\lambda(x) = \sum_{j=1}^n t_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} d\lambda(x)$$
$$= 2\pi t_s,$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j-k_s)x} d\lambda(x) = 0$ αν $j \neq s$ και 2π αν $j = s$. Έπεται ότι $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\mu_1, \ldots, \mu_n$ είναι διακεκριμένοι. Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n$ ισχύει

$$t_1 e^{i\mu_1 x} + t_2 e^{i\mu_2 x} + \cdots + t_n e^{i\mu_n x} \equiv 0.$$

Παραγωγίζοντας $n-1$ φορές ως προς x και θέτοντας $x=0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \cdots + t_n &= 0 \\ \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots + \mu_n t_n &= 0 \\ \mu_1^2 t_1 + \mu_2^2 t_2 + \cdots + \mu_n^2 t_n &= 0 \\ \cdots\cdots& \\ \mu_1^{n-1} t_1 + \mu_2^{n-1} t_2 + \cdots + \mu_n^{n-1} t_n &= 0. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι μη μηδενική (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$.

4. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,*

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y-2\pi)\,d\lambda(y) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι $f(y-2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x - 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y+2\pi)\,d\lambda(y) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι $f(y+2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + a$ παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)$$

από την 2π-περιοδικότητα της f, άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) + \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)\\ &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) + \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y).\end{aligned}$$

5. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 d\lambda(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 d\lambda(x) < \varepsilon^2/3.$$

Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} &\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-g(x+t)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &\quad+\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)-g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &\quad+\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)-g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &\quad+2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &< \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)-g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} + \frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, λόγω της 2π-περιοδικότητας της $f-g$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-g(x+t)|^2 d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 d\lambda(x)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει λοιπόν $t_0 > 0$ ώστε: αν $|t| < t_0$ τότε $|g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $|t| < t_0$ έχουμε

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9 \cdot 2\pi} d\lambda(x)\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} < \varepsilon$$

για κάθε $|t| < t_0$. Άρα,

$$\lim_{t\to 0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} = 0,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

6. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:*

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Υπόδειξη. (α) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky} d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky} d\lambda(y) = \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

(β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky} d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-f(y))e^{-iky} d\lambda(y) = -\widehat{f}(k). \end{aligned}$$

(γ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= \int_{0}^{\pi} f(y-\pi)e^{-ik(y-\pi)}d\lambda(y) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= e^{ik\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= -\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= 0,\end{aligned}$$

διότι $f(y-\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αν ο k είναι περιττός.

(δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-ikx}}d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}d\lambda(x)\\ &= \widehat{f}(-k).\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-ikx}d\lambda(x) = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}d\lambda(x)} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$. Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Το γράφημα της τ_a είναι μεταφορά του γραφήματος της f κατά a. Το σημείο $(x, f(x))$ μεταφέρεται στο $(x+a, \tau_a(x+a)) = (x+a, f(x))$. Έχουμε

$$\tau_a(x+2\pi) = f(x-a+2\pi) = f(x-a) = \tau_a(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η τ_a είναι 2π-περιοδική. Τέλος,

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_a}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ik(x-a)}d\lambda(x) \\ &= e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{-ika}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

8. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Η g_m έχει περίοδο $2\pi/m$ (άρα και 2π) και το γράφημά της είναι το γράφημα της f συμπιεσμένο: σε ένα διάστημα μήκους 2π «επαναλαμβάνεται» m-φορές. Αν $m \mid k$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(y)e^{-iky/m}$ είναι 2π-περιοδική, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi m}^{\pi m} f(y)e^{-iky/m}d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i(k/m)y}d\lambda(y) = \widehat{f}(k/m).\end{aligned}$$

Αν ο m δεν διαιρεί τον k, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(my)e^{-iky}$ είναι 2π-περιοδική γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my+2\pi)e^{-ik(y+2\pi/m)}d\lambda(y) \\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my)e^{-iky}d\lambda(y) \\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(my)e^{-iky}d\lambda(y) \\ &= e^{-i2k\pi/m}\widehat{g_m}(k).\end{aligned}$$

Αφού ο m δεν διαιρεί τον k, έχουμε $e^{-i2k\pi/m} \neq 1$, άρα $\widehat{g_m}(k) = 0$.

9. *Έστω $f, f_n \in L_1(\mathbb{T})$ ($n \in \mathbb{N}$) συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f_n(x)|\,d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \textit{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} |\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)e^{-ikx} d\lambda(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x) - f(x))e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, |e^{-ikx}|\, d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, d\lambda(x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

10. *Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η*

$$S(f,x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Υπόδειξη. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, $a_0(f) = 0$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x)\sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin kx\,d\lambda(x) \\ &= \left[-2\frac{(\pi-x)\cos kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\,d\lambda(x) \\ &= \frac{2\pi}{\pi k} + \left[\frac{2\sin kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f,x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

11. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f(x) = (\pi - x)^2$ *στο* $[0, 2\pi]$ *και την επεκτείνουμε σε μια* 2π*-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο* $\mathbb{R}$*. Δείξτε ότι*

$$S(f,x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = (\pi - x)^2$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x+2\pi) = (-\pi-x)^2 = (\pi+x)^2$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = (\pi - x)^2 = f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)^2 d\lambda(x) = \left[\frac{-(\pi-x)^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k \geqslant 1$: αφού η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}
a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2\cos kx\, d\lambda(x)\\
&= \left[\frac{2(\pi-x)^2\sin kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2(\pi-x)\sin kx}{k}\, d\lambda(x)\\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin kx}{k}\, d\lambda(x)\\
&= \left[-\frac{4(\pi-x)\cos kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2}\\
&= \frac{4\pi}{\pi k^2} = \frac{4}{k^2}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f,x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

απ¨ όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

12. *Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \textit{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx-\pi)\,d\lambda(x) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,d\lambda(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,d\lambda(x), \end{aligned}$$

λόγω της 2π-περιοδικότητας της f. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x-\pi/k)]\cos(kx)\,d\lambda(x),$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f(x-\pi/k)|\,|\cos(kx)|\,d\lambda(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^{\alpha} d\lambda(x) = \frac{C}{k^{\alpha}},$$

όπου $C = M\pi^{\alpha}$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|b_k(f)| \leqslant C/k^{\alpha}$.

13. *Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0,\pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0) = 0$. Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{-i}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(\pi-x)\sin(kx)\,d\lambda(x) \\ &= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k} + \frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\,d\lambda(x) \\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - \frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,d\lambda(x) \\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - i\frac{(-1)^k\pi}{k} + \frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{-ikx}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}(e^{ikx}-e^{-ikx})\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)x),\end{aligned}$$

διότι $(-1)^k-1=0$ αν ο k είναι άρτιος, και

$$2i[(-1)^k-1](e^{i(2k+1)x}-e^{-i(2k+1)x})=-4i(2i\sin((2k+1)x))=8\sin((2k+1)x).$$

14. *Έστω* $0<\delta<\pi$. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ *με*

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{\delta} & \textit{αν } |x|\leqslant\delta\\ 0 & \textit{αν } \delta\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f *και δείξτε ότι*

$$f(x)=\frac{\delta}{2\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta}\cos kx.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)d\lambda(x)=\frac{\delta}{2\pi}.$$

Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\cos(kx)\,d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\cos(kx)\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{x\sin(kx)}{\delta k}-\frac{\cos(kx)}{\delta k^2}\right]_0^{\delta}\\ &= \frac{\sin(k\delta)}{\pi k}-\frac{\delta\sin(k\delta)}{\pi\delta k}+\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\\ &= \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned} S(f,x) &= \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} e^{ikx} = \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx}) \\ &= \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\cos(kx). \end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. *Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi,\pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x=0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \textit{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|e^{-ikx} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\, d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}+\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}e^{ikx} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx})\\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^k-1]}{\pi k^2}\cos(kx)\\ &= \frac{\pi}{2}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \frac{\pi}{2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2}<+\infty,$$

έχουμε $f(x)=S(f,x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$0=f(0)=\frac{\pi}{2}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k+1)^2},$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

16. *Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$.*

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x)=0.$$

(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,d\lambda(x)=-\int_0^{2\pi}f\big(x+\frac{\pi}{n}\big)\sin nx\,d\lambda(x).$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,d\lambda(x)=0.$$

Υπόδειξη. (α). Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής. Εφόσον, είναι και 2π-περιοδική θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\varepsilon > 0$ τυχόν, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, αν $0 < |t| < \delta$ τότε,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(t)|\, d\lambda(x) < \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon\, dt = 2\pi\varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι συνεχής. Στην γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και f_ε συνεχή 2π-περιοδική ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} |f - f_\varepsilon| < \varepsilon$. Τότε, με χρήση της τριγωνικής ανισότητας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, d\lambda(x) &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f_\varepsilon(x+t)|\, d\lambda(x) \\
&\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)|\, d\lambda(x) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\, d\lambda(x) \\
&= 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\lambda(x) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)|\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι,

$$\limsup_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant 2\varepsilon + \limsup_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)|\, d\lambda(x) = 2\varepsilon.$$

Καθώς, το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν το ζητούμενο έπεται.

(β) Με την αλλαγή μεταβλητής $x = y + \pi/n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, d\lambda(x) &= \int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right) \sin(\pi + ny)\, d\lambda(y) \\
&= -\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nx)\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, d\lambda(x) \right| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right| d\lambda(x).$$

Τώρα, το συμπέρασμα έπεται από το (α) για $t = \pi/n \to 0$.

17. *(α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της* $\cos x$ *από το* $(0,\pi)$ *στο* $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ *δείξτε ότι*

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ *από το* $(0,\pi)$ *στο* $(-\pi,\pi)$ *δείξτε ότι*

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Επεκτείνουμε την $f : [\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x\pi \\ 0, & x = -\pi, 0, \pi \\ -\cos x, & -\pi < x < 0 \end{cases}$ σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση σ' όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως, είναι $a_k(f) = 0$, αφού f περιττή και

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x) \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin kx\, d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\sin(k-1)x + \sin(k+1)x]\, d\lambda(x). \end{aligned}$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε βλέπουμε εύκολα ότι $b_k = 0$ ενώ αν ο $k = 2s$ τότε

$$b_{2s}(f) = \frac{8}{\pi}\frac{s}{4s^2-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$S(f,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Αφού η σειρά $S(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και η $f|_{(0,\pi)}$ είναι συνεχής, έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι αν $0 < x < \pi$ τότε

$$\cos x = f|_{(0,\pi)}(x) = S(f,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Για το (β) δουλεύουμε ανάλογα.

4.2 Ομάδα Β′

18. *(α) Για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *θέτουμε*

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Δείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx \right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geqslant k > m \geqslant 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $k > m$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} A_k(x) - A_m(x) &= \sum_{j=m+1}^{k} \sin(jx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \sin(x/2)\sin(jx) \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \big[\cos\big(j - 1/2\big)x - \cos\big(j + 1/2\big)x\big] \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \big[\cos\big(m + 1/2\big)x - \cos\big(k + 1/2\big)x\big]\,. \end{aligned}$$

Από την $|\cos t| \leqslant 1$ έπεται ότι

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{2}{2|\sin(x/2)|} = \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε άθροιση κατά μέρη: είναι

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin(jx) &= \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j (A_j(x) - A_{j-1}(x)) \\ &= \lambda_k A_k(x) - \lambda_{m+1} A_m(x) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) A_j(x) \\ &= \lambda_k (A_k(x) - A_m(x)) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})(A_j(x) - A_m(x)), \end{aligned}$$

διότι

$$\lambda_{m+1} A_m(x) = \left[\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})\right] A_m(x).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=m+1}^{k}\lambda_j\sin(jx)\right| &\leqslant \lambda_k|A_k(x)-A_m(x)|+\sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})|A_j(x)-A_m(x)|\\ &\leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}\left(\lambda_k+\sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})\right)\\ &= \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}.\end{aligned}$$

19. *Έστω $n\in\mathbb{N}$ και $M>0$. Αν $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$ και $k\lambda_k\leqslant M$ για κάθε $k=1,\dots,n$, δείξτε ότι*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx\right|\leqslant(\pi+1)M$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0<x<\pi$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin kx+\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx,$$

όπου $m=\min\{n,\lfloor\pi/x\rfloor\}$. Για το πρώτο άθροισμα έχουμε

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin(kx)\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{M\sin kx}{k}\leqslant\sum_{k=1}^{m}\frac{Mkx}{k}=Mmx\leqslant M\pi.$$

Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση: είναι

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx\right|\leqslant\frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)}\leqslant\frac{M}{(m+1)\sin(x/2)}\leqslant M,$$

διότι $m+1>\pi/x$, άρα

$$(m+1)\sin(x/2)\geqslant\frac{\pi}{x}\frac{2x}{2\pi}=1$$

από την $\sin y\geqslant\frac{2y}{\pi}$, $0\leqslant y\leqslant\pi/2$.

20. *(Λήμμα του Stečkin). Έστω $f(x)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\cos kx+\mu_k\sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0\in\mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$f(x_0)=\|f\|_\infty=\max\{|f(x)|:x\in\mathbb{R}\}.$$

Δείξτε ότι: αν $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ *τότε*

$$f(x_0 + t) \geqslant \|f\|_\infty \cos(nt).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \|f\|_\infty$ και ορίζουμε

$$g(t) = f(x_0 + t) - A\cos(nt).$$

Αν υποθέσουμε ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, τότε υπάρχει $0 < |s| \leqslant \frac{\pi}{n}$ ώστε $g(s) < 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 < t_0 < \frac{\pi}{n}$. Για κάθε $k = 0, 1, \dots, 2n$ θέτουμε $t_k = \frac{k\pi}{n}$ και έχουμε

$$g(t_k) = f(x_0 + t_k) - A\cos(k\pi).$$

Παρατηρούμε ότι $f(t_0) = f(x_0) = 0$, $f(s) < 0$ και για κάθε $k = 1, \dots, 2n$ έχουμε $g(t_k) \geqslant 0$ αν ο k είναι περιττός και $g(t_k) \leqslant 0$ αν ο k είναι άρτιος. Έπεται ότι η $g(y) = 0$ έχει τουλάχιστον $2n + 1$ ρίζες στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Αυτό είναι άτοπο: ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ $2n$ ρίζες στο $[0, 2\pi)$ (εξηγήστε γιατί: η διάσταση του χώρου αυτών των πολυωνύμων είναι $2n + 1$).

21. *(Ανισότητα του Bernstein). Έστω* $f(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ *τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι*

$$\|f'\|_\infty \leqslant n\|f\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Παίρνοντας αν χρειαστεί το $-f$ στη θέση του f, θεωρούμε x_0 τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \|f'\|_\infty.$$

Παρατηρήστε ότι $f(x_0) = 0$. Από την προηγούμενη άσκηση, για κάθε $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ έχουμε

$$f'(x_0 + t) \geqslant \|f'\|_\infty \cos(nt).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \frac{\pi}{2n}\right) - f\left(x_0 - \frac{\pi}{2n}\right) &= \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} f'(x_0 + t)\,d\lambda(t) \geqslant \|f'\|_\infty \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos(nt)\,d\lambda(t) \\ &= \|f'\|_\infty \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{n}\|f'\|_\infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|f'\|_\infty &\leqslant \frac{n}{2}\left(\left|f\left(x_0+\frac{\pi}{2n}\right)\right|+\left|f\left(x_0-\frac{\pi}{2n}\right)\right|\right)\\ &\leqslant \frac{n}{2}\cdot 2\|f\|_\infty = n\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

22. *Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x)=1$ αν $x\in[a,b]$ και $f(x)=0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η*

$$S(f,x)=\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}\,e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S(f)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f,x)$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,d\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b d\lambda(x)=\frac{b-a}{2\pi}.$$

Αν $k\neq 0$, έχουμε

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-ikx}d\lambda(x)=\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{ik}.$$

Έπεται ότι

$$S(f,x)=\widehat{f}(0)+\sum_{k\neq 0}\widehat{f}(k)e^{ikx}=\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}\,e^{ikx}.$$

Η $S(f,x)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x\in\mathbb{R}$. Θα έπρεπε να συγκλίνει η σειρά

$$\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{|e^{-ika}-e^{-ikb}|}{2\pi|k|}=\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{|e^{ik(b-a)}-1|}{2\pi|k|}.$$

Η σειρά αυτή αποκλίνει: αν ο $\frac{b-a}{2\pi}$ είναι ρητός τότε η ακολουθία $\{e^{ik(b-a)}\}_k$ παίρνει πεπερασμένες το πλήθος τιμές, όλες διαφορετικές από 1, ενώ αν ο $\frac{b-a}{2\pi}$ είναι άρρητος τότε η ακολουθία $\{e^{ik(b-a)}\}_k$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στη μοναδιαία περιφέρεια, και αυτό συνεπάγεται ότι το πλήθος των $|k|\leqslant N$ για τους οποίους $|e^{ik(b-a)}-1|\geqslant\frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από c_1N για κάποια σταθερά $c_1>0$, άρα

$$\sum_{k=-N}^{N}\frac{|e^{ik(b-a)}-1|}{2\pi|k|}\geqslant c_2\log N\to\infty.$$

23. *Έστω $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το T παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο Q ώστε*

$$T(x) = |Q(x)|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $c_n \neq 0$. Παρατηρήστε ότι $c_{-k} = \overline{c_k}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και ότι

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, d\lambda(x) > 0.$$

Θεωρούμε το μιγαδικό πολυώνυμο

$$P(z) = z^n \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = c_{-n} + c_{1-n} z + \cdots + c_n z^{2n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\overline{P(1/\overline{z}} &= \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{z}^{-n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} z^{-n-k} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_{-k} z^{-n-k} = \sum_{m=-n}^{n} c_m z^{m-n} = z^{-2n} \sum_{m=-n}^{n} c_m z^{m+n} \\
&= z^{-2n} P(z).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $P(z) = 0$ αν και μόνο αν $P(1/\overline{z}) = 0$. Επίσης, $P(0) \neq 0$ και $P(w) \neq 0$ για κάθε $w \in \mathbb{T}$, διότι αν $w = e^{ix}$ τότε $P(w) = e^{inx} T(x) \neq 0$ από την υπόθεση ότι το T δεν μηδενίζεται. Άρα, οι ρίζες του P είναι n ζεύγη $z_k, 1/\overline{z_k}$ με $0 < |z_k| < 1$. ($k = 1, \ldots, n$). Δηλαδή, υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ ώστε

$$P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}} \right).$$

Θέτουμε $P_1(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
P_2(z) := \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}} \right) &= \frac{1}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} z \left(z_k - \frac{1}{z} \right) \\
&= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} z \left(\frac{1}{z} - z_k \right) \\
&= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} P_1 \left(\frac{1}{z} \right).
\end{aligned}$$

Άρα, αν $|z| = 1$ έχουμε

$$|P_2(z)| = |\overline{P_2(z)}| = \left|\frac{(-1)^n\overline{z}^n}{z_1\cdots z_n}P_1\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\right| = \frac{|P_1(z)|}{|z_1\cdots z_n|}.$$

Τώρα γράφουμε

$$T(x) = |T(x)| = |e^{-inx}P(e^{ix})| = |aP_1(e^{ix})P_2(e^{ix})| = |a|\cdot|P_1(e^{ix})|\cdot\frac{|P_1(e^{ix})|}{|z_1\cdots z_n|},$$

και αν ορίσουμε

$$Q(x) = \left(\frac{|a|}{|z_1\cdots z_n|}\right)^{1/2}P_1(e^{ix})$$

έχουμε

$$T(x) = |Q(x)|^2, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

24. *(α) Έστω $0<\delta<\pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$,*

$$\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx\right|\leqslant\frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}}\qquad\textit{και}\qquad\left|\sum_{k=1}^n\sin kx\right|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k\to 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^\infty t_k\cos kx$ και $\sum_{k=1}^\infty t_k\sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0,2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta,2\pi-\delta]$, όπου $0<\delta<\pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0,2\pi)$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $A_n(x) = \frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\cos kx$ και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2\sin a\cos b = \sin(a-b)+\sin(a+b)$ ως εξής:

$$2\sin(x/2)A_n(x) = \sin(x/2)+\sum_{k=1}^n\left[\sin\left(\frac{x}{2}-kx\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+kx\right)\right] = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$

Για κάθε $x\in(0,2\pi)$ είναι $\sin(x/2)>0$, άρα

$$A_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin(x/2)}.$$

Αν $0<\delta<\pi$ τότε για κάθε $x\in[\delta,2\pi-\delta]$ ισχύει $\sin(x/2)\geqslant\sin(\delta/2)$. Επομένως, έχουμε $|A_n(x)|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$. Για το άλλο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2\sin a\sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b)$ και εργαζόμαστε ανάλογα.

(β) Για να δείξουμε την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy για σειρές πραγματικών αριθμών και συναρτήσεων αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Dirichlet: Αν (ε_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων με $\varepsilon_n \to 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ σειρά πραγματικών αριθμών με φραγμένα μερικά αθροίσματα, δηλαδή υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε $|u_1 + \cdots + u_n| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ συγκλίνει.

Τώρα, το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συγκλίνουσα είναι άμεση συνέπεια του (α) σε συνδυασμό με το κριτήριο Dirichlet. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι η υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n αρκεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n και ως προς $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Μια άλλη, πιο άμεση απόδειξη (η οποία όμως ακολουθεί την ίδια ιδέα) θα ήταν η εξής: Έστω $x \in (0, 2\pi)$ τυχόν αλλά σταθερό. Θεωρούμε την σειρά αριθμών $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$. Παρατηρήστε από το (α) ότι $\cos kx = A_k(k) - A_{k-1}(x)$ με $A_0(x) \equiv \frac{1}{2}$. Τότε, αν $1 \leqslant n < m$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k (A_k(x) - A_{k-1}(x))\right| \\ &= \left|-t_{n+1}A_n(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})A_k(x) + t_m A_m(x)\right| \\ &\leqslant t_{n+1}|A_n(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})|A_k(x)| + t_m|A_m(x)| \\ &\leqslant 2t_{n+1} \max_{n+1 \leqslant k \leqslant m} |A_k(x)| \leqslant \frac{t_{n+1}}{\sin(x/2)},\end{aligned}$$

από το (α). Καθώς, $t_k \to 0$ έπεται από το κριτήριο του Cauchy ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι αν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, τότε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| \leqslant \frac{t_n}{\sin(\delta/2)},$$

ομοιόμορφα ως προς x, επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Αφού έχουμε σειρά συνεχών συναρτήσεων, έπεται ότι άθροισμά της είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Επειδή το $\delta \in (0, \pi)$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συνεχής. Για την άλλη σειρά εργαζόμαστε ανάλογα.

25. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $g \in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\, d\lambda(x) = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε, ολοκληρώνουμε την απόδειξη ως εξής: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p_ε τέτοιο ώστε $\|f - p_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) g(nx) d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0) \right| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x) - p_\varepsilon(x)|\, |g(x)|\, d\lambda(x) \\
&\qquad + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x) g(nx) d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0) \right| + |\widehat{p_\varepsilon}(0) - \widehat{f}(0)|\, |\widehat{g}(0)| \\
&\qquad \leqslant \|f - p_\varepsilon\|_1 \|g\|_\infty + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x) g(nx) d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0) \right| + \|p_\varepsilon - f\|_1 |\widehat{g}(0)| \\
&\qquad \leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|) + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x) g(nx) d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0) \right|,
\end{aligned}$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) g(nx) d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0) \right| \leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) g(nx) d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0) \right| = 0.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, και λόγω γραμμικότητας του ζητούμενου ως προς f μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) = e^{ikx}$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Αν $k = 0$ είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(nx) d\lambda(x) &= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-n\pi}^{n\pi} g(y) d\lambda(y) = \frac{1}{n} \cdot n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(y) d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(y) d\lambda(y) = \widehat{g}(0)
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λόγω της περιοδικότητας της g. Μένει να δείξουμε ότι, για κάθε $k \neq 0$,

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} e^{ikx} g(nx) d\lambda(x) = 0.$$

Παρόμοιο επιχείρημα με το αρχικό δείχνει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι η g είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση ελέγχουμε την $(*)$ με απλές πράξεις.