Κεφάλαιο 2

Ολοκλήρωμα Lebesgue

2.1 Ομάδα Α

1. *Αν η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n[f(x+1/n) - f(x)]$. Εφόσον, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (a,b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη οπότε η f' είναι μετρήσιμη.

2. *(α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) = 0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.*

(β) Έστω A, B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B) = 0$ και έστω $f : A \cup B \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο αφού κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$[f > b] = \{x \in A \cup B : f(x) > b\} = \{x \in B : f(x) > b\} \cup \{x \in A : f(x) > b\}.$$

Το πρώτο σύνολο στην προηγούμενη ένωση είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο μηδενικού συνόλου ενώ το δεύτερο είναι μετρήσιμο διότι η $f|_A$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Έστω $C = C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Τότε, το $B = A \setminus C$ είναι μηδενικό σύνολο αφού η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Καθώς, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη, το συμπέρασμα έπεται από το (β).

3. *(α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.*

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε το μη μετρήσιμο σύνολο V του Vitali στο $[0, 1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 1$ αν $x \in V$ και -1 αλλιώς. Τότε, η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά η f^2 είναι η σταθερή 1 κι άρα είναι μετρήσιμη.

(β) Παρατηρήστε ότι το σύνολο $A_2 = \{x \in A \mid f(x) \leqslant 0\}$ είναι επίσης μετρήσιμο, αφού το $A_1 = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Αν $b \leqslant 0$. Τότε, $[f \leqslant b] = [f^2 \geqslant b^2] \cap A_2$ το οποίο είναι μετρήσιμο. Αν $b > 0$ τότε

$$[f \leqslant b] = (A_1 \cap [f^2 \leqslant b^2]) \cup A_2$$

το οποίο είναι μετρήσιμο, ως πράξεις τέτοιων.

4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$L = \{x \in A \mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$$

είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = \liminf f_n(x)$ και $h(x) = \limsup f_n(x)$ είναι μετρήσιμες. Τότε, το L γράφεται ως $L = [g = h] = \{x \in A \mid g(x) = h(x)\}$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

5. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ υπάρχει (q_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών ώστε $q_n \to a$. Τότε,

$$\{x \in A \mid f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > q_n\}.$$

Επειδή κάθε $\{x \in A \mid f(x) > q_n\}$ είναι μετρήσιμο έπεται ότι το $[f \geqslant a]$ είναι μετρήσιμο. Καθώς το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, το ζητούμενο έπεται.

6. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a,b)) = [f < b] \cap [f > a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Δηλαδή, $(a,b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

7. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;
(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

Υπόδειξη. (α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την ιδιότητα του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την δεξιά συνέχεια της f.
Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(x \in A : f(x) > t_n) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\lambda(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\lambda(x \in A : f(x) > t) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t) \overset{\lambda(A)<\infty}{\iff} \lambda(x \in A : f(x) = t) = 0.$$

Μ' άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\lambda(f^{-1}(\{t\})) = 0$.

(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t) \leqslant \omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k = \{x \in A : f_k(x) > t\}$. Τότε, $B_k \subseteq B_{k+1}$ και $\cup_{k=1}^{\infty} B_k = \{x \in A : f(x) > t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \omega_{f_k}(t) &= \lim_{k\to\infty} \lambda(x \in A : f_k(x) > t) = \lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) \\ &= \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lambda(x \in A : f(x) > t) = \omega_f(t). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

8. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $A = g^{-1}((a, +\infty))$ είναι διάστημα της μορφής $[b, +\infty)$ ή (b, ∞) αφού η g είναι αύξουσα. Επομένως, το $(g \circ f)^{-1}((a, +\infty)) = f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού η f είναι μετρήσιμη.

9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F : [0, \infty) \to [0, \infty]$ με $F(t) = \lambda(\{f > t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $t > s \geqslant 0$ έχουμε $\{f > t\} \subseteq \{f > s\}$. Συνεπώς,

$$F(t) = \lambda(\{f > t\}) \leqslant \lambda(\{f > s\}) = F(s).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n \to t$ ισχύει $F(t_n) \to F(t)$ (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό). Όμως,

$$\{f > t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f > t_n\}.$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι αν για κάποιον n ισχύει $f(x) > t_n$ τότε $f(x) > t$, ενώ αντίστροφα, αν $f(x) > t$, από το γεγονός ότι $t_n \to t$ έπεται ότι υπάρχει n ώστε $f(x) > t_n > t$. Έχουμε επίσης υποθέσει ότι η (t_n) είναι φθίνουσα, άρα $\{f > t_n\} \subseteq \{f > t_{n+1}\}$ για κάθε n. Δηλαδή, η $(\{f > t_n\})_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$F(t) = \lambda(\{f > t\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(\{f > t_n\}) = \lim_{n\to\infty} F(t_n).$$

Τέλος, για κάθε $t > 0$, από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$tF(t) = t\,\lambda(\{f > t\}) \leqslant \int f.$$

Άρα,

$$F(t) \leqslant \frac{1}{t}\int f,$$

και αυτό δείχνει ότ $\lim\limits_{t\to\infty} F(t) = 0$.

10. *Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n) \to \int (f_k - f).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leqslant f_k - f \leqslant f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n) \leqslant \int (f_k - f) \leqslant \int f_k < \infty$$

για κάθε n. Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n = \int f_k - \int (f_k - f_n) \to \int f_k - \int (f_k - f) = \int f.$$

11. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n}\,\lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} f \leqslant \int_E f = 0,$$

άρα $\lambda(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ σ.π.: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\lambda(Z) = 0$ και $\int_{E\setminus Z} f = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\lambda(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\lambda(E) = 0$.

12. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f \geqslant 1/n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n,n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n} f = \int f\chi_{[-n,n]} = \int g_n \to \int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geqslant 1/n\} \subseteq \{f \geqslant 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f = \int f\chi_{\{f\geqslant 1/n\}} = \int h_n \to \int f.$$

13. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leqslant n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leqslant n\} \subseteq \{f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \infty$

έχουμε τελικά $f(x) \leqslant n$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E \nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{f\leqslant n\}} = \int g_n = \int g_n\chi_E \to \int f\chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\lambda(E^c) = 0$ και $\int f\chi_{E^c} = 0$. Έπεται ότι

$$\int f = \int f\chi_E + \int f\chi_{E^c} = \int f\chi_E = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f\leqslant n\}} f.$$

14. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;*

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = 0$. Όμως, το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ δεν υπάρχει: έχουμε

$$f(n) \to 1 \text{ και } f(-n) \to 1.$$

15. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\lambda(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\int f, d\lambda = \int_0^{\infty} \lambda(f > t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(f > t)\, dt.$$

Επειδή η συνάρτηση $t \mapsto \lambda(f > t)$ είναι φθίνουσα η τελευταία σειρά είναι ισοδύναμη με την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\lambda(f > 2^k)$ και το συμπέρασμα έπεται.

16. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε*

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leqslant f \leqslant n\} \subseteq \{1/(n+1) \leqslant f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ και $f(x) \leqslant n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leqslant f \leqslant n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n\int f < +\infty.$$

17. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^x f$ είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leqslant F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$ (όμοια αντιμετωπίζεται κι άλλη περίπτωση). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f\chi_{(-\infty,x_n]}$ και $g = f\chi_{(-\infty,x]}$, οπότε $F(x_n) = \int f_n\,d\lambda$ και $F(x) = \int g\,d\lambda$. Επιπλέον, $g_n \to g$ κατά σημείο και $|g_n| \leqslant f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f = \int g_n\,d\lambda \to \int g\,d\lambda = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι δεξιά συνεχής.

18. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leqslant n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leqslant \int_E f_n + \int (f - f_n) \leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

19. *Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.*

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n,n+1)}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1)$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

ενώ $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

20. *Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι*

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n \right) ;$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($0 \leqslant f_n \leqslant 1$). Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

αλλά $\int f_n = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

21. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n \leqslant \int f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

22. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n - \int_E f_n \right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty} \left(-\int f_n \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_E f_n \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n \leqslant \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

23. *Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.*

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

24. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n \chi_{[0,n]}(x)$ των μετρησίμων συναρτήσεων για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \to e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

25. *Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2}dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1-x/n)^n e^{x/2}\chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείτει από από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leqslant e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκηρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geqslant 0$ εχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\right] = e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{-x/2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = 2,$$

που υπολογίζει το ζητούμενο όριο.

26. *Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geqslant 0$, $g_n \geqslant g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1 < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το δυϊκό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης – Άσκηση 10):

$$\int f - \lim_n \int f_n = \lim_n \Big(\int f - \int f_n\Big) = \lim_n \Big(\int f - f_n\Big) = \lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

27. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\left|\int |f_n| - \int |f|\right| \leqslant \int \big|\,|f_n| - |f|\,\big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\left|\int f_n - \int f\right| = \left|\int (f_n - f)\right| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

28. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.*

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε

$$\left|\int_E f_n - \int_E f\right| = \left|\int_E (f_n - f)\right| \leqslant \int_E |f_n - f| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 27. Με την υπόθεση ότι $\int |f_n - f| \to 0$, δείξαμε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int f_n^+ &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2} = \frac{1}{2}\int f_n + \frac{1}{2}\int |f_n| \to \frac{1}{2}\int f + \frac{1}{2}\int |f| \\ &= \int \frac{f+|f|}{2} = \int f^+.\end{aligned}$$

29. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της f με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int |f|\, d\lambda = \int_0^\infty \lambda(|f| > t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(|f| > t)\, dt.$$

Παρατηρήστε ότι η $t \mapsto \lambda(|f| > t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t > 0$, οπότε

$$2^{k-1}\lambda(|f| > 2^k) < \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(|f| > t)\, dt < 2^{k-1}\lambda(|f| > 2^{k-1}),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int |f|\, d\lambda$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(|f| > 2^k) < +\infty$.

30. *Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.*

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leqslant g_n$ έχουμε $-g_n \leqslant f_n \leqslant g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geqslant 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geqslant 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f + \int g = \int (f+g) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n + \int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n \to \int g$). Άρα,

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int g - \int f = \int (g-f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

31. *Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leqslant \int \big| |f_n| - |f| \big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big| |f_n - f| - |f_n| \big| \leqslant |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \to \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

32. *Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g ώστε $|f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι*

$$\int \left(\liminf_n f_n \right) \leqslant \liminf_n \int f_n \leqslant \limsup_n \int f_n \leqslant \int \left(\limsup_n f_n \right).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $h_n = g - f_n$, η οποία είναι ακολουθία ολοκηρωσίμων συναρτήσεων με $h_n \geqslant 0$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε:

$$\int [g+\liminf(-f_n)]\,d\lambda = \int \liminf h_n\,d\lambda \leqslant \liminf \int h_n\,d\lambda = \liminf \left(\int g\,d\lambda - \int f_n\,d\lambda\right).$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\liminf(-f_n) - \limsup f_n$ και ότι $\int g\,d\lambda < +\infty$ προκύπτει ότι

$$-\int \limsup f_n\,d\lambda \leqslant -\limsup \int f_n\,d\lambda,$$

το οποίο αποδεικνύει το δεξιό ζευγάρι ανισοτήτων. Για την άλλη μη τετριμμένη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων $u_n = g + f_n$.

33. *Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.*

(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf\left\{\int_E f : \lambda(E) \geqslant \frac{1}{2}\right\} > 0.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f = 0$ (διότι το $[0,1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$. Έστω $A, B \subset [0,1]$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\lambda([0,1]\setminus(A\cup B)) \geqslant 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0,1]$ με $\lambda(C) = 1/4$ και $C\cap A = C\cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\int_A f = \int_{A\cup C} f - \int_C f = -\int_C f = \int_{B\cup C} f - \int_C f = \int_B f,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A\cup C} f = 0 = \int_{B\cup C} f$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\lambda(A\cup C) = \lambda(B\cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\lambda(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0,1]$ με $\lambda(B) = 1/4$ και $A\cap B = \emptyset$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f = 2\int_A f.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 1$, αν $A \subset [0,1]$ και $\lambda(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυαδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leqslant m \leqslant 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0,m/2^k]} f = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$. Όπως στην Άσκηση 12, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυαδικό ρητό $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ειδικότερα, $\int_I f = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f = 0$, έπεται ότι $\int_F f = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0,1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\lambda(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(D) > 0$, όπου $D = \{f \geqslant 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\lambda(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f \geqslant \frac{1}{k}\lambda(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\lambda(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι· αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0,1]$, άρα $\lambda(E_k) \to 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\lambda(E) \geqslant 1/2$ τότε

$$\int_E f\,d\lambda \geqslant \int_{E\cap F} f\,d\lambda \geqslant \varepsilon\lambda(E \cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\lambda(E\cap F) \geqslant \lambda(E) + \lambda(F) - 1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f\,d\lambda \geqslant \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

34. *Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:*

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Μ' άλλα λόγια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leqslant F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

35. *(α) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.*

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leqslant |f|$ και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

36. *Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_n$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \geqslant k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f\, d\lambda \geqslant k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda(E_i) \geqslant \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geqslant \frac{k}{n}$.

2.2 Ομάδα Β΄

37. *(α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.*

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a, +\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a, +\infty))$. Όμως, η h είναι μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a, +\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι το $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε ϕ την επέκτασή της σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subseteq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

38. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a, b]$ σε κλειστά. Πράγματι· αν F κλειστό στο $[a, b]$, επειδή το $[a, b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \cup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ είναι F_σ.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.

Αντίστροφα· έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι $\lambda(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

39. *(α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.*

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, άρα από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$. Θέτουμε $Z = \limsup A_n$ επομένως, αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $x \notin A_n$ δηλαδή $f_n(x) \leqslant \alpha$, άρα $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$.

(β) Όπως προηγουμένως, υπάρχει Z με $\lambda(Z) = 0$ ώστε αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $f_n(x) \leqslant \varepsilon_n$. Καθώς, $\varepsilon_n \to 0^+$ το ζητούμενο έπεται.

40. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.*

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$. Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\lambda(x : |g(x)| > \beta) < \varepsilon$.

Έστω $E_n = \{x : |g(x)| \leqslant n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0,1]$ και η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, είναι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda([0,1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(A_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\lambda(x : |g(x)| > k) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(x : |f_n(x)| > \beta_n) < 1/2^n$. Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup E_n$, τότε από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli παίρνουμε $\lambda(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant \beta_n$. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_n = \frac{1}{n\beta_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $\frac{f_n(x)}{\alpha_n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

41. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t-περιοδική και s-περιοδική για κάποιους $t, s > 0$ με $t/s \notin \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μη αρνητική και φραγμένη. Ορίζουμε $F(x) = \int_0^x f(t)\,d\lambda(t)$. Για κάθε y της μορφής $y = kt + ms,\ k, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,d\lambda(t) = \int_0^x f(t+y)\,d\lambda(t) = \int_y^{x+y} f(t)\,d\lambda(t) = F(x+y) - F(y),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Kronecker γνωρίζουμε ότι το σύνολο $D = \{kt + ms : k, m \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Εφόσον, η F είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση $F(x+y) = F(x) + F(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε y σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = \alpha x$. Έτσι,

$$F(x) - \alpha x = \int_0^x f(t)\,d\lambda(t) - \alpha x = \int_0^x (f(t) - \alpha)\,d\lambda(t) = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από εδώ έπεται εύκολα ότι η $h(t) = f(t) - \alpha$ έχει ολοκλήρωμα μηδέν σε κάθε διάστημα κι άρα είναι μηδέν σχεδόν παντού.

Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(t) = 1 + \frac{2}{\pi}\arctan f(t)$ για την οποία πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι είναι μετρήσιμη και ότι $0 < f_1 < 2$.

42. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_n(x) = f(x)\chi_{E\cap[-n,n]}(x).$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Lusin, για κάθε n βρίσκουμε ένα κλειστό σύνολο $F_n \subseteq E \cap [-n, n]$ ώστε η $g_n\,|_{F_n}$ να είναι συνεχής και $\lambda(E\cap[-n,n]\setminus F_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$. Κατόπιν, επεκτείνουμε την g_n σε μια συνεχή συνάρτηση $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (θεώρημα Tietze, στην περίπτωσή μας είναι πιο απλό, αφού το $\mathbb{R} \setminus F_n$ είναι μια ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων). Τότε, οι $f_n := h_n\,|_E \colon E \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θέτουμε

$$D = \{x \in E : f_n(x) \not\to f(x)\}$$

και θα δείξουμε ότι $\lambda(D) = 0$. Έστω $x \in D$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x| \leqslant n_0$ και, άρα $x \in E \cap [-n, n]$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $g_n(x) = f(x)$. Αφού $f_n(x) \not\to f(x)$, θα πρέπει να υπάρχουν άπειροι φυσικοί n για τους οποίους $f_n(x) \neq g_n(x)$, δηλαδή άπειροι φυσικοί n για τους οποίους $x \in E_n := E \cap [-n, n] \setminus F_n$. Δηλαδή,

$$D \subseteq \limsup_{n\to\infty}(E_n).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε $\lambda(\limsup_n(E_n)) = 0$, άρα $\lambda(D) = 0$.

43. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f_x(y) := f(x, y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η $f^y(x) := f(x, y)$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ως εξής. Αν $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m = m_x \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε

$$f_n(x, y) = f\left(\frac{m_x}{n}, y\right).$$

Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$E_n(\alpha) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_n(x, y) > \alpha\right\} = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \left[(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, αφού η $f_{m/n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο

$$\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right) \times \{y \in \mathbb{R} : f(m/n, y) > \alpha\}$$

είναι μετρήσιμο. Έπεται ότι το $E_n(\alpha)$ είναι μετρήσιμο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, και αυτό δείχνει ότι η f_n είναι μετρήσιμη.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x, y) \to f(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Πράγματι, αφού $\frac{m_x}{n} \to x$ καθώς το $n \to \infty$ (εξηγήστε γιατί) και αφού η f^y είναι συνεχής, έχουμε

$$f_n(x, y) = f(m_x/n, y) = f^y(m_x/n) \to f^y(x) = f(x, y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

44. *Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν η $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in [0, 1]$.*

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 22 του Κεφαλαίου 1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq [0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J \subseteq [0, 1]$,

$$\lambda(J \cap E) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

Θεωρούμε την $f = \chi_E : [0,1] \to \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω $x_0 \in (0,1)$ και $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0,1)$. Τα σύνολα $A_\delta = E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $B_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus E$ έχουν θετικό μέτρο. Αφού $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού, μπορούμε να βρούμε $x_\delta \in A_\delta$ και $y_\delta \in B_\delta$ για τα οποία επιπλέον έχουμε

$$g(x_\delta) = f(x_\delta) = 1 \quad \text{και} \quad g(y_\delta) = f(y_\delta) = 0.$$

Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \subset (0,1)$ για κάθε $n \geqslant n_0$, και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση βρίσκουμε x_n, y_n με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $|y_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $g(x_n) = 1$ και $g(y_n) = 0$. Αφού $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ και

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} g(y_n),$$

η g είναι ασυνεχής στο x_0.

Παρόμοιο επιχείρημα εφαρμόζεται για τα $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$ (θεωρήστε διαστήματα της μορφής $[0,\delta)$ ή $(1-\delta, 1]$ αντίστοιχα).

45. *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)|\, d\lambda < \infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο και $M > 0$ ώστε $\lambda([0,1] \setminus A) < \varepsilon$ και, για κάθε $x \in A$, $\sup_n |f_n(x)| \leqslant M$.*

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = \sup_n |f_n(x)|$ είναι μετρήσιμη, διότι οι f_n είναι μετρήσιμες. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_n = \{x \in [0,1] : f(x) > n\}.$$

Αφού $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ για κάθε $x \in [0,1]$, βλέπουμε ότι η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με $\bigcap_{n=1}^\infty E_n = \emptyset$. Από τη συνέχεια του μέτρου Lebesgue έχουμε $\lambda(E_n) \to 0$. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_{n_0}) < \varepsilon$. Θέτοντας $A = [0,1] \setminus E_{n_0}$ και $M = n_0$, έχουμε

$$\lambda([0,1] \setminus A) = \lambda(E_{n_0}) < \varepsilon$$

και, για κάθε $x \in A$,

$$\sup_n |f_n(x)| = f(x) \leqslant n_0 = M.$$

46. *Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$. Συμβολίζουμε με f_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n.*

(α) Αν $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Αν για κάποιο $x \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(x))$ δεν συγκλίνει στο 0, τότε το x ανήκει σε άπειρα από τα I_n. Δηλαδή,

$$\{x \in [0,1] : f_n(x) \not\to 0\} \subseteq \limsup_{n\to\infty} I_n.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} I_n\right) = 0$, άρα $\lambda(\{x \in [0,1] : f_n(x) \not\to 0\}) = 0$. Έπεται ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Όχι. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$ με $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$, τέτοια η $f_n(x)$ να αποκλίνει παντού. Αρχικά, θέτουμε $I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]$, $I_3 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1\right]$, και θέτουμε $n_1 = 3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, και $\frac{1}{4} < 1$, άρα υπάρχει ο ελάχιστος $n_2 > 4$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=4}^{n_2} \frac{1}{n} > 1$. Καλύπτουμε τότε το $[0,1]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα $I_4, I_5, \dots, I_{n_2}$ για τα οποία έχουμε ότι $\lambda(I_k) \leqslant \frac{1}{k}$.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων I_n και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k τέτοια ώστε $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$, οποιαδήποτε δύο διαδοχικά από τα I_n έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, και $\bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} I_i = [0,1]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε σημείο $x \in [0,1]$ ανήκει σε άπειρα από τα I_n, αλλά όχι σε όλα τελικά τα I_n, επομένως η $f_n(x)$ δεν συγκλίνει.

47. *Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n|\, d\lambda = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\delta_n := \frac{\log(n/a)}{n(b-a)}$. Τότε, για κάθε $n > a$ ισχύει $\delta_n > 0$ και $f_n(x) < 0$ για $0 < x < \delta_n$. Επομένως,

$$\int_0^{\infty} |f_n|\, d\lambda \geqslant \int_0^{\delta_n} [ne^{-nbx} - ae^{-nax}]\, d\lambda = \frac{1}{b} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{b}{b-a}}} \left(1 - \frac{a}{b}\right) a^{\frac{a}{b-a}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n|\, d\lambda = +\infty$.

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{e^{-bx}}{(1-e^{-bx})^2}.$$

Έπεται ότι $\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\lambda = +\infty$. Τέλος, είναι

$$\int_0^{\infty} f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} - \frac{1}{b},$$

συνεπώς έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda = -\infty$.

48. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x^{-1/2}$ *αν* $0 < x < 1$ *και* $f(x) = 0$ *αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση* $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ *των ρητών, και θέτουμε* $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-q_n)}{2^n}$.

(α) Δείξτε ότι η g *είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα,* $|g| < \infty$ *σχεδόν παντού.*

(β) Δείξτε ότι η g *είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν μεταβάλλουμε τις τιμές της* g *σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.*

(γ) Δείξτε ότι $g^2 < \infty$ *σχεδόν παντού, αλλά η* g^2 *δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.*

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x-q_n)|}{2^n} \, d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x-q_n)| \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_{q_n}^{q_n+1} \frac{1}{\sqrt{x-q_n}} \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, d\lambda(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, 2\sqrt{t} \,\big|_0^1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2 < \infty.
\end{aligned}$$

Αφού $f \geqslant 0$ έχουμε

$$|g(x)| = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x-q_n)|}{2^n},$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, d\lambda(x) < \infty,$$

δηλαδή η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Έστω (a,b) ένα διάστημα κα έστω $M > 0$. Θεωρούμε ένα ρητό $q_m \in (a,b)$ και βρίσκουμε $\epsilon > 0$ ώστε $(q_m, q_m + \epsilon) \subset (a,b)$. Παρατηρήστε ότι

$$g(x) \geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m} = \frac{1}{2^m\sqrt{x-q_m}} > M$$

για κάθε $x \in (q_m, q_m+\delta)$, όπου $\delta = \min\left\{\frac{1}{2^m M}, \epsilon\right\}$. Αφού το $(q_m, q_m+\delta)$ είναι υποδιάστημα του (a,b), έπεται ότι

$$\lambda(\{x \in (a,b) : g(x) > M\}) > 0$$

και το ίδιο θα ισχύει για κάθε συνάρτηση h που είναι ίση με την g σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε τέτοια h δεν είναι φραγμένη στο (a,b).

Έπεται επίσης ότι η g δεν είναι συνεχής σε κανένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = +\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $g(x) < \infty$ παρατηρούμε ότι αν η g ήταν συνεχής στο x τότε θα υπήρχε κάποιο διάστημα $(x-\eta, x+\eta)$ στο οποίο η g θα ήταν φραγμένη, κάτι που είδαμε ότι δεν μπορεί να συμβεί.

(γ) Θεωρούμε τυχόν διάστημα $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Υπάρχει ρητός q_m τέτοιος ώστε $q_m < b < q_m + 1$. Αφού

$$g(x) \geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m} \geqslant 0,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{(a,b)} g^2(x)\,d\lambda(x) &\geqslant \int_{(a,b)} \frac{f^2(x-q_m)}{2^{2m}}\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2^{2m}}\int_{q_m}^{b} \frac{1}{x-q_m}\,d\lambda(x)\\ &= \int_0^{b-q_m} \frac{1}{t}\,d\lambda(t) = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη στο (a,b), παρόλο που, αφού $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού, έχουμε $g^2(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

49. *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f\,d\lambda \geqslant \delta$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \left\{x \in A : f(x) < \frac{1}{n}\right\}$. Η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του A, και $\bigcap_n A_n = \emptyset$ διότι η f είναι γνησίως θετική. Αφού $\lambda(A) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $lim_n \lambda(A_n) = 0$.

Έστω $t > 0$. Επιλέγουμε $n(t)$ ώστε $\lambda(A_{n(t)}) < \frac{t}{2}$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq A$ με $\lambda(E) > t$, έχουμε

$$\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \lambda(E) - \lambda(A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f\, d\lambda \geqslant \int_{E\setminus A_{n(t)}} f\, d\lambda \geqslant \frac{1}{n(t)}\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2n(t)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, με $\delta = \delta(t) = \frac{t}{2n(t)}$.

50. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ και $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leqslant M$ για κάθε $t \in [0,\delta]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n(x)|\, d\lambda(x) &= \frac{1}{n}\int_0^1 |f(t)|\, t^{\frac{1}{n}-1}\, d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{n}\int_0^\delta |f(t)|\, t^{\frac{1}{n}-1}\, d\lambda(t) + \frac{1}{n}\int_\delta^1 |f(t)|\, t^{\frac{1}{n}-1}\, d\lambda(t)\\ &\leqslant \frac{M}{n}\int_0^\delta t^{\frac{1}{n}-1}\, d\lambda(t) + \frac{1}{n\delta^{1-\frac{1}{n}}}\int_\delta^1 |f(t)|\, d\lambda(t)\\ &\leqslant M\delta^{\frac{1}{n}} + \frac{\delta^{\frac{1}{n}}}{\delta n}\int_0^1 |f(t)|\, d\lambda(t) < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f_n \in L_1[0,1]$.

51. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\, d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant f(x) + 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Πράγματι, αν $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant 1 \leqslant f(x) + 1$, ενώ αν $f(x) \geqslant 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant f(x) \leqslant f(x) + 1$. Αν ορίσουμε

$$g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

έχουμε λοιπόν $0 \leqslant g_n \leqslant f + 1$, και η συνάρτηση $f + 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Παρατηρούμε τώρα ότι: αν $f(x) = 0$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} = 0 \to 0$, ενώ αν $0 < f(x) < \infty$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} \to 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $0 \leqslant f(x) < \infty$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\sqrt[n]{f(x)} = g_n(x) \to \chi_{\{x:f(x)>0\}}$$

σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\, d\lambda(x) = \int_0^1 g_n(x)\, d\lambda(x) \to \int_0^1 \chi_{\{x: f(x)>0\}}(x)\, d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

52. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $B = \{f \leqslant 0\}$ και $B_k = \left\{f < \frac{1}{k}\right\}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, η (B_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$, και $\bigcap_{k=1}^\infty B_k = B$, άρα

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) = \lambda(B) = 0.$$

Επομένως, υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε $\lambda(B_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από την υπόθεση υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{A_n} f\, d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{2k_0}.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$, αφού $f \geqslant \frac{1}{k_0}$ στο $[0,1] \setminus B_{k_0}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(A_n) &= \lambda(A_n \cap B_{k_0}) + \lambda(A_n \cap ([0,1] \setminus B_{k_0})) \leqslant \lambda(B_{k_0}) + k_0 \int_{A_n \cap ([0,1]\setminus B_{k_0})} \frac{1}{k_0}\, d\lambda \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + k_0 \int_{A_n} f\, d\lambda \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lambda(A_n) \to 0$.

Σημείωση. Το γεγονός ότι το $[0,1]$ έχει πεπερασμένο μέτρο χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά. Αν θεωρήσουμε την $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $[1,\infty)$, τότε η f είναι γνήσια θετική και αν θέσουμε $A_n = [n, n+1]$ έχουμε

$$\int_{A_n} f\, d\lambda \leqslant \frac{1}{n^2} \to 0,$$

όμως $\lambda(A_n) = 1 \not\to 0$.

53. *Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x > 0$ ορίζουμε $g(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-xt}\, d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.*

Υπόδειξη. Έστω $t > 0$. Θέτουμε $g_t(x) = e^{-xt}$. Η παράγωγος της g_t είναι ίση με $g_t'(x) = -te^{-xt}$. Σταθεροποιούμε $x_0 > 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| = |g_t'(z)||x - x_0| = te^{-tz}|x - x_0|$$

για κάποιο z μεταξύ των x, x_0. Αφού $z \geqslant x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2}$, έχουμε $e^{-tz} \leqslant e^{-tx_0/2}$. Άρα,

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| \leq te^{-tx_0/2}|x - x_0|.$$

Θεωρούμε την $h_{x_0}(t) = te^{-tx_0/2}$. Αφού $\lim_{t\to 0^+} h_{x_0}(t) = 0$ και $\lim_{t\to+\infty} h_{x_0}(t) = 0$, υπάρχει $M_{x_0} > 0$ τέτοιος ώστε $|h_{x_0}(t)| \leqslant M_{x_0}$ για κάθε $t > 0$. Άρα, αν $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|g(x) - g(x_0)| &= \left|\int_0^\infty f(t)(e^{-xt} - e^{-x_0 t})\, d\lambda(t)\right| \leqslant |\int_0^\infty |f(t)|te^{-tx_0/2}|x - x_0|\, d\lambda(t)\\ &\leqslant M_{x_0}|x - x_0|\int_0^\infty |f| d\lambda.\end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $x \to x_0$ βλέπουμε ότι $g(x) \to g(x_0)$, άρα η g είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, θεωρούμε τυχόν $0 < \varepsilon < 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\delta |f|\, d\lambda < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $x > \frac{-\log\varepsilon}{\delta}$ και $t > \delta$, τότε $-xt < \log\varepsilon$. Άρα, αν $x > \frac{-\log\varepsilon}{\delta}$,

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leqslant \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}\, d\lambda(t) = \int_0^\delta |f(t)|e^{-xt}\, d\lambda(t) + \int_\delta^\infty |f(t)|e^{-xt}\, d\lambda(t)\\ &\leqslant \int_0^\delta |f(t)|\, d\lambda(t) + \int_\delta^\infty |f(t)|e^{\log\varepsilon}\, d\lambda(t) < \varepsilon + \varepsilon\int_0^\infty |f|\, d\lambda.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, 1)$ ήταν τυχόν και $\int_0^\infty |f|\, d\lambda < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

54. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$ και έστω $f, g : E \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με*

$$\int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda.$$

Δείξτε ότι είτε (α) $f = g$ σχεδόν παντού στο E είτε (β) υπάρχει μετρήσιμο $A \subset E$ τέτοιο ώστε

$$\int_A f\, d\lambda < \int_A g\, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι

$$\int_A g\, d\lambda \leqslant \int_A f\, d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subset E$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $F \subset E$, θέτοντας $A = E \setminus F$ στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_F g\,d\lambda &= \int_E g\,d\lambda - \int_{E\setminus F} g\,d\lambda \\ &= \int_E f\,d\lambda - \int_{E\setminus F} g\,d\lambda \\ &\geqslant \int_E f\,d\lambda - \int_{E\setminus F} f\,d\lambda \\ &= \int_F f\,d\lambda,\end{aligned}$$

άρα τελικά έχουμε

$$\int_F g\,d\lambda \leqslant \int_F f\,d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο $F \subset E$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $B_\varepsilon = \{f - g \geqslant \varepsilon\}$ και $C_\varepsilon = \{g - f \geqslant \varepsilon\}$. Τότε, τα B_ε και C_ε είναι μετρήσιμα, και

$$0 = \int_{B_\varepsilon} f\,d\lambda - \int_{B_\varepsilon} g\,d\lambda = \int_{B_\varepsilon} (f-g)\,d\lambda \geqslant \varepsilon\lambda(B_\varepsilon),$$

άρα $\lambda(B_\varepsilon) = 0$. Όμοια δείχνουμε ότι $\lambda(C_\varepsilon) = 0$. Έπεται ότι

$$\lambda(\{|f-g| \geqslant 1/n\}) = \lambda(B_{1/n} \cup C_{1/n}) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda(\{f \neq g\}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{n} \{|f-g| \geqslant 1/n\}\right) = 0.$$

Δηλαδή, $f = g$ σχεδόν παντού στο E.

55. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει το εξής: για κάθε $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) > 0$ ισχύει*

$$t_E := \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f\,d\lambda \in A.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $Z = \{x \in [0,1] : f(x) \notin A\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Υπόδειξη. Αφού το A είναι κλειστό, μπορούμε να γράψουμε το συμπλήρωμά του σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων:

$$\mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} Z = \{x \in [0,1] : f(x) \notin A\} &= \left\{x \in [0,1] : f(x) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in [0,1] : f(x) \in (a_k, b_k)\}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $\lambda(Z) > 0$. Τότε, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο

$$Z_k := \{x \in [0,1] : f(x) \in (a_k, b_k)\}$$

να έχει θετικό μέτρο. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $E = Z_k$ βλέπουμε ότι

$$t_k := \frac{1}{\lambda(Z_k)} \int_{Z_k} f \, d\lambda \in A.$$

Όμως, $a_k < f(x) < b_k$ για κάθε $x \in Z_k$. Άρα,

$$a_k \lambda(Z_k) < \int_{Z_k} f \, d\lambda < b_k \lambda(Z_k),$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$a_k < t_k := \frac{1}{\lambda(Z_k)} \int_{Z_k} f \, d\lambda < \beta_k.$$

Δηλαδή, $t_k \in (a_k, b_k)$. Άρα, $t_k \notin A$, το οποίο είναι άτοπο.

56. *Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)| \, d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Άρα, η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|$$

συγκλίνει σχεδόν παντού. Ειδικότερα, $f_n(t) - f(t) \to 0$ σχεδόν παντού.

57. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$,

$$\int_A f_n \, d\lambda \to 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η h είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν E είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ και $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E h \, d\lambda < \varepsilon$.

Έστω A Borel υποσύνολο του $[0,1]$. Μπορούμε να βρούμε συμπαγές K και ανοικτό $U \subset [0,1]$ ώστε $K \subseteq A \subseteq U$ και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Urysohn βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g(x) = 1$ για κάθε $x \in K$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus U$. Τώρα γράφουμε

$$\int_A f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n \chi_A \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda + \int_{[0,1]} f_n (\chi_A - g) \, d\lambda,$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1]} f_n (\chi_A - g) \, d\lambda \right| &\leqslant \int_{[0,1]} |f_n| \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{[0,1]} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \\ &= \int_{U \setminus K} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{U \setminus K} h \, d\lambda < \varepsilon, \end{aligned}$$

διότι $\chi_A - g \equiv 0$ στο K και στο $[0,1] \setminus U$, $|\chi_A - g| \leqslant 1$ στο $U \setminus K$, και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Έπεται ότι

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| \leqslant \lim_{n \to \infty} \left| \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right| + \varepsilon = \varepsilon,$$

διότι $\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0$ από την υπόθεση. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

58. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού, και*

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant 10$$

για κάθε n. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} |f(x)|\, d\lambda(x) \to 0.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $\alpha > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda &= \int_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}} |f_n|\, d\lambda + \int_{\{|f_n|>\alpha\}} |f_n|\, d\lambda \\ &\leqslant \int_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}} |f_n|\, d\lambda + \int_{\{|f_n|>\alpha\}} \frac{|f_n|^2}{\alpha}\, d\lambda \\ &\leqslant \alpha \int_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}} d\lambda + \frac{10}{\alpha} \\ &= \alpha \int_{[0,1]} \chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}\, d\lambda + \frac{10}{\alpha}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι $g_n := \chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}$ φράσσονται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g \equiv 1$ στο $[0,1]$, και από την υπόθεση ότι $|f_n(x)| \to 0$ σχεδόν παντού έπεται ότι «$|f_n(x)| < \alpha$ τελικά» σχεδόν παντού, δηλαδή «$\chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}(x) = 0$ τελικά» σχεδόν παντού, δηλαδή $\chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}(x) \to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_{[0,1]} \chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}\, d\lambda \to 0.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda \leqslant \frac{10}{\alpha}.$$

Αφού το $\alpha > 0$ ήταν τυχόν, αφήνοντας το $\alpha \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda = 0 \ \text{ άρα } \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda = 0.$$

59. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\leqslant\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)^2$, άρα

$$n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\leqslant 2n\ln\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)\leqslant 2|f(x)|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)\leqslant\frac{|f(x)|}{n}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x)=n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)$, έχουμε $|g_n|\leqslant 2|f|$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $|f(x)|<\infty$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$|g_n(x)|=n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\leqslant n\frac{|f(x)|^2}{n^2}=\frac{|f(x)|^2}{n}\to 0$$

σχεδόν παντού. Δηλαδή, $g_n\to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}}n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)d\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}}g_n(x)d\lambda(x)\to 0.$$

60. *Έστω $f:[0,1]\to[1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{[0,1]}f\ln f\,d\lambda\geqslant\int_{[0,1]}f\,d\lambda\cdot\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\alpha=\int_{[0,1]}f\,d\lambda>0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g=f/\alpha$. Παρατηρούμε ότι $(y-1)\ln y\geqslant 0$ για κάθε $y>0$ (αν $y\leqslant 1$ τότε $y-1\leqslant 0$ και $\ln y\leqslant 0$, ενώ αν $y>1$ τότε $y-1>0$ και $\ln y>0$). Συνεπώς, $y\ln y\geqslant\ln y$ για κάθε $y>0$. Αφού η g παίρνει θετικές τιμές, έχουμε $g\ln g\geqslant\ln g$ στο $[0,1]$, άρα

$$\int_{[0,1]}g\ln g\,d\lambda\geqslant\int_{[0,1]}\ln g\,d\lambda.$$

Αφού $g=f/\alpha$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\frac{f}{\alpha}(\ln f-\ln\alpha)\,d\lambda&=\int_{[0,1]}\frac{f}{\alpha}\ln\frac{f}{\alpha}\,d\lambda\geqslant\int_{[0,1]}\ln\frac{f}{\alpha}\,d\lambda\\&\geqslant\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda-\int_{[0,1]}\ln\alpha\,d\lambda=\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda-\ln\alpha,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{1}{\alpha}\int_{[0,1]}f\ln f\,d\lambda-\frac{\int_{[0,1]}f\,d\lambda}{\alpha}\ln\alpha\geqslant\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda-\ln\alpha,$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_{[0,1]}f\ln f\,d\lambda\geqslant\alpha\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda=\int_{[0,1]}f\,d\lambda\cdot\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda.$$