Κεφάλαιο 1

Μέτρο Lebesgue

1.1 Ομάδα Α

1. *(α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.*

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $A \subseteq (-\alpha, \alpha)^d$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \leqslant \ell((-\alpha, \alpha)^d) = (2\alpha)^d < +\infty.$$

(β) Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(I) = \ell(I) > 0.$$

2. *(α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).*

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Από την $\lambda(A \triangle B) = 0$ έχουμε ότι τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ είναι μετρήσιμα και $\lambda(A \setminus B) = 0$ και $\lambda(B \setminus A) = 0$. Γράφοντας

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup (B \setminus A),$$

συμπεραίνουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, και

$$\lambda(B) = [\lambda(A) - \lambda(A \setminus B)] + \lambda(B \setminus A) = \lambda(A).$$

(β) Γράφουμε

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cup B),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $A \setminus B$, B είναι ξένα και $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

(γ) Από την $B = A \cup (B \setminus A)$ παίρνουμε $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A)$, διότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα. Αφού $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, διαγράφοντάς τα, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Αν $A = [1, +\infty)$ και $B = [0, +\infty)$, τότε $A \subseteq B$, $\lambda(A) = \lambda(B) = +\infty$ και $B \setminus A = [0, 1)$, δηλαδή $\lambda(B \setminus A) = 1 > 0$.

3. *(α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.*

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

Υπόδειξη. (α) Αφού $A \subseteq A \cup B$, έχουμε $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(A \cup B)$. Από την υπόθεση και από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα:

$$\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda^*(A),$$

διότι $\lambda^*(B) = 0$.

(β) Παρατηρήστε ότι $\lambda^*(A \setminus B) \leqslant \lambda^*(A \triangle B) = 0$. Συνεπώς, $\lambda^*(A \setminus B) = 0$. Όμοια, $\lambda^*(B \setminus A) = 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &\leqslant \lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(B \cup (A \setminus B)) \\ &\leqslant \lambda^*(B) + \lambda^*(A \setminus B) = \lambda^*(B). \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A)$.

4. *(α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t > 0$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx : x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = t\, \lambda^*(A)$.*

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = tI_n$, είναι κάλυψη του tA και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = t \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(tI) = t\ell(I)$ για κάθε διάστημα (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda^*(tA) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : tA \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(tI_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf\left\{t\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = t\,\lambda^*(A). \end{aligned}$$

(β) Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leqslant C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C\,\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C\,\ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= C\,\lambda^*(A). \end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n)) \leqslant 2n\lambda(A_n) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A)) = 0$.

5. *(α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα*
$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

(β) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\, \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και
$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon)\lambda^*(A)$$
(εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $0 < \lambda^*(E) < +\infty$, εξηγήστε γιατί). Από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε
$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n).$$
Από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι, για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,
$$\lambda^*(A \cap I_m) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\, \ell(I_m).$$
Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Σημείωση. Το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda^*(E) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε το $E_M := E \cap [-M, M]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda^*(E_M) < \infty$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 5(α) για το E_M, βρίσκουμε ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα
$$\lambda^*(E \cap I) \geqslant \lambda^*(E_M \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

(β) Αφού $\lambda(A \cap I) \leqslant \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I, συμπεραίνουμε ότι $0 < \delta \leqslant 1$. Αν πάλι $\delta = 1$, έχουμε $\lambda(A \cap (-n, n)) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lambda(A^c \cap (-n, n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lambda(A^c) = 0$ (εξηγήστε τα βήματα).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \delta < 1$. Έστω ότι $\lambda(A^c) > 0$. Από το (α) υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα
$$\lambda(A^c \cap I) > (1-\delta)\, \ell(I).$$
Τότε,
$$\lambda(A \cap I) = \lambda(I) - \lambda(A^c \cap I) < \ell(I) - (1-\delta)\, \ell(I) = \delta\, \ell(I),$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

6. *Έστω* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *με*

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα $\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ ισχύει πάντα, από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A \cup B) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_{n,1}, \ldots, J_{n,k_n}$ με μήκος μικρότερο από $\delta/2$, όπου $\delta = \mathrm{dist}(A,B)$, ώστε $I_n \subseteq J_{n,1} \cup \cdots \cup J_{n,k_n}$ και $\ell(I_n) < \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (αν $I_n = (a_n, b_n)$, θεωρήστε το κλειστό διάστημα $\left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ και χωρίστε το σε k_n διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$). Τότε, η $\{J_{n,s} : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant s \leqslant k_n\}$ είναι κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) + \varepsilon.$$

Αν $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $A \cap J_{n,s} \neq \emptyset$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $B \cap J_{n,s} \neq \emptyset$, τότε $A \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} U_s$, $B \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} V_s$ και $U_s \cap V_m = \emptyset$ για κάθε s, m: για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $y \in U_s \cap V_m$ τότε υπάρχουν $a \in A \cap U_s$ και $b \in B \cap V_m$ ώστε $|y-a| < \ell(U_s) < \delta/2$ και $|y-b| < \ell(V_m) < \delta/2$, οπότε $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant |a-b| \leqslant |a-y| + |y-b| < \delta$, το οποίο είναι άτοπο. Με άλλα λόγια, καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $J_{n,s}$ ανήκει σε μία το πολύ από τις $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) + \lambda^*(B) &\leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \ell(U_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \ell(V_s) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $A \cup B$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A \cup B)$.

7. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ με $F \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

(iii) Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\lambda^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$.

Υπόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $\varepsilon > 0$. Το A είναι μετρήσιμο, άρα το A^c είναι μετρήσιμο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G ώστε $A^c \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A^c) = \lambda(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Θέτουμε $F = G^c$. Τότε, το F είναι κλειστό, $F \subseteq A$, και $A \setminus F = G \setminus A^c$. Συνεπώς,

$$\lambda^*(A \setminus F) = \lambda^*(G \setminus A^c) < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_k \subseteq \mathbb{R}$ με $F_k \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F_k) < 1/k$. Ορίζουμε $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Το Γ είναι F_σ-σύνολο και $\Gamma \subseteq A$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^*(A \setminus \Gamma) \leqslant \lambda^*(A \setminus F_k) < \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda^*(A \setminus \Gamma) = 0.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\lambda^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$. Το $A \setminus \Gamma$ είναι μετρήσιμο (έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο). Το Γ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων). Άρα, το Γ είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = \Gamma \cup (A \setminus \Gamma)$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

8. *Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο Lebesgue του E θέτοντας*

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : \ F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_{(i)}(E) \leqslant \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

Υπόδειξη. (α) Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\lambda(F) \leqslant \lambda^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leqslant \lambda^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\lambda(E) < \lambda(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\lambda_{(i)}(E)$ έπεται ότι $\lambda(E) < \lambda_{(i)}(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lambda^*(E) \leqslant \lambda_{(i)}(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E) = \lambda_{(i)}(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E) = \lambda(G) < \infty$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\lambda(G \setminus F) = \lambda(G) - \lambda(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι Lebesgue μετρήσιμο (με $\lambda(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0, 1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$.*

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(A \cap (-\infty, y]) \leqslant \lambda(A \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, n]) = \lambda(A)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, -n]) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A\cap(-\infty,n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A\cap(-\infty,-n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\lambda(A\cap(-\infty,-1])\leqslant\lambda(A)<\infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0=\lim_{n\to\infty}f(-n)<\frac{\lambda(A)}{2}<\lim_{n\to\infty}f(n)=\lambda(A),$$

υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε

$$f(x)=\lambda(A\cap(-\infty,x])=\frac{\lambda(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F=A\cap(-\infty,x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

10. *(α) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Ορίζουμε τα σύνολα*

$$\limsup A_n=\{x\in\mathbb{R}:x\in A_n \text{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n=\{x\in\mathbb{R}:\ \text{υπάρχει } n_0(x)\in\mathbb{N} \text{ ώστε } x\in A_n \text{ για κάθε } n\geqslant n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k \quad\text{και}\quad \liminf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

(β) Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:

(i) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(ii) $\lambda(\liminf A_n)\leqslant\liminf\lambda(A_n)$ και αν $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)<+\infty$ τότε

$$\limsup\lambda(A_n)\leqslant\lambda(\limsup A_n).$$

(iii) (Λήμμα Borel-Cantelli) Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)<+\infty$, τότε $\lambda(\limsup A_n)=0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $k\geqslant n$ ώστε $x\in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x\in A_k$ για άπειρες τιμές του k.

Ανάλογα, παρατηρήστε ότι $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $x\in\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k\geqslant n$ να ισχύει $x\in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

(β) (i) Αφού κάθε A_n είναι μετρήσιμο σύνολο, από τις

$$\limsup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k \quad\text{και}\quad \liminf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

είναι φανερό ότι τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ενώσεις μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα).

(ii) Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (B_n) είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$. Άρα,

$$\lambda(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $B_n \subseteq A_n$ άρα $\lambda(B_n) \leqslant \lambda(A_n)$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$.

Όμοια, θέτουμε $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (C_n) είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup A_n$. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda(C_1) < +\infty$, άρα,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $A_n \subseteq C_n$ άρα $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n)$.

(iii) Με τον συμβολισμό του (ii), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(\limsup A_n) \leqslant \lambda(C_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) < +\infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k) = 0.$$

Έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

11. *Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:*

(i) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.*

(ii) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.*

(iii) *Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.*

(iv) Έστω $A \subseteq [a,b]$. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.

(v) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\lambda(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.

Υπόδειξη. (i) Ψευδής: το σύνολο του Cantor έχει μηδενικό μέτρο αλλά είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αληθής: κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) = 0$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αληθής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A \subseteq G_n$ και $\lambda(G_n) < \frac{1}{n} + \lambda^*(A)$. Ορίζουμε $G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, οπότε $B \subseteq A \subseteq G$ και

$$\lambda(G \setminus B) = \lambda(G) - \lambda(B) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι το $N = G \setminus B$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου. Τότε, γράφοντας $A = B \cup (A \cap N)$ βλέπουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Αληθής: αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα (J_n^{ε}) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n^{\varepsilon}) < \varepsilon$. Θέτουμε $I_{n,m} := J_n^{1/2^m}$. Τότε, η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $I_{n,m}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Αντίστροφα, έστω (I_n) κάλυψη του A από ανοικτά διαστημάτων με $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και έστω $\varepsilon > 0$ Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Αφού κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα (I_n), έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} I_n$. Τότε,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $\lambda^*(A) = 0$.

(v) Αληθής: αν $\lambda(A) = 0$, τότε προφανώς όλα τα υποσύνολά του είναι μετρήσιμα, και αν $\lambda(A) > 0$, τότε έχουμε δείξει ότι το A περιέχει μη μετρήσιμο σύνολο.

12. *(α) Έστω $A \subseteq [a,b]$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

(β) (Λήμμα του Steinhaus) Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι το «σύνολο διαφορών»

$$A - A := \{x - y : x \in A, y \in A\}$$

του A περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$.

(γ) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. (α) Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda(A) > 0$.

(β) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Από την $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant (1 + \varepsilon)\lambda(A \cap I_k).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

$$\lambda(A \cap I) \geqslant \frac{3\ell(I)}{4}.$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t).$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t, t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I + s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

$$2\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap I) + \lambda((A \cap I) + s) \leqslant \ell(I) + s < \frac{3\ell(I)}{2},$$

δηλαδή $\lambda(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t)$.

(γ) Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0,1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \emptyset$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1)) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m).$$

Όμως, $\lambda(F_m) = \lambda(E_m)$ για κάθε m. Συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(E_m) = \lambda(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x-\delta, x+\delta),\ |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x \in A$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ έχουμε

$$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in A$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x, δηλαδή $x \in A$. Έτσι, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m. Έστω $u \in (x-\delta, x+\delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $(u-\delta_1, u+\delta_1) \subseteq (x-\delta, x+\delta)$. Τότε, αν $y, z \in (u-\delta_1, u+\delta_1)$ έχουμε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$, άρα $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, έπεται ότι το A είναι G_δ-σύνολο.

14. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $f_n(x) > s$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > s\}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς, κάθε σύνολο της μορφής $\{x : f_n(x) > s\}$ (όπου $s, n \in \mathbb{N}$) είναι ανοικτό. Άρα, το B είναι σύνολο Borel.

15. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.*

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$.

(i) Έχουμε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ και, αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(A^c) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$

διότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(iv) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

16. *Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:*

(i) $A_1 = \{x \in [0,1) : x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) : x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \dots, \ x_n \neq 5\}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{10}, 1\right).$$

Συνεπώς, $\lambda(A_1) = \frac{9}{10}$.

(β) Για τον ορισμό του A_1 χωρίσαμε το $[0,1)$ σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα $[0, 1/10), [1/10, 2/10), \dots, [9/10, 1)$ και αφαιρέσαμε το $[5/10, 6/10)$ το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0,1)$ για τα οποία $x_1 = 5$. Για να ορίσουμε το A_2 χωρίζουμε καθένα από τα υπόλοιπα διαστήματα $[k/10, (k+1)/10)$, $k \neq 5$, σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/10^2$ και αφαιρούμε το ένα από αυτά (το έκτο κάθε φορά είναι το σύνολο των σημείων του υποδιαστήματος για τα οποία $x_2 = 5$). Αυτό σημαίνει ότι το A_2 αποτελείται από 81 ξένα ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/100$. Συνεπώς,

$$\lambda(A_2) = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

(γ) Συνεχίζοντας αυτόν τον συλλογισμό, βλέπουμε ότι το σύνολο

$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5, \dots, x_n \neq 5\}$$

έχει μέτρο

$$\lambda(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Συνεπώς, για το σύνολο $A = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \dots, \ x_n \neq 5\}$ έχουμε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και, αφού η $\{A_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, παίρνουμε

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

17. *Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοικτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα.*

Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα.

(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1-\theta > 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1-\frac{\theta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\theta}{3^2} = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1,2,\dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητεσ:

(i) $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

(ii) Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

(iii) $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\theta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(C_\theta) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \theta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1-\theta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1-\theta\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

18. *Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε*

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon))\leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A\subseteq[0,1]$ και $\lambda(A)=0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon}{2^n}=2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1]\subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1\leqslant\lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon))\leqslant 2\varepsilon<1$.

(γ) Αφού $0\leqslant q_n\leqslant 1$, για κάθε $j\in\mathbb{N}$ έχουμε $A\subseteq A(1/j)\subseteq[-1/j,1+1/j]$. Άρα,

$$A\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}[-1/j,1+1/j]=[0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A)\leqslant\lambda(A(1/j))\leqslant 2/j$$

για κάθε $j\in\mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A)=0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q}\cap[0,1]=\{q_n:n\in\mathbb{N}\}\subseteq A(1/j)$ για κάθε $j\in\mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq\bigcap_{j=1}^{\infty}A(1/j)=A$.

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$, το $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1]=A\cup([0,1]\setminus A)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}([0,1]\setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1]\setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

19. *(α) Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

(β) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lambda(\limsup A_n) > 0$ και ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη. (α) Αφού $\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

(β) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geqslant \lambda(A_k) \geqslant c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \geqslant c > 0.$$

Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

20. *Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\rho(A,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap (x-t,x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η μετρική πυκνότητα του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0) = \alpha$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\lambda(\mathbb{Q} \cap (x-t,x+t)) = 0 \ \text{ και } \ \lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap (x-t,x+t)) = 2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t,x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{Q} \cap (x-t,x+t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \cap (x-t,x+t))}{2t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{2t}{2t} = 1.$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n \subset C_n$ ώστε $\lambda(A_n) = \alpha\lambda(C_n)$ (το C_n είναι απλό σύνολο και η επιλογή του A_n δεν παρουσιάζει δυσκολίες – θυμηθείτε όμως και την Άσκηση 9(β)). Ορίζουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1} \leqslant t < \frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} \leqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/n,1/n))}{2/(n+1)} = \frac{2\alpha/n}{2/(n+1)} = \alpha\frac{n+1}{n} \leqslant \alpha(1+2t),$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} &\geqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/(n+1),1/(n+1)))}{2/n} = \frac{2\alpha/(n+1)}{2/n} \\ &= \alpha\frac{n}{n+1} \geqslant \alpha(1-2t).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} = \alpha,$$

δηλαδή $\rho(A,0)=\alpha$.

1.2 Ομάδα Β

21. *Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $E\subset F$ και $\lambda(E)<\lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha\in\big(\lambda(E),\lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E\subset K\subset F$ και $\lambda(K)=\alpha$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(W)>0$, τότε, για κάθε $0<\beta<\lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V\subset W$ ώστε $\lambda(V)=\beta$.

Πράγματι, αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a,b]\subset\mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q\subset\mathbb{R}^{d-1}$ ώστε $W\subseteq Q_1:=[a,b]\times Q$. Ορίζουμε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$f(t)=\lambda(W\cap\{x=(x_1,\dots,x_k)\in Q_1:\, a\leqslant x_1\leqslant t\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t)-f(s)|\leqslant \lambda_{d-1}(Q)\,|t-s|.$$

Αφού $f(a)=0$ και $f(b)=\lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. □

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $E\subset F$ και $\lambda(E)<\lambda(F)$. Έστω $\alpha\in\big(\lambda(E),\lambda(F)\big)$. Αφού $\alpha-\lambda(E)<\lambda(F\setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W\subseteq F\setminus E$ με $\lambda(W)>\alpha-\lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V\subset W$ ώστε $\lambda(V)=\alpha-\lambda(E)$. Αν θέσουμε $K=E\cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E\subset K\subset F$ και $\lambda(K)=\alpha$.

22. *Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E\subseteq[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J\subseteq[0,1]$,*

$$\lambda(J\cap E)>0 \quad \text{και} \quad \lambda(J\setminus E)>0.$$

Υπόδειξη. Ελέγξτε πρώτα ότι αν I είναι ένα διάστημα μήκους α, και αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor αφαιρώντας στο n-οστό βήμα ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\alpha\delta/3^n$ (όπου $0<\delta<1$), τότε το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\alpha(1-\delta)$.

Παίρνουμε $0 < \delta_1 < 1$ και κατασκευάζουμε σύνολο D^1 στο $[0,1]$ με τον παραπάνω τρόπο. Το D^1 δεν περιέχει διαστήματα και $\lambda(D^1) = 1 - \delta_1$.

Το $B_1 = [0,1] \setminus D^1$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_1 = \cup_j R_j^1$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^1}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_2 < 1$ (το ίδιο για κάθε j). Προκύπτει σύνολο D_j^2 που δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_j^2) = (1-\delta_2)\lambda(R_j^1)$. Ορίζουμε

$$D^2 = D^1 \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} D_j^2\right).$$

Τότε,

$$\lambda(D^2) = (1-\delta_1) + (1-\delta_2)\delta_1 = 1 - \delta_1\delta_2.$$

Το $B_2 = [0,1] \setminus D_2$ είναι πάλι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_2 = \cup_j R_j^2$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^2}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_3 < 1$ (το ίδιο για κάθε j).

Επαγωγικά, ορίζουμε μια ακολουθία $\{D^n\}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητεσ:

(i) $D^{n+1} \subset B^n = [0,1] \setminus D^n$.

(ii) $\lambda(D^n) = 1 - \delta_1\delta_2\cdots\delta_n$.

(iii) Το $D^n \setminus D^{n-1}$ είναι ένωση αριθμήσιμων το πλήθος μη επικαλυπτόμενων κλειστών συνόλων D_j^n, καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαστήματα.

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε συγκεκριμμένα $\delta_j = \frac{2^j+1}{2^j+2}$ ώστε

$$\delta_1\delta_2\cdots\delta_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} D^n$. Τότε, $\lambda(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(D^n) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \delta_1\cdots\delta_n) = \frac{1}{2}$. Το E είναι μετρήσιμο, αφού κάθε D^n είναι σύνολο Borel.

Έστω $J = [a,b]$ υποδιάστημα του $[0,1]$. Ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει υποδιάστημα R_j^n κάποιου B_n ώστε $R_j^n \subseteq J$.

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι δεν υπάρχει $R_j^1 \subset B_1$ με $R_j^1 \subseteq J$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει j ώστε $R_j^1 \cap J \neq \emptyset$ (αλλιώς θα είχαμε $J \subseteq D^1$, άτοπο). Αφού το $R_j^1 = (a_j, b_j)$ είναι ανοικτό, το $R_j^1 \cap J$ είναι διάστημα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεισ:

(α) $a_j < a < b_j < b$: υπάρχει $R_t^1 = (a_t, b_t)$ με $b_j < a_t \leqslant b$ (αλλιώς, $[b_j, b] \subseteq D^1$ το οποίο είναι άτοπο). Τότε όμως, υπάρχει $R_s^1 = (a_s, b_s) \subseteq [b_j, a_t)$ λόγω της κατασκευής του D^1. Άρα, υπάρχει $R_s^1 \subseteq J$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) $a < a_j < b < b_j$: καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο.

(γ) $J = [a, b] \subset R_j^1 = (a_j, b_j)$: στο $\overline{R_j^1}$ κατασκευάστηκε το D_j^2. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό, βλέπουμε ότι είτε υπάρχει j ώστε $R_j^2 \subseteq J$ ή υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^2$.

Συνεχίζοντας έτσι, βλέπουμε ότι είτε υπάρχουν n και j ώστε $R_j^n \subseteq J$ ή για κάθε n υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^n$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε θα είχαμε

$$\lambda(J) \leqslant \inf_n \lambda(R_j^n) = 0$$

(παρατηρήστε ότι $\lambda(R_j^n) \leqslant \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{3^n}$). □

Υπάρχει λοιπόν κάποιο R_j^n, ανοικτό υποδιάστημα κάποιου D^n, ώστε $R_j^n \subseteq J$. Όμως τότε, στο $\overline{R_j^n}$ κατασκευάστηκε το D_j^{n+1}, το οποίο έχει μέτρο $\lambda(R_j^{n+1}) = \lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1})$, μέσα σε αυτό αριθμήσιμα το πλήθος D_j^{n+2} με συνολικό μέτρο $\lambda(R_j^n)\delta_{n+1}(1 - \delta_n)$ κλπ. Δηλαδή, το συνολικό μέτρο των D_j^m, $m > n$ που κατασκευάστηκαν μέσα στο R_j^n είναι ίσο με

$$\lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1}\delta_{n+2} \cdots) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right).$$

Έπεται ότι

$$\lambda(E \cap R_j^n) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(R_j^n \setminus E) = \lambda(R_j^n)\frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n} > 0.$$

Αφού $R_j^n \subseteq J$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(E \cap J) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

23. *Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x, s \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$x, x + s, x + 2s, \dots, x + (k - 1)s \in E.$$

Υπόδειξη. Αφού $\lambda(E) > 0$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5 βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a, b]$ ώστε

$$\lambda(E \cap [a, b]) > \frac{k - 1}{k}(b - a).$$

Θέτουμε $A = E \cap [a, b]$. Χωρίζουμε το $[a, b)$ σε k διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{k}$:

$$I_1 = [a, a + s), \;\; I_2 = [a + s, a + 2s), \;\; \dots \;\; , \;\; I_k = [a + (k - 1)s, b),$$

και για κάθε $j = 1, \ldots, k$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και $B_1 = A_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \bigcap_{j=1}^{k} B_j \neq \emptyset.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = A_j - (j-1)s$ δηλαδή $x + (j-1)s \in A_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Αφού $A_j \subseteq A \subseteq E$ για κάθε j, έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s, \ldots, x+(k-1)s \in E.$$

Για την απόδειξη της $(*)$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda\left(I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k}(I_1 \setminus B_j)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_1 \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus (A \cap I_j)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \cap A^c) = \lambda([a,b] \setminus A) \\
&< \frac{1}{k}(b-a) = \lambda(I_1).
\end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1, και έπεται η $(*)$.

24. *Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(B) > 0$. Δείξτε ότι το $A + B$ περιέχει διάστημα.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A και B έχουν πεπερασμένο και θετικό μέτρο. Μπορούμε να βρούμε αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ διαστημάτων, που οι κορυφές τους έχουν ρητές συντεταγμένες, ώστε $A \subseteq G$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A) \leqslant \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_k).$$

Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A \cap I_k).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα και στο B, καταλήγουμε στο εξής: υπάρχουν διαστήματα I_0 και J_0 με ρητά άκρα, ώστε

$$(*) \qquad \lambda(A \cap I_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_0) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_0).$$

Αφού τα μήκη των I_0 και J_0 είναι ρητοί αριθμοί, μπορούμε να βρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε τα I_0 και J_0 να χωρίζονται σε m και n διαδοχικά διαστήματα αντίστοιχα, που όλα έχουν το ίδιο μήκος. Χρησιμοποιώντας και την $(*)$ βλέπουμε τώρα ότι υπάρχουν διαστήματα I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος, ώστε

$$\lambda(A \cap I_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει διάστημα I με κέντρο το 0 και υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda((A-x) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I) \quad \text{και} \quad \lambda((B-y) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I).$$

Έπεται ότι

$$\lambda((A-x) \cap (B-y) \cap I) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(I) > 0.$$

Θέτουμε $C = (A-x)\cap(B-y)$. Από το Λήμμα του Steinhaus, το $C-C$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0. Αφού

$$A - B - (x+y) = (A-x) - (B-y) \supseteq C - C,$$

συμπεραίνουμε ότι το $A-B$ περιέχει διάστημα. Αντικαθιστώντας το B με το $-B$ παίρνουμε το ζητούμενο.

25. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in E$ ισχύει $\frac{1}{2}(x+y) \in E$. Δείξτε ότι το E έχει μη κενό εσωτερικό.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το $\frac{E}{2} = \left\{\frac{x}{2} : x \in E\right\}$. Αφού το E έχει θετικό μέτρο, το $\frac{E}{2}$ είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο:

$$\lambda\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{\lambda(E)}{2} > 0.$$

Από την Άσκηση 24, το σύνολο $\frac{E}{2} + \frac{E}{2}$ περιέχει κάποιο διάστημα.

Όμως, από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι $\frac{E}{2} + \frac{E}{2} \subseteq E$. Άρα, το E περιέχει διάστημα. Ειδικότερα, έχει μη κενό εσωτερικό.

26. *Δείξτε ότι το σύνολο των $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $\sin(2^n x) \to a$ τότε $a = 0$. Πράγματι, αν $\sin(2^n x) \to a \neq 0$ τότε, για μεγάλα n, έχουμε $\sin(2^n x) \neq 0$, άρα

$$\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1} x)}{2\sin(2^n x)} \to \frac{1}{2}.$$

Όμως, τότε

$$\sin^2(2^n x) = \frac{1-\cos(2^{n+1}x)}{2} \to \frac{1}{4},$$

άρα

$$1 = \cos^2(2^n x) + \sin^2(2^n x) \to \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το σύνολο A των $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει είναι το

$$A = \{x \in [0, 2\pi) : \sin(2^n x) \to 0\}.$$

Το A είναι μετρήσιμο: θέτουμε $f_k(x) = \sin(2^k x)$, και $A_{k,m} = \left\{x \in [0, 2\pi) : |f_k(x)| < \frac{1}{m}\right\}$. Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ η f_k είναι συνεχής, άρα το $A_{k,m}$ είναι ανοικτό στο $[0, 2\pi)$, και μπορούμε να δούμε ότι

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_{k,m}.$$

Άρα, το A είναι μετρήσιμο.

Υποθέτουμε ότι $\lambda(A) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι αν $x, y \in A$ τότε

$$\sin\left(2^n \frac{x+y}{2}\right) = \sin(2^{n-1}x)\cos(2^{n-1}y) + \cos(2^{n-1}x)\sin(2^{n-1}y) \to 0,$$

συνεπώς $\frac{x+y}{2} \in A$. Από την Άσκηση 25, το A, άρα και το $\frac{1}{2\pi}A \subseteq [0, 1]$, έχουν μη κενό εσωτερικό.

Έπεται ότι το $\frac{1}{2\pi}A$ περιέχει έναν τριαδικό ρητό, της μορφής $\frac{k}{3^m}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ με $0 < k < 3^m$, και ο k δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τότε, $\sin\left(\frac{2^{n+1}}{3^m}k\pi\right) \to 0$, άρα και η $\sin\left(\frac{2^n}{3}k\pi\right) \to 0$. Ειδικότερα, $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right) \to 0$. Παρατηρούμε ότι $3 \mid 4^n - 1$, άρα $6 \mid 2^{2n+1} - 2$. Επομένως, ο $\frac{2^{2n+1}-2}{3}$ είναι άρτιος, άρα $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right) = \sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$. Επομένως, η $\sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$ (η οποία είναι σταθερή) συγκλίνει στο 0. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο $\frac{2k}{3}\pi$ δεν είναι ακεραιο πολλαπλάσιο του π.

27. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι*

$$\lambda\big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big) = 0.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 24. Αν είχαμε $\lambda\big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big) > 0$ τότε το σύνολο $A - \big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big)$ θα περιείχε κάποιο διάστημα I. Παρατηρούμε όμως ότι αν $x \in A - \big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big)$ τότε $x \notin \mathbb{Q}$ (αλλιώς θα είχαμε $-x \in \mathbb{Q}$ και $x = a - y$, όπου $a \in A$ και $y \notin A + \mathbb{Q}$, το οποίο θα οδηγούσε στην $a - x = y \notin A + \mathbb{Q}$ το οποίο είναι άτοπο).

Αφού το διάστημα I περιέχει ρητούς, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Απευθείας απόδειξη. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει πεπερασμένο $J_n \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε

$$(*) \qquad \lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_{t\in J_n} (A+t)\right) < \frac{2}{n}.$$

Αν θέσουμε $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ τότε προκύπτει άμεσα ότι

$$\lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_{t\in J} (A+t)\right) = 0.$$

Τέλος, αν ορίσουμε $I = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}}(J+r)$ και γράψουμε το I στη μορφή $\{t_s : s \in \mathbb{N}\}$ (παρατηρήστε ότι το I είναι αριθμήσιμο) μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\lambda\Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s=1}^{\infty} (A+t_s)\Big) \leqslant \sum_{r\in\mathbb{Z}} \lambda\left([r,r+1] \setminus \bigcup_{t\in J+r} (A+t)\right) = 0$$

και αφού $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Z}} (J+r) \subseteq \mathbb{Q}$ έπεται το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της $(*)$ παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο και $I = \left[y - \frac{1}{k}, y + \frac{1}{k}\right]$ για κατάλληλο $y \in \mathbb{Q}$, έχουμε

$$\lambda\,(A \cap I) \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{2}{k},$$

άρα

$$\lambda(I \setminus A) \leqslant \frac{1}{n}\frac{2}{k}.$$

Τώρα, $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{k-1} \left[\frac{j}{k} - \frac{1}{k}, \frac{j}{k} + \frac{1}{k}\right]$. Άρα,

$$[0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} (A + \frac{j}{k} - y) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k-1} \left((I \setminus A) + \frac{j}{k}\right).$$

Θέτοντας $J_n = \{\frac{j}{k} - y : j = 1, \dots, k-1\}$ παίρνουμε

$$\lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_{t\in J_n} (A+t)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \lambda\left((I \setminus A) + \frac{j}{k}\right) = (k-1)\lambda(I \setminus A) < \frac{2(k-1)}{k}\frac{1}{n} < \frac{2}{n}.$$

28. *Δείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ και $\lambda(A+B) > 0$. Μπορεί το $A + B$ να περιέχει διάστημα;*

Υπόδειξη. Μπορούμε να δείξουμε ότι $C + C/2 \supseteq [0,1]$, όπου C είναι το σύνολο του Cantor και $C/2 = \{x/2 : x \in C\}$. Πράγματι, έστω $x \in [0,1]$. Θεωρούμε το τριαδικό ανάπτυγμα

$x = 0.x_1x_2\ldots x_n\ldots$ του x. Για κάθε n έχουμε $x_n \in \{0,1,2\}$. Ορίζουμε $y_n = x_n$ αν $x_n \in \{0,2\}$ και $y_n = 0$ αν $x_n = 1$. Επίσης, ορίζουμε $z_n = x_n - y_n$ για κάθε n, δηλαδή $z_n = 0$ αν $x_n \in \{0,2\}$ και $z_n = 1$ αν $x_n = 1$. Παρατηρήστε ότι $y \in C$: κάθε $y_n = 0$ ή 2. Επίσης, αν θέσουμε $u = 2y = 0.(2y_1)(2y_2)\ldots(2y_n)\ldots$, τότε $u \in C$: κάθε $u_n = 0$ ή 2. Άρα,

$$x = y + z = y + \frac{u}{2} \in C + \frac{C}{2}.$$

Τέλος, $\lambda(C) = \lambda(C/2) = 0$. Θέτοντας $A = C$ και $B = C/2$ έχουμε το ζητούμενο.

29. *Δώστε παράδειγμα ανοικτού υποσυνόλου G του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: το σύνορο του $\overline{G}$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο D τύπου Cantor το οποίο έχει θετικό μέτρο (για παράδειγμα, το σύνολο C_θ της Άσκησης 17. Ένα ανοικτό υποσύνολο G του $[0,1]$ με την ιδιότητα $\lambda(\partial(\overline{G})) > 0$ είναι η ένωση των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν στα «περιττά» βήματα της κατασκευής (το πρώτο, το τρίτο, κλπ). Για να το δούμε αυτό, ονομάζουμε U την ένωση των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν στα «άρτια» βήματα της κατασκευής. Έχουμε $[0,1] = G \cup (D \cup U)$, και τα τρία αυτά σύνολα είναι ξένα. Τώρα, αποδείξτε τα εξής:

(i) $\overline{G} = G \cup D$. Το $G \cup D$ είναι κλειστό, διότι το $[0,1] \setminus (G \cup D) = U$ είναι ανοικτό σύνολο. Επίσης, $G \subseteq G \cup D$, αρκεί λοιπόν να δείξετε ότι κάθε $x \in D$ είναι σημείο συσσώρευσης του G (αυτό είναι απλό: μιμηθείτε την απόδειξη του ότι κάθε $x \in D$ είναι σημείο συσσώρευσης του D).

(ii) $\partial(G \cup D) = D$.

Έπεται ότι $\lambda(\partial(\overline{G})) = \lambda(D) > 0$.

30. *Γνωρίζουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι ο δίσκος $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση ανοικτών ορθογωνίων.*

Υπόδειξη. Έστω ότι ο δίσκος μπορεί να γραφτεί ως ένωση ανοικτών και ξένων ορθογωνίων. Τότε, το $(0,0)$ ανήκει σε ένα από αυτά, έστω R. Στρέφοντας το σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $R = (a,b) \times (c,d)$. Τότε $a < 0 < b$ και $c < 0 < d$. Επίσης, αν $d > 1$, τότε το $\left(0, \frac{d+1}{2}\right)$ ανήκει στο R, άρα και στον δίσκο, το οποίο είναι άτοπο, άρα $d \leqslant 1$. Επίσης, $a > -1$: όπως και για το d, αρχικά έχουμε ότι $a \geqslant -1$. Επιπλέον, αν $a = -1$, τότε $\frac{-1}{2} < \frac{-\sqrt{1-d^2/4}}{2} < \frac{1}{2}$, άρα $a = -1 < \frac{-1-\sqrt{1-d^2/4}}{2} < 0 < b$, επομένως το σημείο $\left(\frac{-1-\sqrt{1-d^2/4}}{2}, \frac{d}{2}\right)$ ανήκει στο R, άρα και στον δίσκο, και με πράξεις βλέπουμε ότι αυτό είναι άτοπο.

Θεωρούμε τώρα το σημείο $(a,0)$, το οποίο από τα παραπάνω ανήκει στον δίσκο. Τότε, υπάρχει ορθογώνιο S, ξένο προς το R, με $(a,0) \in S$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(a,0) \in B((a,0),\varepsilon) \subseteq S$, αλλά οποιαδήποτε μπάλα με κέντρο το $(a,0)$ τέμνει το R.

31. *Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $B = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$ και $C = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,\infty)$. Παρατηρήστε ότι το B είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και το C είναι G_δ-σύνολο διότι γράφεται στη μορφή $C = \bigcap_{\mathbb{Q}\cap(0,\infty)}((0,\infty) \setminus \{q\})$. Ειδικότερα, τα B και C είναι Borel σύνολα. Ορίζουμε

$$A = B \cup C = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0,\infty)).$$

Το A είναι Borel σύνολο ως ένωση δύο Borel συνόλων.

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

(i) Το B δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Θέτοντας $U_n = G_n \cap (-\infty, 0]$ θα είχαμε $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ και κάθε U_n θα ήταν ανοικτό και πυκνό στον πλήρη μετρικό χώρο $(-\infty, 0]$ αφού $U_n \supseteq B$ και το B είναι πυκνό στο $(-\infty, 0]$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του B και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = (-\infty, 0] \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε

$$\emptyset = B \cap ((-\infty, 0] \setminus B) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right),$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire.

(ii) Το C δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε το $\mathbb{R} \setminus C = \mathbb{Q} \cup (-\infty, 0]$ θα ήταν G_δ-σύνολο, άρα και η τομή του με το G_δ-σύνολο $[1,\infty)$, δηλαδή το $\mathbb{Q} \cap [1,\infty)$ θα ήταν G_δ-σύνολο. Αυτό οδηγεί σε άτοπο όπως πριν.

(iii) Το A δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $(-\infty, 0]$ είναι G_δ-σύνολο, θα είχαμε ότι το $B = A \cap (-\infty, 0]$ είναι G_δ-σύνολο.

(iv) Ομοίως, το A δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $[0,\infty)$ είναι κλειστό σύνολο, θα είχαμε ότι το $C = A \cap [0,\infty)$ είναι F_σ-σύνολο.

32. *Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Δείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, τότε το $A+B$ είναι κλειστό. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A+B$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = a_n + b_n$, όπου $a_n \in A$ και $b_n \in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to a \in A$. Τότε, $b_{k_n} = x_{k_n} - a_{k_n} \to x - a$. Αφού το B είναι κλειστό, έχουμε $x - a \in B$. Άρα, $x = a + (x-a) \in A + B$. Έπεται ότι το $A+B$ είναι κλειστό.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα A, B είναι κλειστά. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n \cap [-n, n]$. Το A_n είναι συμπαγές, άρα το $A_n + B$ είναι κλειστό από την προηγούμενη παρατήρηση. Έπεται ότι το

$$A + B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + B)$$

είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το $A+B$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Ορίζουμε $A = \mathbb{Z}$ και $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Τα A, B είναι κλειστά (εξηγήστε γιατί). Όμως, το $A+B = \mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = (\sqrt{2}-1)^n$ είναι στο $A+B$ και $\alpha_n \to 0$. Έστω $x > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $0 < \alpha_{n_0} < \varepsilon$ και μετά $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $m\alpha_{n_0} \leqslant x < (m+1)\alpha_{n_0}$. Τότε, $0 \leqslant x - m\alpha_{n_0} < \alpha_{n_0} < \varepsilon$. Αν $x < 0$ δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε πάλι $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $|x - m\alpha_{n_0}| < \varepsilon$. Αφού $m\alpha_{n_0} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = A + B$, έπεται ότι $\overline{A+B} = \mathbb{R}$.

33. *Έστω $\epsilon > 0$. Έστω A το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$. Δείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 0,$$

άρα $\lambda(A) = 0$. Για κάθε $q \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$B_{n,q} = \bigcup_{p=-nq}^{nq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right).$$

Τότε,

$$A_n \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{q=k}^{\infty} B_{n,q} = \limsup_q B_{n,q}.$$

Έχουμε

$$\lambda(B_{n,q}) \leqslant \sum_{p=-nq}^{nq} \frac{2}{q^{2+\epsilon}} = \frac{4n}{q^{1+\epsilon}} + \frac{2}{q^{2+\epsilon}},$$

άρα

$$\sum_{q=1}^{\infty} \lambda(B_{n,q}) \leqslant 4n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\epsilon}} + 2\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2+\epsilon}} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup_q B_{n,q}) = 0$.

34. *Θέτουμε* $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. *Δείξτε ότι:*

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ακολουθία* $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ *ανοικτών διαστημάτων ώστε:* $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ *και* $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^{m}$ *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε* $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} R_j$, *τότε* $\sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j) \geqslant 1$.

Υπόδειξη. (α) Το A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, άρα μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $A = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $R_j = \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}, a_j + \frac{1}{2^{j+2}}\right)$. Τότε, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(β) Έστω ότι $R_j = (a_j, b_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $T_j = (a_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Παρατηρήστε ότι, αφού $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_m$,

$$[0,1] = \overline{A} \subseteq \overline{R_1 \cup \cdots \cup R_m} = \overline{R_1} \cup \cdots \cup \overline{R_m} \subseteq T_1 \cup \cdots \cup T_m.$$

Έπεται (το έχουμε δεί στη θεωρία) ότι

$$1 = \ell([0,1]) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \ell(T_j) = \sum_{j=1}^{m} (\ell(R_j) + 2\varepsilon = 2m\varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j).$$

Το πλήθος m των διαστημάτων είναι σταθερό. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

35. *(α) Έστω* G *φραγμένο, μη κενό ανοικτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^d$. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη* $\{B_j\}$ *του* G *από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του* G *ανήκει σε άπειρες το πλήθος* B_j *και* $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ *ανοικτών μπαλών ώστε να καλύπτει το* G *όπως στο (α) και για κάθε* $p > 1$ *να ισχύει* $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$. Τότε, η πρώτη υπόθεση μας λέει ότι

$$G \subseteq \limsup_j B_j.$$

Από την δεύτερη υπόθεση και από το λήμμα Borel-Cantelli (Άσκηση 10 (β)) έχουμε ότι $\lambda\left(\limsup_j B_j\right) = 0$. Άρα, $\lambda(G) = 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού το G έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Το G είναι φραγμένο, άρα περιέχεται σε έναν κύβο Q με μήκος ακμής a. Θέτουμε $Q_1^0 = Q$.

Διχοτομούμε κάθε ακμή του Q_1^0, και παίρνουμε 2^d κλειστούς κύβους $Q_i^1, i = 1, \dots 2^d$. Αν x_i^1 είναι το κέντρο του Q_i^1, θέτουμε $B_i^1 = B\left(x_i^1, 3\frac{a\sqrt{d}}{2}\right)$. Τότε $Q_i^1 \subseteq B_i^1$ για κάθε $i = 1, \dots 2^d$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, διχοτομώντας τις ακμές κάθε κύβου του προηγούμενου βήματος. Στο n-οστό βήμα παίρνουμε 2^{dn} μπάλες, καθεμία από τις οποίες έχει ακτίνα $3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}$, άρα το άθροισμα των p δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_d)]^p 2^{dn} \left(3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}\right)^{dp} = [\lambda(B_d)]^p (3a\sqrt{d})^{dp} 2^{nd(1-p)},$$

όπου B_d είναι η Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε σημείο του Q ανήκει σε κάποιον κύβο του n-οστού, άρα και σε μία μπάλα του n-οστού βήματος. Αν θεωρήσουμε την συλλογή όλων των μπαλών που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο σε οποιοδήποτε βήμα, έχουμε μια κάλυψη $\{B_j\}_j$ του Q, άρα και του G, με την ιδιότητα ότι κάθε $x \in G$ ανήκει σε άπειρες B_j. Τέλος, το άθροισμα της σειράς των p-δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_d)]^p \sum_{n=1}^{\infty} (3a\sqrt{d})^{dp} 2^{d(1-p)n} < \infty,$$

αφού $2^{d(1-p)} < 1$.

36. *Εξετάστε αν υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε*

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right).$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να ορίσουμε αρίθμηση των ρητών για την οποία

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) < \infty.$$

Αυτό προφανώς αποδεικνύει το ζητούμενο. Θεωρούμε μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $M := \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ στο $\mathbb{Q} \setminus [0,1]$ και μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N} \setminus M$ στο $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Συνδυάζοντάς τις, έχουμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ με την ιδιότητα: $n = k^2$ αν και μόνο αν $|q_n| > 1$. Παρατηρήστε ότι $\bigcup_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right) \subseteq [-1, 2]$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n \notin M}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant 3.$$

Επίσης,

$$\sum_{n \in M} \lambda\left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < 4.$$

Άρα,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n \notin M}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) + \sum_{n \in M} \lambda\left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) < \infty.$$

37. *(α) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ έχει μέτρο μηδέν.*

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (α) $\lambda(\Gamma + \Gamma) > 0$, (β) το $\Gamma + \Gamma$ περιέχει κάποιο μη κενό ανοικτό σύνολο, (γ) η f δεν είναι γραμμική συνάρτηση.

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a,b]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε το $[a,b]$ σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_k$ μήκους μικρότερου ή ίσου από δ. Τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ έχουμε ότι το $f(I_j)$ περιέχεται σε ένα διάστημα T_j μήκους $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k}\{(x, f(x)) : x \in I_j\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times f(I_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times T_j.$$

Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \times T_j) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)\ell(T_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \varepsilon,$$

διότι

$$\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \ell([a,b]) = b - a.$$

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι το $\Gamma+\Gamma$ είναι μετρήσιμο. Πράγματι, $\Gamma+\Gamma = g([a,b]\times[a,b])$, όπου $g(x,y) = (x+y, f(x)+f(y))$. Η g είναι συνεχής, άρα το $\Gamma+\Gamma$ είναι συμπαγές (ειδικότερα, μετρήσιμο) ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου $[a,b]\times[a,b]$. Η συνεπαγωγή (β) $\Longrightarrow$ (α) είναι απλή: αν το $\Gamma+\Gamma$ περιέχει κάποιο μη κενό ανοικτό σύνολο, τότε περιέχει κάποια μπάλα, άρα και κάποιο μη εκφυλισμένο ορθογώνιο Q. Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma+\Gamma) \geqslant \lambda(Q) = \ell(Q) > 0.$$

Δείχνουμε τώρα τη συνεπαγωγή (α) $\Longrightarrow$ (γ): έστω ότι $\lambda(\Gamma+\Gamma) > 0$ και ότι η f είναι γραμμική, δηλαδή $f(x) = Ax+B$ για κάποιους $A, B \in \mathbb{R}$. Τότε, $\Gamma+\Gamma = \{(x+y, A(x+y)+2B) : a \leqslant x \leqslant b\}$. Δηλαδή, το $\Gamma+\Gamma$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^2$ (που περιέχεται στην ευθεία $z = Au+2B$). Εύκολα ελέγχουμε ότι $\lambda(\Gamma+\Gamma) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος, δείχνουμε την συνεπαγωγή (γ) $\Longrightarrow$ (β): η υπόθεση είναι ότι η f δεν είναι γραμμική. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x \neq y$ στο (a,b) με $f'(x) \neq f'(y)$ (αν η f' ήταν σταθερή στο (a,b) τότε η f θα ήταν γραμμική. Για την συνάρτηση g που ορίσαμε παραπάνω έχουμε τότε ότι η Ιακωβιανή της στο (x,y) δεν μηδενίζεται: ελέγξτε ότι είναι ίση με $|f'(x) - f'(y)| > 0$. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έπεται ότι η g είναι ομοιομορφισμός σε μια περιοχή του (x,y), άρα το $\Gamma+\Gamma = g([a,b]\times[a,b])$ έχει μη κενό εσωτερικό.

38. *Έστω $A \subseteq E \subseteq B$. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $\lambda(A) = \lambda(B) < \infty$, δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\lambda(A) = \lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(B) = \lambda(B)$. Από την υπόθεση ότι $\lambda(A) = \lambda(B)$ έπεται ότι ισχύει παντού ισότητα στην παραπάνω σχέση. Ειδικότερα, $\lambda(A) = \lambda^*(E)$.

Αφού το A είναι μετρήσιμο, και από την $E \cap A = A$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(A) = \lambda^*(E) &= \lambda^*(E\cap A) + \lambda^*(E\setminus A)\\ &= \lambda^*(A) + \lambda^*(E\setminus A) = \lambda(A) + \lambda^*(E\setminus A),\end{aligned}$$

απ¨ όπου έπεται ότι $\lambda^*(E\setminus A) = 0$. Άρα, το $E\setminus A$ είναι μετρήσιμο, και έπεται ότι το το $E = A \cup (E\setminus A)$ είναι μετρήσιμο.

39. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Υποθέτουμε ότι $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Δείξτε ότι τα E_1, E_2 είναι μετρήσιμα.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν ανοικτά σύνολα A_n, B_n, G_n με

$$E_1 \subseteq A_n, \ \ E_2 \subseteq B_n \ \text{ και } \ E \subseteq G_n,$$

τέτοια ώστε

$$\lambda(A_n) < \lambda^*(E_1) + \frac{1}{n}, \;\; \lambda(B_n) < \lambda^*(E_2) + \frac{1}{n} \;\text{ και }\; \lambda(G_n) < \lambda(E) + \frac{1}{n}.$$

Θέτουμε $C_n = \bigcap_{k=1}^{n} (G_k \cap A_k)$ και $D_n = \bigcap_{k=1}^{n} (G_k \cap B_k)$. Τότε, οι $(C_n), (D_n)$ είναι φθίνουσες ακολουθίες ανοικτών συνόλων, με $E_1 \subseteq C_n, E_2 \subseteq D_n$, και

$$\lambda(C_n) < \lambda^*(E_1) + \frac{1}{n}, \;\; \lambda(D_n) < \lambda^*(E_2) + \frac{1}{n}.$$

Ορίζουμε τώρα $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ και $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. Τα C, D είναι G_δ-σύνολα, άρα είναι μετρήσιμα. Επιπλέον, $E_1 \subseteq C$ και $E_2 \subseteq D$, άρα $E \cap D^c \subseteq E_1$. Άρα, για να δείξουμε ότι το E_1 είναι μετρήσιμο, από την Άσκηση 38 αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(C) = \lambda(E \cap D^c)$. Αφού τα $C, E \cap D^c$ έχουν πεπερασμένο μέτρο και $E \cap D^c \subseteq C$, αρκεί να δείξουμε ότι το $C \setminus (E \cap D^c) = (C \cap D) \cup (C \cap E^c)$ έχει μηδενικό μέτρο.

Για το $C \cap E^c$, γράφουμε $C \cap E^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (C_n \cap E^c)$. Όμως, η $(C_n \cap E^c)$ είναι φθίνουσα, και

$$\lambda(C_n \cap E^c) \leqslant \lambda(G_n \cap E^c) = \lambda(G_n) - \lambda(E) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Επομένως, $\lambda(C \cap E^c) = 0$.

Για το $C \cap D$, γράφουμε $C \cap D = \bigcap_{n=1}^{\infty} (C_n \cap D_n)$. Όμως, η $(C_n \cap D_n)$ είναι φθίνουσα, και

$$\begin{aligned}\lambda(C_n \cap D_n) &= \lambda(C_n) + \lambda(D_n) - \lambda(C_n \cup D_n) \leqslant \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \frac{2}{n} - \lambda(C_n \cup D_n)\\ &\leqslant \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \frac{2}{n} - \lambda(E) = \frac{2}{n},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $E = E_1 \cup E_2 \subseteq C_n \cup D_n$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Άρα, $\lambda(C \cap D) = 0$.

40. *Έστω E Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές, και δείξτε ότι αν το E είναι F_σ-σύνολο τότε το $T(E)$ είναι F_σ-σύνολο. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η T είναι Lipschitz συνεχής, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.