Κεφάλαιο 4

Χώροι L_p

Ομάδα Α΄

1. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L_p(E)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει*

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Υπόδειξη. Έστω $\alpha > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_{\{|f| \geqslant \alpha\}} \alpha^p d\lambda(x) = \alpha^p \lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}.$$

2. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : n-1 \leqslant |f| < n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$(n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant n^p \lambda(E_n).$$

Επίσης, αφού τα E_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f|^p \, d\lambda$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L_p(E)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n^p \lambda(E_n) &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} 2^p (n-1)^p \lambda(E_n) \\ &\leqslant 2^p \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant 2^p \int_E |f|^p \, d\lambda < \infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \, d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} n^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty,\end{aligned}$$

άρα $f \in L_p(E)$.

3. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(E)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι*

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$\big|\, \|f_n\|_p - \|f\|_p \,\big| \leqslant \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \to 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \to 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 (γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης). Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned}|f_n - f|^p &\leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2\max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \\ &\leqslant 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \to g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L_1(E)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L_1(E)$) και

$$\int_E |g_n| \, d\lambda = 2^p \left(\int_E |f_n|^p \, d\lambda + \int_E |f|^p \, d\lambda \right) \to 2^{p+1} \int_E |f|^p \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda,$$

διότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Αφού $|f_n - f|^p \to 0$ σχεδόν παντού, από την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_E |f_n - f|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p \to 0$.

4. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(E)$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leqslant \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Holder. Επίσης, αφού

$$|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\,| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0,$$

έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n. Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \to 0$ και $\|g_n - g\|_q \to 0$, άρα

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant M\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0.$$

5. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.*

(α) *Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι*

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) *Δείξτε ότι $L_q(E) \subseteq L_p(E)$.*

(γ) *Δείξτε ότι $L_q(E) \neq L_p(E)$.*

Υπόδειξη. (α) και (β) Υποθέτουμε ότι $\|f\|_q < \infty$, αλλιώς το δεξιό μέλος απειρίζεται και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $f \in L_q(E)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \cdot \mathbf{1} \, d\lambda &\leqslant \left(\int_E |f|^q d\lambda\right)^{p/q} \left(\int_E \mathbf{1} \, d\lambda\right)^{1-p/q} \\ &= \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-p/q},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις $|f|^p$ και $\mathbf{1}$ με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

απ¨ όπου έπεται ότι $f \in L^p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

(γ) Έστω $1 \leqslant p < q < \infty$. Θα ορίσουμε $f \in L_p(E) \setminus L_q(E)$. Αφού $0 < \lambda(E) < \infty$ μπορούμε να βρούμε ξένα μετρήσιμα $E_n \subset E$ με $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E)}{2^n}$ και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n}(x),$$

όπου $a_n > 0$ που θα επιλεγούν κατάλληλα. Έχουμε

$$\|f\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^q \quad \text{και} \quad \|f\|_p^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^p.$$

Αν ορίσουμε

$$a_n = 2^{n/q}$$

τότε

$$\|f\|_q^q = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = \infty$$

ενώ

$$\|f\|_p^p = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{np/q} = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-p/q)}} < \infty$$

(έχουμε $\delta = 1 - p/q > 0$ διότι $p < q$, και η γεωμετρική σειρά με λόγο $2^{-(1-p/q)} = 2^{-\delta} < 1$ συγκλίνει).

6. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_E |g|^p d\lambda &= \int_E |f|^p \chi_B \, d\lambda = \int_B |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_B |f|^q \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f|^q \, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty,\end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $g \in L_p(E)$.

Για την h παρατηρούμε ότι $h = f\chi_{E\setminus B}$, και $|h(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in E \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leqslant |h(x)|^q$ για κάθε $x \in E \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\int_E |h|^r d\lambda = \int_E |f|^r \chi_{E\setminus B}\, d\lambda = \int_{E\setminus B} |f|^r\, d\lambda \leqslant \int_{E\setminus B} |f|^q\, d\lambda$$
$$\leqslant \int_E |f|^q\, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty,$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $h \in L_r(E)$.

7. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E) \cap L_r(E)$ τότε $f \in L_q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Ψπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\int_E |f|^q\, d\lambda = \int_E |f|^{(1-t)p}|f|^{tr}\, d\lambda \leqslant \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)p}\right)^{\frac{1}{1-t}} d\lambda\right)^{1-t} \left(\int_E \left(|f|^{tr}\right)^{\frac{1}{t}} d\lambda\right)^t$$
$$= \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^{1-t} \left(\int_E |f|^r d\lambda\right)^t = \|f\|_p^{(1-t)p}\|f\|_r^{tr} < \infty.$$

Άρα, $f \in L_q(E)$.

8. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L_p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι*

$$\ln \|f\|_p \geqslant \int_E \ln |f|\, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\ln \|f\|_p = \ln \left[\left(\int_E |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p}\right] = \frac{1}{p} \ln \left(\int_E |f|^p\, d\lambda\right),$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln \left(\int_E |f|^p\, d\lambda\right) \geqslant p \int_E \ln |f|\, d\lambda = \int_E p \ln |f|\, d\lambda = \int_E \ln(|f|^p)\, d\lambda.$$

Θέτοντας $g = |f|^p$ έχουμε ότι η g είναι μη αρνητική, $g \in L_1(E)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\ln \left(\int_E g\, d\lambda\right) \geqslant \int_E \ln g, d\lambda.$$

Γράφουμε $g = e^h$, όπου $h = \ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_E e^h \, d\lambda\right) \geqslant \int_E h \, d\lambda.$$

Ορίζουμε

$$t_0 = \int_E h \, d\lambda.$$

Υποθέτουμε ότι $t_0 \in \mathbb{R}$ (αν $t_0 = -\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, και $t_0 < \infty$ διότι $h = \ln g \leqslant g - 1$ και η $g - 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο E). Η συνάρτηση $u(t) := e^t$ είναι κυρτή, άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^t - e^{t_0} = u(t) - u(t_0) \geqslant u'(t)(t - t_0) = e^{t_0}(t - t_0).$$

Δηλαδή,

$$e^{h(x)} - e^{t_0} \geqslant e^{t_0}(h(x) - t_0).$$

Ολοκληρώνοντας στο E και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lambda(E) = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x) - \int_E e^{t_0} \, d\lambda(x) &\geqslant e^{t_0}\left[\int_E h(x) \, d\lambda(x) - \int_E t_0 \, d\lambda(x)\right] \\ &= e^{t_0}\left[t_0 - t_0\lambda(E)\right] = 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x) \geqslant \int_E e^{t_0} \, d\lambda(x) = e^{t_0},$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$\ln\left(\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x)\right) \geqslant t_0 = \int_E h \, d\lambda.$$

9. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \dots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \dots, f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε*

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i| \, d\lambda\right)^{c_i}.$$

Υπόδειξη. Αν $\int_E |f_i| \, d\lambda = 0$ για κάποιο $i = 1, \dots, m$, τότε $f_i = 0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} = 0$ σχεδόν παντού, και τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσα με μηδέν.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_E |f_i| \, d\lambda > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_E |f_i| \, d\lambda} f_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Τότε, $\int_E |g_i|\,d\lambda = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)| > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned}\ln(|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m}) &= c_1\ln(|g_1(x)|) + c_2\ln(|g_2(x)|) + \cdots + c_m\ln(|g_m(x)|)\\ &\leqslant \ln(c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m} \leqslant c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x) = 0$ για κάποιο i. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant c_1 \int_E |g_1|\,d\lambda + \cdots + c_m \int_E |g_m|\,d\lambda = c_1 + \cdots + c_m = 1.$$

Αφού

$$\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}},$$

έπεται ότι

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}.$$

10. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geqslant 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $r = tp + (1-t)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp}\|f\|_q^{(1-t)q}.$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα αποδείχθηκε για την Άσκηση 7. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις συναρτήσεις $|f|^{tp}$ και $|f|^{(1-t)q}$ με εκθέτες $\frac{1}{t}$ και $\frac{1}{1-t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^r\,d\lambda &= \int_E |f|^{tp}|f|^{(1-t)q}\,d\lambda \leqslant \left(\int_E \left(|f|^{tp}\right)^{\frac{1}{t}} d\lambda\right)^t \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)q}\right)^{\frac{1}{1-t}} d\lambda\right)^{1-t}\\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^t \left(\int_E |f|^q d\lambda\right)^{1-t} = \|f\|_p^{tp}\|f\|_r^{(1-t)q}.\end{aligned}$$

11. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.*

Υπόδειξη. Αφού $|f_n|^p \to |f|^p$ σχεδόν παντού στο E, από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, d\lambda = \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n|^p \, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p \, d\lambda \leqslant 1,$$

διότι

$$\int_E |f_n|^p \, d\lambda = \|f_n\|_p^p \leqslant 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

12. *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mathbb{R})$ με $\int f_n \, d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n \, d\lambda = 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\delta = \chi_{[-\delta,\delta]}$. Από την ανισότητα Holder παίρνουμε

$$\begin{aligned}(2\delta)^{1/q}\|f_n\|_p &= \left(\int |g_\delta|^q \, d\lambda\right)^{1/q} \|f_n\|_p \geqslant \left|\int f_n g_\delta \, d\lambda\right| \\ &= \int_{\{x:|x|\leqslant\delta\}} f_n \, d\lambda = \int f_n \, d\lambda - \int \{x : |x| > \delta\} f_n \, d\lambda \\ &= 1 - \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n \, d\lambda.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση υπάρχει $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n \, d\lambda < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant n_0(\delta)$ έχουμε

$$\|f_n\|_p > \frac{1}{2} \frac{1}{(2\delta)^{1/q}}.$$

Έπεται ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \geqslant \frac{1}{2} \frac{1}{(2\delta)^{1/q}}$$

για κάθε $\delta > 0$, και αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ παίρνουμε $\liminf_n \|f_n\|_p = +\infty$. Άρα, $\|f_n\|_p \to 0$.

13. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(E)$. Δείξτε ότι*

$$\int_E |f|^p \, d\lambda = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda_1(t).$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p \, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} \, d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty pt^{p-1} \chi_{[0,|f(x)|)}(t) \, d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x) \chi_{[0,|f(x)|)}(t) \, d\lambda(x) \right) pt^{p-1} \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{x \in E : |f(x)| > t\}}(x) \, d\lambda(x) \right) pt^{p-1} \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) pt^{p-1} \, d\lambda_1(t).
\end{aligned}$$

14. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρ- τήσεων στο E με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο E. Δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $g_n \to g$ σχεδόν παντού, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|g\|_\infty \leqslant M$ (υπάρχει $Z \subset E$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε, για κάθε $x \in E \setminus Z$ ισχύουν οι $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και $g_n(x) \to g(x)$, άρα για κάθε $x \in E \setminus Z$ έχουμε $|g(x)| \leqslant M$).

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλή παρατήρηση ότι αν $u \in L_p(E)$ και $v \in L_\infty(E)$ τότε $uv \in L_p(E)$ και

$$\|uv\|_p^p = \int_E |u|^p |v|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |u|^p \|v\|_\infty^p \, d\lambda = \|v\|_\infty^p \|u\|_p^p.$$

δηλαδή

$$\|uv\|_p \leqslant \|v\|_\infty \|u\|_p.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f_n g_n - fg\|_p &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_p \leqslant \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \\
&\leqslant \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p.
\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος έχουμε $\|f_n - f\|_p \to 0$, άρα $M\|f_n - f\|_p \to 0$. Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισησ: έχουμε

$$|f(g_n - g)|^p = |f|^p|g_n - g|^p \leqslant |f|^p(|g_n| + |g|)^p \leqslant (2M)^p|f|^p$$

σχεδόν παντού, και η $(2M)^p|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, διότι $f \in L_p(E)$ (ως $\|\cdot\|_p$-όριο των $f_n \in L_p(E)$). Επίσης, $|f(g_n - g)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, διότι $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού και $g_n(x) - g(x) \to 0$ σχεδόν παντού. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και έχουμε

$$\int_E |f(g_n - g)|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $\|f(g_n - g)\|_p \to 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \to 0.$$

15. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:*

(α) *Για κάθε t έχουμε $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.*

(β) $\lim\limits_{t\to 0} \int |f - f_t| = 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα την $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Έχουμε $f_t(x) = \chi_E(x+t) = \chi_{-t+E}(x)$, άρα $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και

$$\int f_t \, d\lambda = \lambda(-t+E) = \lambda(E) = \int f \, d\lambda.$$

Λόγω γραμμικότητας, συμπεραίνουμε εύκολα ότι αν ϕ είναι μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ισχύει $\phi_t \in L_1(\mathbb{R}^d$ και

$$\int \phi_t \, d\lambda = \int \phi \, d\lambda.$$

Έστω τώρα $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ με $f \geqslant 0$. Θεωρούμε ακολουθία απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ϕ_n με $\phi_n \nearrow f$. Έστω $t \in \mathbb{R}^d$. Έχουμε $(\phi_n)_t \in L_1(\mathbb{R}^d$, $(\phi_n)_t \nearrow f_t$, και

$$\int (\phi_n)_t \, d\lambda = \int \phi_n \, d\lambda.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int f_t \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n)_t \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Έτσι βλέπουμε ότι $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

Στη γενική περίπτωση, όπου $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f^+ και f^-.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Ο χώρος $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$, άρα μπορούμε να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ώστε $\|f-g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $K = \mathrm{supp}(g)$. Η g είναι συνεχής, με φορέα το συμπαγές K, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x-y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)}$. Τότε, για κάθε $|t| < \delta$ έχουμε

$$\|g - g_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x+t)|\, d\lambda(x) = \int_{K\cup(K-t)} |g(x) - g(x+t)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\|f - f_t\|_1 \leqslant \|f-g\|_1 + \|g - g_t\|_1 + \|g_t - f_t\|_1 < 3\varepsilon,$$

χρησιμοποιώντας και την $\|f-g\|_1 = \|f_t - g_t\|_1$, η οποία ισχύει για κάθε t από το (α).

16. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.*

Υπόδειξη. Έστω $0 \neq f \in L_\infty(E)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p\, d\lambda \leqslant \int_E \|f\|_\infty^p d\lambda = \|f\|_\infty^p \lambda(E) < \infty,$$

άρα $f \in L_p(E)$. Επίσης,

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty [\lambda(E)]^{1/p} \to \|f\|_\infty$$

καθώς το $p \to \infty$, άρα $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{B_\varepsilon} |f(x)|^p d\, d\lambda \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \lambda(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p\to\infty} [\lambda(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

17. *Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $f \in L_p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L_p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$.

(γ) $f \in L_p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p = p_0$.

Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^{-a}|\ln x|^b$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 < p < p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p \leqslant p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p \geqslant p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p < p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p > p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$.

18. *Έστω* E, F *μετρήσιμα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^d$ *με* $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ *είναι συνεχής συνάρτηση.*

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *και* $\varepsilon > 0$ *ώστε: αν* $|x - x_0| < \varepsilon$ *τότε* $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$. *Δηλαδή, το* $E - F$ *έχει μη κενό εσωτερικό.*

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}|(\chi_E * \chi_F)(x) - (\chi_E * \chi_F)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)]\chi_F(z) d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z).\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x-z)$, τότε $\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y) = f(z+(x-y)) = f_{x-y}(z)$ με την ορολογία της Άσκησης 15. Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Έπεται ότι

$$\lim_{y\to x} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z) = \lim_{x\to y} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{x-y}|\, d\lambda = 0$$

από την Άσκηση 15 (β).

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε

$$\lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Θέτουμε $F_1 = F + x_0$. Η συνάρτηση

$$f(x) := (\chi_{-E} * \chi_{F_1})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{-E}(x-z)\chi_{F_1}(z)\, d\lambda(z) = \lambda((x+E) \cap F_1)$$

είναι συνεχής, από το πρώτο ερώτημα. Όμως,

$$f(0) = \lambda(E \cap F_1) = \lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|u| < \varepsilon$ τότε

$$f(u) = \lambda((E+u) \cap (F + x_0)) > 0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $|u| < \varepsilon$ έχουμε $E \cap (F + x_0 - u) = -u + (E+u) \cap (F+x_0) \neq \emptyset$, και θέτοντας $x = x_0 - u$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ με $|x - x_0| < \varepsilon$ ισχύει $E \cap (F + x) \neq \emptyset$.

3.2 Ομάδα Β′

19. *Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και*

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\, dt = 1.$$

Έστω $g \in L_1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\|g_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t)\, d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g\|_1\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|g_n\|_1 \leqslant \|g\|_1 < +\infty.$$

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\|g_n - g\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g_t - g\|_1\, d\lambda(t),$$

όπου $g_t(x) = g(x-t)$. Πράγματι,

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t),$$

άρα

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Άσκηση 15 (β) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $\|g_t - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) = \int_{[0,1/n]} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) \\ &< \varepsilon \int_{[0,1/n]} f_n(t)\, d\lambda(t) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

και έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$.

20. *Έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ τότε $f * g \in L_r(\mathbb{R}^d)$ και*

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $a = 1 - \frac{p}{r}$ και $b = 1 - \frac{q}{r}$. Παρατηρούμε ότι $r \geqslant p$ και $r \geqslant q$ λόγω των υποθέσεων ότι $p, r, q \geqslant 1$ και $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Ορίζουμε $p_1 = \frac{pr}{r-p}$ και $p_2 = \frac{rq}{r-q}$. Τότε, $p_1, p_2 \geqslant 1$ και $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r} = 1$. Γράφουμε

$$|(f * g)(x)| = \left| \int f(x-y)g(y)\, d\lambda(y) \right| \leqslant \int (|f(x-y)|^{1-a}|g(y)|^{1-b})|f(x-y)|^a|g(y)|^b d\lambda(y).$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9 έχουμε

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leqslant \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r}|g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y) \right)^{1/r} \left(\int |f(x-y)|^{ap_1} d\lambda(y) \right)^{1/p_1} \\ &\qquad \times \left(\int |g(y)|^{bp_2} d\lambda(y) \right)^{1/p_2} \\ &= \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r}|g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y) \right)^{1/r} \|f\|_{ap_1}^a \|g\|_{bp_2}^b. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-a)r = p$ και $(1-b)r = q$. Υψώνοντας στην r και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|f * g\|_r^r &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \left[\int \left(\int |f(x-y)|^p d\lambda(x) \right) |g(y)|^q d\lambda(y) \right] \\ &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \|f\|_p^p \|g\|_q^q. \end{aligned}$$

Όμως, $ap_1 = p$ και $bp_2 = q$. Άρα,

$$\|f * g\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{p+ar} \|g\|_q^{q+br} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r,$$

δηλαδή, $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

21. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$\lambda\left(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}\right) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(E)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

Υπόδειξη. Έστω $q \leqslant r < p$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^r \, d\lambda(x) &= \int_0^\infty rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda(t) \\ &+ \int_1^\infty rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda(t) \\ &\leqslant \int_0^1 rt^{r-1}\lambda(E) \, d\lambda(t) + \int_1^\infty rt^{r-1}\frac{c}{t^p} \, d\lambda(t) \\ &= \lambda(E)\int_0^1 rt^{r-1} d\lambda(t) + Cr\int_1^\infty t^{r-p-1} \, d\lambda(t) \\ &= \lambda(E) + \frac{Cr}{p-r} < \infty,\end{aligned}$$

διότι

$$\int_1^\infty t^{r-p-1} \, d\lambda(t) = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{M^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p}\right) = \frac{1}{p-r},$$

αφού $r - p < 0$.

Έπεται ότι $f \in L_r(E)$.

22. *Έστω $r > 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou,

$$\int_0^1 |f|^r \, d\lambda \leqslant \liminf \int_0^1 |f_n|^r \, d\lambda \leqslant M^r,$$

διότι $\|f\|_r \leqslant m$ για κάθε n. Έπεται ότι

$$\int_0^1 |f_n - f|^r \, d\lambda \leqslant \int_0^1 2^r(|f_n|^r + |f|^r) \, d\lambda \leqslant 2^{r+1}M^r.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0,1)$ με $\lambda(E) > 1 - \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Για τυχόν $1 \leqslant p < r$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda &= \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \int_{E^c} |f_n - f|^p \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + [\lambda(E^c)]^{1-\frac{p}{r}}\left(\int_{E^c} |f_n - f|^r\right)^{\frac{p}{r}} \\ &< \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}}\left(\int_0^1 |f_n - f|^r\right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}}2^{r+1}M^r.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_p \to 0$.

23. *Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1,1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\phi_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \ d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\|\phi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\phi_h(f) - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, d\lambda(t) \right|^2 &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \left(\int_{x-h}^{x+h} \mathbf{1}^2 \, d\lambda(t) \right) \\
&= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \cdot (2h) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|\phi_h(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \ d\lambda(t) \right|^2 \, d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t) f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t) \, d\lambda(x) \right) \, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[t-h, t+h](x) \, d\lambda(x) \right) \, d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t)(2h) \, d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \, d\lambda(t) = \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|\phi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε πρώτα ότι αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε $\phi_h(g) \to g$ ομοιόμορφα καθώς το $h \to 0$ και $\|\phi_h(g)-g\|_2 \to 0$ αφού $\phi_h(g)-g \equiv 0$ έξω από κάποιο κλειστό διάστημα (αν π.χ. $0 < h < 1$). Κατόπιν, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε g συνεχή, με συμπαγή φορέα, ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $\phi_h(f - g) = \phi_h(f) - \phi_h(g)$, και χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα γράφουμε

$$\begin{aligned}\|\phi_h(f) - f\|_2 &\leqslant \|\phi_h(f) - \phi_h(g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\ &= \|\phi_h(f - g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\ &\leqslant \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\|g - f\|_2 < \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 \leqslant \lim_{h\to 0^+} \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 = 0,$$

δηλαδή $\|\phi_h(f) - f\|_2 \to 0$.

24. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι $n\cdot\big(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\big) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\chi_E(x) = n \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z).$$

Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}|n(\chi_E * \chi_{[0,1/n]})(x) - \chi_E(x)| &= \left| n \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(x)]\chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{1/n} \int_{[0,1/n]} |\chi_E(x-z) - \chi_E(x)| d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{1/n} \int_{[x-1/n,x]} |\chi_E(t) - \chi_E(x)| d\lambda(t) \to \chi_E(x)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(\chi_E)$, δηλαδή σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

25. *Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $g \notin L^\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(A_n) > 0$, όπου $A_n = \{x : |g(x)| \geqslant n\}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \mathrm{sign}(g(x))\chi_{A_n}(x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x),$$

και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi, ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,d\lambda(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\,d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\,d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Όμως,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)|g(x)|\,d\lambda(x) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} n\frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\,d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

26. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L_p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f)\chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f\,d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x) - 2^n a_{n,k}(f)|^p \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (f(x) - f(y)) \, d\lambda(y) \right|^p \, d\lambda(x) \\
ls & \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \cdot 2^{-np/q} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} 2^p (|f(x)|^p + |f(y)|^p) \, d\lambda(y) \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^n 2^p \cdot 2\lambda(J_{n,k}) \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \\
&= 2^{p+1} \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \\
&= 2^{p+1} \|f\|_p^p \leqslant 4^p \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν η g είναι συνεχής και αν ορίσουμε αντίστοιχα τις g_n, τότε $\|g - g_n\|_p \to 0$. Πράγματι, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in [0,1]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ να έχουμε $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$. Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $1/2^{n_0} \leqslant \delta$, και για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g - g_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |g(x) - 2^n a_{n,k}(g)|^p \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (g(x) - g(y)) \, d\lambda(y) \right|^p d\lambda(x) \\
ls &\sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |g(x) - g(y)|^p \, d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) d\lambda(x) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \lambda(J_{n,k}) \varepsilon^p \, 2^{-np/q} \, d\lambda(x) \\
&= 2^n 2^{np} (2^{-n})^2 \varepsilon^p \, 2^{-np/q} = \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

δηλαδή $\|g - g_n\|_p \leqslant \varepsilon$.

Θεωρούμε τώρα $f \in L_p[0,1]$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε συνεχή g με $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι $a_{k,n}(f-g) = a_{k,n}(f) - a_{k,n}(g)$, άρα $(f-g)_n = f_n - g_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_p &\leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|g_n - f_n\|_p \\
&\leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|(g_n - f_n) - (g - f)\|_p + \|g - f\|_p \\
&= \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|(g - f)_n - (g - f)\|_p + \|g - f\|_p \\
&\leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + 4\|g - f\|_p + \|g - f\|_p \\
&\leqslant 6\varepsilon + \|g - g_n\|_p.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p \leqslant \lim_{n\to\infty} \|g - g_n\|_p + 6\varepsilon = 6\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0,$$

δηλαδή $\|f - f_n\|_p \to 0$.

27. *Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L_p[0,\infty)$. Δείξτε ότι*

$$\left| \int_0^x f(t) \, d\lambda(t) \right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t) \, d\lambda(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $x > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| &\leqslant \int_0^x |f(t)|\,d\lambda(t) = \int_0^\infty |f(t)|\chi_{[0,x]}(t)\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \|f\|_p\|\chi_{[0,x]}\|_q = \|f\|_p x^{1/q} = \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,x]}\|_q &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}^q\,d\lambda\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}\,d\lambda\right)^{1/q} = [\lambda([0,x])]^{1/q} = x^{1/q}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p = \left(\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιον α, διότι $|f|^p\chi_{[0,\alpha]} \nearrow |f|^p$ καθώς το $\alpha \to \infty$, και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda = \lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_0^\infty |f|^p\,d\lambda - \int_0^\alpha |f|^p\,d\lambda\right) = 0.$$

Για κάθε $x > \alpha$ μπορούμε να γράψουμε

$$(*)\qquad \frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t).$$

Από την επιλογή του α έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t) &\leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\|\chi_{[\alpha,x]}\|_q\\ &= \frac{(x-\alpha)^{1/q}}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p < \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\\ &\leqslant \|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p < \varepsilon\end{aligned}$$

για κάθε $x > \alpha$, άρα η $(*)$ δίνει

$$\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \varepsilon$$

για κάθε $x > \alpha$. Όμως,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^{\alpha} |f(t)|\, d\lambda(t) = 0,$$

άρα

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) \right| \leqslant 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

28. *Υποθέτουμε ότι* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *για κάθε* $1 \leqslant p < 2$ *και επιπλέον ότι*

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$ *και*

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p\, d\lambda \leqslant M^p$$

για κάθε $p \in [1,2)$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n}\, d\lambda \leqslant M^{2-1/n}.$$

Από το λήμμα του Fatou και από το γεγονός ότι $|f|^{2-1/n} \to |f|^2$ σχεδόν παντού, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n}\, d\lambda \leqslant \liminf M^{2-1/n} = M^2 < \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{p\to 2^-} \|f\|_p = \|f\|_2$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p_n \in [1,2)$ με $p_n \uparrow 2$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} = \|f\|_2.$$

Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n}\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda.$$

Κατόπιν, θα έχουμε

$$\|f\|_{p_n} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n}\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p_n}} \to \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$$

διότι $\frac{1}{p_n} \to \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n = |f|^2\chi_{\{|f|<1\}} + |f|^{p_n}\chi_{\{|f|\geqslant 1\}}$ και $g_n = |f|^2\chi_{\{|f|\geqslant 1\}} + |f|^{p_n}\chi_{\{|f|<1\}}$, και παρατηρούμε ότι:

(α) $f_n \leqslant |f|^{p_n} \leqslant g_n$ για κάθε n, άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n}\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda.$$

(β) Η (f_n) είναι αύξουσα (διότι η (p_n) είναι αύξουσα) και $f_n \nearrow |f|^2$ σχεδόν παντού, άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda.$$

(γ) Η (g_n) είναι φθίνουσα και $g_n \searrow |f|^2$ σχεδόν παντού. Επίσης, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} g_1\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_1}\, d\lambda \leqslant M^2 + M^{p_1} < \infty,$$

άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την $(g_1 - g_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda.$$

Από τα (α), (β), (γ) και από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n}\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda.$$

29. *Έστω $f \in L_1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε*

$$\int_A |f|\, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $f \in L_p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L_2[0,1]$;

Υπόδειξη. Από την υπόθεση και από την ανισότητα Markov, αν $A_t = \{|f| \geqslant t\}$, $t > 0$, έχουμε

$$t\lambda(A_t) \leqslant \int_{A_t} |f|\, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A_t)},$$

δηλαδή
$$\lambda(A_t) \leqslant \frac{C^2}{t^2}.$$

Έστω $1 \leqslant p < 2$. Γράφουμε
$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f|^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\})\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\})\, d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\})\, d\lambda(t) \\
&\leqslant \int_0^1 pt^{p-1} d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1} + C^2 p \int_1^\infty t^{p-3} d\lambda(t) < \infty
\end{aligned}$$

διότι $p - 3 < -1$. Άρα, $f \in L_p([0,1])$.

30. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει*
$$(*) \qquad \int_E \exp\left(f(x)\right)\, d\lambda(x) = 1.$$

όπου $E = supp(f)$. Αποδείξτε ότι $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $\|f\|_p \leqslant Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την $(*)$ αλλά $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = t^p e^{-t}$, $t > 0$. Έχουμε $g'(t) = (pt^{p-1} - t^p)e^{-t}$, άρα η g έχει μέγιστο στο $t_0 = p$. Δηλαδή,
$$t^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} e^t$$

για κάθε $t > 0$. Τότε,
$$\int |f|^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} \int \exp(|f(x)|)\, d\lambda(x) = \frac{p^p}{e^p},$$

άρα
$$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{e} p.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ένα παράδειγμα μπορεί να είναι η $f(x) = c + \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$ στο $(0,1)$, όπου το $c \in \mathbb{R}$ επιλέγεται έτσι ώστε
$$\int_0^1 e^{f(x)} d\lambda(x) = e^c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) = e^c \cdot 2 = 1.$$

Η f δεν είναι φραγμένη, αφού $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

31. *Έστω* $f \in L^1((0,1))$. *Για* $x \in (0,1)$ *ορίζουμε*

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι $g \in L^1((0,1))$ *και*

$$\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g(x)|\, d\lambda(x) &= \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_0^1 \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t}\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \chi_{(x,1)}(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\})\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 |f(t)|\, d\lambda(t) = \|f\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli. Άρα, $g \in L^1((0,1))$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini και, ακολουθώντας την ίδια πορεία, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \chi_{(x,1)}(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \left(\int_0^1 \chi_{(x,1)}(t)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\})\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 f(t)\, d\lambda(t) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

32. *Έστω* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η* $g(x,y) = f(x) - f(y)$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $(0,1) \times (0,1)$, *δείξτε ότι* $f \in L^1(0,1)$.

Υπόδειξη. Αφού $|f(x)| < \infty$ για κάθε $x \in (0,1)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A = \{x \in (0,1) : |f(x)| \leqslant m] \subseteq (0,1)$ να έχει θετικό μέτρο. Θέτουμε $B = \{x \in (0,1) : |(x)| > m\}$. Τότε, αν $(x,y) \in B \times A$, έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |f(x)| - |f(y)| \geqslant |f(x)| - m > 0.$$

Από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)\times(0,1)} |f(x) - f(y)|\, d\lambda(x,y) &\geqslant \int_{B\times A} |f(x) - f(y)|\, d\lambda(x,y) \\
&\geqslant \int_{B\times A} (|f(x)| - m)\, d\lambda(x,y) \\
&= \int_B \int_A (|f(x)| - m)\, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&= \lambda(A) \int_B (|f(x)| - m)\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_B |f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) < \infty.$$

Αφού $f \leqslant m$ στο A, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1)} |f(x)|\, d\lambda(x) &= \int_A |f(x)|\, d\lambda(x) + \int_B |f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant m\lambda(A) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) \\
&= m(\lambda(A) + \lambda(B)) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} = m + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} < \infty.
\end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

33. *Εστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) συζυγή εκθέτη q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0,\infty]$ δείξτε ότι*

$$\int fg\, d\lambda \geqslant \left(\int f^p\, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int g^q\, d\lambda\right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f+g)^p\, d\lambda\right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p\, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int g^p\, d\lambda\right)^{1/p}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Holder για τις $(fg)^p$ και g^{-p} με εκθέτες $r = \frac{1}{p}$ και

$s = \frac{1}{1-p}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int f^p \, d\lambda &= \int (fg)^p g^{-p} \, d\lambda \\ &\leqslant \left(\int fg \, d\lambda\right)^p \left(\int (g^{-p})^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \\ &= \left(\int fg \, d\lambda\right)^p \left(\int g^q\right)^{-\frac{p}{q}},\end{aligned}$$

διότι $-\frac{p}{1-p} = q$ και $1 - p = -\frac{p}{q}$ αφού οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Έπεται ότι

$$\left(\int fg \, d\lambda\right)^p \leqslant \left(\int f^p \, d\lambda\right)\left(\int g^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη γράφουμε

$$\left(\int f^p \, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \leqslant \int f(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda$$

και

$$\left(\int g^p \, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \leqslant \int g(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\left[\left(\int f^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda\right)^{1/p}\right]\left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \\ &\qquad \leqslant \int (f+g)(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda = \int (f+g)^p \, d\lambda.\end{aligned}$$

Αφού $-(1-p)q = p$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\left(\int f^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda\right)^{1/p} &\leqslant \left(\int (f+g)^p \, d\lambda\right)^{1-1/q} \\ &= \left(\int (f+g)^p \, d\lambda\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

34. *Δείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L_q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0,1]$.*

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder βλέπουμε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ τότε $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Άρα, για κάθε $f \in L_q[0,1]$ έχουμε $f \in L_p[0,1]$. Δηλαδή, $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n = \{f \in L_p[0,1] : \|f\|_q \leqslant n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L_q[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L_p[0,1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το F_n είναι $\|\cdot\|_p$–κλειστό. Πράγματι, αν (f_k) είναι μια ακολουθία στο F_n, δηλαδή $\|f_k\|_q \leqslant n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αν $\|f_k - f\|_p \to 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f\|_q \leqslant n$: αφού $f_k \xrightarrow{L_p} f$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\lambda(|f_k - f| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-p}\|f_k - f\|_p^p,$$

άρα $f_k \xrightarrow{\lambda} f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_s}) της (f_k) ώστε $f_{k_s} \to f$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι $|f_{k_s}|^q \to |f|^q$ και από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int |f|^q \, d\lambda \leqslant \liminf_{s\to\infty} \int |f_{k_s}|^q \, d\lambda \leqslant n^q,$$

διότι $\|f_{k_s}\|_q \leqslant n$. Άρα, $f \in F_n$.

(β) Το F_n έχει κενό εσωτερικό: για κάθε $f \in F_n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(f,\varepsilon) = \{g \in L_p[0,1] : \|f - g\|_p < \varepsilon\} \nsubseteq F_n.$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε $f \in F_n$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\alpha \in (1/q, 1/p)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(t) = \frac{\varepsilon(1-\alpha p)^{1/p}}{2t^\alpha},$$

η οποία ανήκει στον $L_p[0,1] \setminus L_q[0,1]$ (ελέγξτε το). Άρα, η συνάρτηση $f + h \in L_p[0,1]$ και μάλιστα $f + h \in B(f,\varepsilon)$ διότι $\|h\|_p = \varepsilon/2$, αλλά $f + h \notin F_n$, αφού $h \notin L_q[0,1]$.