Ανάλυση Fourier
και
Ολοκλήρωμα Lebesgue

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2015

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Μέτρο Lebesgue

1.1 Ομάδα Α

1. *(α) Έστω A φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) < +\infty$.*

(β) Έστω ότι το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει τουλάχιστον ένα εσωτερικό σημείο. Δείξτε ότι $\lambda^*(A) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $A \subseteq (-\alpha, \alpha)^d$. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \leqslant \ell((-\alpha, \alpha)^d) = (2\alpha)^d < +\infty.$$

(β) Έστω x_0 εσωτερικό σημείο του A. Υπάρχει ανοικτό διάστημα $I \subset A$ ώστε $x_0 \in I$. Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου,

$$\lambda^*(A) \geqslant \lambda^*(I) = \ell(I) > 0.$$

2. *(α) Αν το A είναι μετρήσιμο και $\lambda(A \triangle B) = 0$, τότε το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda(A)$ (με $A \triangle B$ συμβολίζουμε τη συμμετρική διαφορά $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ των A και B).*

(β) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, τότε

$$\lambda(A \cup B) + \lambda(A \cap B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

(γ) Αν τα A, B είναι μετρήσιμα, $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, τότε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Δώστε παράδειγμα μετρήσιμων συνόλων A, B με $A \subseteq B$ και $\lambda(A) = \lambda(B)$, αλλά $\lambda(B \setminus A) > 0$.

Υπόδειξη. (α) Από την $\lambda(A \triangle B) = 0$ έχουμε ότι τα $A \setminus B$, $B \setminus A$ είναι μετρήσιμα και $\lambda(A \setminus B) = 0$ και $\lambda(B \setminus A) = 0$. Γράφοντας

$$B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) = [A \setminus (A \setminus B)] \cup (B \setminus A),$$

συμπεραίνουμε ότι το B είναι μετρήσιμο, και

$$\lambda(B) = [\lambda(A) - \lambda(A \setminus B)] + \lambda(B \setminus A) = \lambda(A).$$

(β) Γράφουμε

$$\lambda(A) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \setminus B) + \lambda(B) = \lambda(A \cap B) + \lambda(A \cup B),$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι τα $A \setminus B$, B είναι ξένα και $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$.

(γ) Από την $B = A \cup (B \setminus A)$ παίρνουμε $\lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A)$, διότι τα A και $B \setminus A$ είναι ξένα. Αφού $\lambda(A) = \lambda(B) < +\infty$, διαγράφοντάς τα, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε $\lambda(B \setminus A) = 0$.

(δ) Αν $A = [1, +\infty)$ και $B = [0, +\infty)$, τότε $A \subseteq B$, $\lambda(A) = \lambda(B) = +\infty$ και $B \setminus A = [0, 1)$, δηλαδή $\lambda(B \setminus A) = 1 > 0$.

3. *(α) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A)$.*

(β) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $\lambda^*(A) = \lambda^*(B)$.

Υπόδειξη. (α) Αφού $A \subseteq A \cup B$, έχουμε $\lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(A \cup B)$. Από την υπόθεση και από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα:

$$\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B) = \lambda^*(A),$$

διότι $\lambda^*(B) = 0$.

(β) Παρατηρήστε ότι $\lambda^*(A \setminus B) \leqslant \lambda^*(A \triangle B) = 0$. Συνεπώς, $\lambda^*(A \setminus B) = 0$. Όμοια, $\lambda^*(B \setminus A) = 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &\leqslant \lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(B \cup (A \setminus B)) \\ &\leqslant \lambda^*(B) + \lambda^*(A \setminus B) = \lambda^*(B). \end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A)$.

4. *(α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $t > 0$. Συμβολίζουμε με tA το σύνολο $tA = \{tx : x \in A\}$. Δείξτε ότι $\lambda^*(tA) = t\,\lambda^*(A)$.*

(β) Έστω $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά C, δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$ για κάθε $x, y \in B$. Δείξτε ότι

$$\lambda^*(f(A)) \leqslant C\lambda^*(A)$$

για κάθε $A \subseteq B$.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 0$. Δείξτε ότι το σύνολο $A' = \{x^2 \mid x \in A\}$ έχει επίσης μέτρο $\lambda(A') = 0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι αν $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα, τότε η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου $J_n = tI_n$, είναι κάλυψη του tA και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) = t \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n),$$

διότι $\ell(tI) = t\ell(I)$ για κάθε διάστημα (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda^*(tA) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : tA \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(tI_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= \inf\left\{t\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} = t\,\lambda^*(A). \end{aligned}$$

(β) Έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A \cap I_n \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $x, y \in A \cap I_n$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y| \leqslant C\,\ell(I_n).$$

Συνεπώς, $\mathrm{diam}(f(A \cap I_n)) \leqslant C\,\ell(I_n)$. Έπεται ότι το σύνολο $f(A \cap I_n)$ περιέχεται σε διάστημα J_n μήκους $\ell(J_n) \leqslant C\,\ell(I_n)$ (εξηγήστε γιατί). Η $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάλυψη του $f(A)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \lambda^*(f(A)) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n) : f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right\} \leqslant \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} C\,\ell(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\} \\ &= C\,\lambda^*(A). \end{aligned}$$

(γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Παρατηρήστε ότι $\lambda(A_n) = 0$ και ότι η $f(x) = x^2$ είναι $2n$-Lipschitz στο A_n. Από το (β) συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(f(A_n)) \leqslant 2n\lambda(A_n) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda^*(f(A)) = \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(A_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f(A_n)) = 0,$$

δηλαδή, $\lambda(f(A)) = 0$.

5. *(α) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $0 < \lambda^*(E) < +\infty$ και έστω $0 < \alpha < 1$. Δείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα*

$$\lambda^*(E \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

(β) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\delta > 0$ ώστε $\lambda(A \cap I) \geqslant \delta\, \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα. Δείξτε ότι $\lambda(A^c) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{I_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < (1+\varepsilon)\lambda^*(A)$$

(εδώ χρησιμοποιείται η υπόθεση ότι $0 < \lambda^*(E) < +\infty$, εξηγήστε γιατί). Από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap I_n).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι, για κάποιον $m \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(A \cap I_m) \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}\, \ell(I_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$ έχουμε το ζητούμενο.

Σημείωση. Το συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση που $\lambda^*(E) = \infty$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε το $E_M := E \cap [-M, M]$ να ικανοποιεί την $0 < \lambda^*(E_M) < \infty$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Άσκησης 5 (α) για το E_M, βρίσκουμε ανοιχτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda^*(E \cap I) \geqslant \lambda^*(E_M \cap I) > \alpha\, \ell(I).$$

(β) Αφού $\lambda(A \cap I) \leqslant \ell(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I, συμπεραίνουμε ότι $0 < \delta \leqslant 1$. Αν πάλι $\delta = 1$, έχουμε $\lambda(A \cap (-n, n)) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\lambda(A^c \cap (-n, n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\lambda(A^c) = 0$ (εξηγήστε τα βήματα).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $0 < \delta < 1$. Έστω ότι $\lambda(A^c) > 0$. Από το (α) υπάρχει ανοικτό διάστημα I με την ιδιότητα

$$\lambda(A^c \cap I) > (1-\delta)\, \ell(I).$$

Τότε,

$$\lambda(A \cap I) = \lambda(I) - \lambda(A^c \cap I) < \ell(I) - (1-\delta)\, \ell(I) = \delta\, \ell(I),$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

6. *Έστω* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *με*

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\} > 0.$$

Δείξτε ότι

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα $\lambda^*(A \cup B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ ισχύει πάντα, από την υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.

Για την αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda^*(A \cup B) < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $J_{n,1}, \ldots, J_{n,k_n}$ με μήκος μικρότερο από $\delta/2$, όπου $\delta = \mathrm{dist}(A,B)$, ώστε $I_n \subseteq J_{n,1} \cup \cdots \cup J_{n,k_n}$ και $\ell(I_n) < \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (αν $I_n = (a_n, b_n)$, θεωρήστε το κλειστό διάστημα $\left[a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, b_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right]$ και χωρίστε το σε k_n διαδοχικά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$). Τότε, η $\{J_{n,s} : n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant s \leqslant k_n\}$ είναι κάλυψη του $A \cup B$ από ανοικτά διαστήματα μήκους μικρότερου από $\delta/2$, και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) + \varepsilon.$$

Αν $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $A \cap J_{n,s} \neq \emptyset$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$ είναι η οικογένεια των $J_{n,s}$ για τα οποία $B \cap J_{n,s} \neq \emptyset$, τότε $A \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} U_s$, $B \subseteq \bigcup_{s=1}^{\infty} V_s$ και $U_s \cap V_m = \emptyset$ για κάθε s, m: για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $y \in U_s \cap V_m$ τότε υπάρχουν $a \in A \cap U_s$ και $b \in B \cap V_m$ ώστε $|y-a| < \ell(U_s) < \delta/2$ και $|y-b| < \ell(V_m) < \delta/2$, οπότε $\mathrm{dist}(A,B) \leqslant |a-b| \leqslant |a-y| + |y-b| < \delta$, το οποίο είναι άτοπο. Με άλλα λόγια, καθένα από τα ανοικτά διαστήματα $J_{n,s}$ ανήκει σε μία το πολύ από τις $\{U_s\}_{s=1}^{\infty}$ και $\{V_s\}_{s=1}^{\infty}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) + \lambda^*(B) &\leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \ell(U_s) + \sum_{s=1}^{\infty} \ell(V_s) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{k_n} \ell(J_{n,s}) \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις καλύψεις $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $A \cup B$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A \cup B) + \varepsilon,$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι $\lambda^*(A) + \lambda^*(B) \leqslant \lambda^*(A \cup B)$.

7. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Το A είναι μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό $F \subseteq \mathbb{R}$ με $F \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

(iii) Υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\lambda^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$.

Υπόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $\varepsilon > 0$. Το A είναι μετρήσιμο, άρα το A^c είναι μετρήσιμο. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ανοικτό σύνολο G ώστε $A^c \subseteq G$ και $\lambda^*(G \setminus A^c) = \lambda(G \setminus A^c) < \varepsilon$. Θέτουμε $F = G^c$. Τότε, το F είναι κλειστό, $F \subseteq A$, και $A \setminus F = G \setminus A^c$. Συνεπώς,

$$\lambda^*(A \setminus F) = \lambda^*(G \setminus A^c) < \varepsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Υποθέτοντας το (ii), για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_k \subseteq \mathbb{R}$ με $F_k \subseteq A$ και $\lambda^*(A \setminus F_k) < 1/k$. Ορίζουμε $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Το Γ είναι F_σ-σύνολο και $\Gamma \subseteq A$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^*(A \setminus \Gamma) \leqslant \lambda^*(A \setminus F_k) < \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda^*(A \setminus \Gamma) = 0.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i). Υποθέτουμε ότι υπάρχει F_σ-σύνολο Γ ώστε $\Gamma \subseteq A$ και $\lambda^*\big(A \setminus \Gamma\big) = 0$. Το $A \setminus \Gamma$ είναι μετρήσιμο (έχει μηδενικό εξωτερικό μέτρο). Το Γ ανήκει στην Borel σ-άλγεβρα (ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων). Άρα, το Γ είναι μετρήσιμο. Γράφοντας

$$A = \Gamma \cup (A \setminus \Gamma)$$

συμπεραίνουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

8. *Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το εσωτερικό μέτρο Lebesgue του E θέτοντας*

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : \, F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_{(i)}(E) \leqslant \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

Υπόδειξη. (α) Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\lambda(F) \leqslant \lambda^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leqslant \lambda^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\lambda(E) < \lambda(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\lambda_{(i)}(E)$ έπεται ότι $\lambda(E) < \lambda_{(i)}(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lambda^*(E) \leqslant \lambda_{(i)}(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E) = \lambda_{(i)}(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E) = \lambda(G) < \infty$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\lambda(G \setminus F) = \lambda(G) - \lambda(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι Lebesgue μετρήσιμο (με $\lambda(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0,1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < +\infty$.*

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lambda(A \cap (-\infty, x])$ είναι συνεχής.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμο σύνολο F με $F \subseteq A$ και $\lambda(F) = \lambda(A)/2$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Παρατηρήστε ότι

$$A \cap (-\infty, y] \subseteq (A \cap (-\infty, x]) \cup [x, y],$$

άρα

$$f(y) = \lambda(A \cap (-\infty, y]) \leqslant \lambda(A \cap (-\infty, x]) + \lambda([x, y]) = f(x) + (y - x).$$

Έπεται ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$$

(εξηγήστε γιατί), δηλαδή η f είναι 1-Lipschitz.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, n]) = \lambda(A)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} f(-n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A \cap (-\infty, -n]) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ακολουθία $A\cap(-\infty,n]$ αυξάνει στο A και η ακολουθία $A\cap(-\infty,-n]$ φθίνει στο κενό σύνολο (και $\lambda(A\cap(-\infty,-1])\leqslant\lambda(A)<\infty$). Αφού η f είναι συνεχής και

$$0=\lim_{n\to\infty}f(-n)<\frac{\lambda(A)}{2}<\lim_{n\to\infty}f(n)=\lambda(A),$$

υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε

$$f(x)=\lambda(A\cap(-\infty,x])=\frac{\lambda(A)}{2}.$$

Θέτοντας $F=A\cap(-\infty,x]$, παίρνουμε το ζητούμενο.

10. *(α) Έστω (A_n) ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Ορίζουμε τα σύνολα*

$$\limsup A_n=\{x\in\mathbb{R}: x\in A_n \textit{ για άπειρα } n\}$$

και

$$\liminf A_n=\{x\in\mathbb{R}:\ \textit{υπάρχει } n_0(x)\in\mathbb{N} \textit{ ώστε } x\in A_n \textit{ για κάθε } n\geqslant n_0(x)\}.$$

Δείξτε ότι

$$\limsup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k \ \textit{ και }\ \liminf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

(β) Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:

(i) Τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα.

(ii) $\lambda(\liminf A_n)\leqslant\liminf\lambda(A_n)$ και αν $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty}A_n)<+\infty$ τότε

$$\limsup\lambda(A_n)\leqslant\lambda(\limsup A_n).$$

(iii) (Λήμμα Borel-Cantelli) Αν $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)<+\infty$, τότε $\lambda(\limsup A_n)=0$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ αν και μόνο αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $x\in\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $k\geqslant n$ ώστε $x\in A_k$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x\in A_k$ για άπειρες τιμές του k.

Ανάλογα, παρατηρήστε ότι $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$ αν και μόνο υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $x\in\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k\geqslant n$ να ισχύει $x\in A_k$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_k.

(β) (i) Αφού κάθε A_n είναι μετρήσιμο σύνολο, από τις

$$\limsup A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k \ \text{ και }\ \liminf A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$$

είναι φανερό ότι τα $\limsup A_n$ και $\liminf A_n$ είναι μετρήσιμα σύνολα (χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αριθμήσιμες τομές και αριθμήσιμες ενώσεις μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα).

(ii) Θέτουμε $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (B_n) είναι αύξουσα και $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \liminf A_n$. Άρα,

$$\lambda(\liminf A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(B_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $B_n \subseteq A_n$ άρα $\lambda(B_n) \leqslant \lambda(A_n)$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(B_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \lambda(A_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\lambda(\liminf A_n) \leqslant \liminf \lambda(A_n)$.

Όμοια, θέτουμε $C_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Η ακολουθία (C_n) είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \limsup A_n$. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda(C_1) < +\infty$, άρα,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Από την άλλη πλευρά, $A_n \subseteq C_n$ άρα $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(C_n)$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $\limsup \lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup A_n)$.

(iii) Με τον συμβολισμό του (ii), για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lambda(\limsup A_n) \leqslant \lambda(C_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k) < +\infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(A_k) = 0.$$

Έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$.

11. *Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:*

- *(i) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda^*(A) = 0$, τότε το A είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο σύνολο.*
- *(ii) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και το A δεν είναι μετρήσιμο, τότε $\lambda^*(A) > 0$.*
- *(iii) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda^*(A) < +\infty$, $B \subseteq A$, το B είναι μετρήσιμο και $\lambda(B) = \lambda^*(A)$, τότε το A είναι μετρήσιμο.*

(iv) *Έστω $A \subseteq [a,b]$. Τότε, $\lambda^*(A) = 0$ αν και μόνο αν υπάρχει κάλυψη του A από μια ακολουθία ανοικτών διαστημάτων (I_n) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα το πλήθος από τα διαστήματα I_n.*

(v) *Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ τότε $\lambda(A) = 0$ αν και μόνο αν όλα τα υποσύνολα του A είναι μετρήσιμα.*

Υπόδειξη. (i) Ψευδής: το σύνολο του Cantor έχει μηδενικό μέτρο αλλά είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(ii) Αληθής: κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) = 0$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Αληθής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ανοικτό σύνολο G_n ώστε $A \subseteq G_n$ και $\lambda(G_n) < \frac{1}{n} + \lambda^*(A)$. Ορίζουμε $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, οπότε $B \subseteq A \subseteq G$ και

$$\lambda(G \setminus B) = \lambda(G) - \lambda(B) < \frac{1}{n},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι το $N = G \setminus B$ είναι σύνολο μηδενικού μέτρου. Τότε, γράφοντας $A = B \cup (A \cap N)$ βλέπουμε ότι το A είναι μετρήσιμο.

(iv) Αληθής: αν $\lambda^*(A) = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη του A από ανοικτά διαστήματα (J_n^{ε}) ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_n^{\varepsilon}) < \varepsilon$. Θέτουμε $I_{n,m} := J_n^{1/2^m}$. Τότε, η οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $I_{n,m}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

Αντίστροφα, έστω (I_n) κάλυψη του A από ανοικτά διαστημάτων με $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < +\infty$ και έστω $\varepsilon > 0$ Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$. Αφού κάθε $x \in A$ ανήκει σε άπειρα (I_n), έπεται ότι $A \subseteq \bigcup_{n=n_0}^{\infty} I_n$. Τότε,

$$\lambda^*(A) \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε $\lambda^*(A) = 0$.

(v) Αληθής: αν $\lambda(A) = 0$, τότε προφανώς όλα τα υποσύνολά του είναι μετρήσιμα, και αν $\lambda(A) > 0$, τότε έχουμε δείξει ότι το A περιέχει μη μετρήσιμο σύνολο.

12. *(α) Έστω $A \subseteq [a,b]$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

(β) (Λήμμα του Steinhaus) Έστω A μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι το «σύνολο διαφορών»

$$A - A := \{x - y : x \in A, y \in A\}$$

του A περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$.

(γ) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. (α) Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε $A - A = \{x - y : x, y \in A\} \subseteq \mathbb{Q}$. Αφού $\lambda(A) > 0$ το A είναι μη κενό. Σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και από την

$$A - x_0 \subseteq A - A \subseteq \mathbb{Q}$$

συμπεραίνουμε ότι το $A - x_0$, άρα και το A, είναι αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, $\lambda(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $\lambda(A) > 0$.

(β) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \lambda(A) < \infty$ (αν $\lambda(A) = \infty$, θεωρούμε $B \subseteq A$ με $0 < \lambda(B) < \infty$, δείχνουμε ότι το $B - B$ περιέχει διάστημα της μορφής $(-t, t)$ για κάποιο $t > 0$, και τότε, $A - A \supseteq B - B \supseteq (-t, t)$).

Έστω λοιπόν A μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(A) < \infty$. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο $G \supseteq A$ ώστε $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$. Μπορούμε να γράψουμε το G σαν αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων. Θέτουμε $A_k = A \cap I_k$. Τότε,

$$\lambda(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \quad \text{και} \quad \lambda(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A_k).$$

Από την $\lambda(G) < (1 + \varepsilon)\lambda(A)$ έπεται ότι: υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant (1 + \varepsilon)\lambda(A \cap I_k).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = 1/3$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει διάστημα I ώστε

$$\lambda(A \cap I) \geqslant \frac{3\ell(I)}{4}.$$

Θέτουμε $t = \frac{\ell(I)}{2}$. Θα δείξουμε ότι

$$(A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t).$$

Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $s \in (-t, t)$ ώστε τα σύνολα $A \cap I$ και $(A \cap I) + s$ να είναι ξένα. Ταυτόχρονα, περιέχονται στο $I \cup (I + s)$, το οποίο είναι διάστημα μήκους $\ell(I) + |s|$. Έπεται ότι

$$2\lambda(A \cap I) = \lambda(A \cap I) + \lambda((A \cap I) + s) \leqslant \ell(I) + s < \frac{3\ell(I)}{2},$$

δηλαδή $\lambda(A \cap I) < \frac{3\ell(I)}{4}$, το οποίο είναι άτοπο. Έπεται ότι $A - A \supseteq (A \cap I) - (A \cap I) \supseteq (-t, t)$.

(γ) Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m + 1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0,1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \emptyset$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1)) \geqslant \lambda\left(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m).$$

Όμως, $\lambda(F_m) = \lambda(E_m)$ για κάθε m. Συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(E_m) = \lambda(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{x \in \mathbb{R} : \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in (x-\delta, x+\delta),\ |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Έστω $x \in A$ και έστω $m \in \mathbb{N}$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$ ισχύει $|f(y) - f(x)| < \frac{1}{2m}$. Τότε, για κάθε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ έχουμε

$$|f(y) - f(z)| \leqslant |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m},$$

άρα $x \in A_m$. Αφού το m ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $A \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ μπορούμε να δείξουμε ότι $x \in A$: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $m \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{m} < \varepsilon$, και αφού $x \in A_m$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Ειδικότερα, για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$, θέτοντας $z = x$, παίρνουμε

$$|f(y) - f(x)| < \frac{1}{m} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x, δηλαδή $x \in A$. Έτσι, $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m \subseteq A$.

Επίσης, κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έστω $x \in A_m$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Θα δείξουμε ότι $(x-\delta, x+\delta) \subseteq A_m$, δηλαδή το x είναι εσωτερικό σημείο του A_m. Έστω $u \in (x-\delta, x+\delta)$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε $(u-\delta_1, u+\delta_1) \subseteq (x-\delta, x+\delta)$. Τότε, αν $y, z \in (u-\delta_1, u+\delta_1)$ έχουμε $y, z \in (x-\delta, x+\delta)$, άρα $|f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}$. Συνεπώς, $u \in A_m$.

Αφού κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο και $A = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} A_m$, έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

14. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = +\infty$ αν και μόνο αν για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant k$ να ισχύει $f_n(x) > s$. Συνεπώς,

$$B = \bigcap_{s=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > s\}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς, κάθε σύνολο της μορφής $\{x : f_n(x) > s\}$ (όπου $s, n \in \mathbb{N}$) είναι ανοικτό. Άρα, το B είναι σύνολο Borel.

15. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.*

Υπόδειξη. Έστω $\mathcal{B}$ η Borel σ-άλγεβρα. Ορίζουμε $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\}$.

(i) Έχουμε $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \in \mathcal{B}$, άρα $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$ και, αφού η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(A^c) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Συνεπώς, $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}$$

διότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(iv) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό, τότε το $f^{-1}(A)$ είναι ανοικτό διότι η f είναι συνεχής, άρα $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$. Δηλαδή, η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, άρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}$ το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel.

16. *Για κάθε $x \in [0,1)$ συμβολίζουμε με $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ την δεκαδική παράσταση του x (αν το x έχει δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις θεωρούμε εκείνη που τελειώνει σε άπειρα μηδενικά). Βρείτε το εξωτερικό μέτρο καθενός από τα σύνολα:*

(i) $A_1 = \{x \in [0,1) : x_1 \neq 5\}$.

(ii) $A_2 = \{x \in [0,1) : x_1 \neq 5 \ \text{ και } \ x_2 \neq 5\}$.

(iii) $A_3 = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \ldots, \ x_n \neq 5\}$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{6}{10}, 1\right).$$

Συνεπώς, $\lambda(A_1) = \frac{9}{10}$.

(β) Για τον ορισμό του A_1 χωρίσαμε το $[0,1)$ σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα $[0, 1/10), [1/10, 2/10), \ldots, [9/10, 1)$ και αφαιρέσαμε το $[5/10, 6/10)$ το οποίο είναι το σύνολο των $x \in [0,1)$ για τα οποία $x_1 = 5$. Για να ορίσουμε το A_2 χωρίζουμε καθένα από τα υπόλοιπα διαστήματα $[k/10, (k+1)/10)$, $k \neq 5$, σε δέκα ίσα και διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/10^2$ και αφαιρούμε το ένα από αυτά (το έκτο κάθε φορά είναι το σύνολο των σημείων του υποδιαστήματος για τα οποία $x_2 = 5$). Αυτό σημαίνει ότι το A_2 αποτελείται από 81 ξένα ημιανοικτά διαστήματα μήκους $1/100$. Συνεπώς,

$$\lambda(A_2) = \frac{81}{100} = \left(\frac{9}{10}\right)^2.$$

(γ) Συνεχίζοντας αυτόν τον συλλογισμό, βλέπουμε ότι το σύνολο

$$A_n = \{x \in [0,1) \mid x_1 \neq 5, \ldots, x_n \neq 5\}$$

έχει μέτρο

$$\lambda(A_n) = \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Συνεπώς, για το σύνολο $A = \{x \in [0,1) : \text{για κάθε } \ n = 1, 2, \ldots, \ x_n \neq 5\}$ έχουμε $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ και, αφού η $\{A_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συνόλων, παίρνουμε

$$\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 0.$$

17. *Έστω $\theta \in (0,1)$. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοικτό διάστημα μήκους $\theta/3^n$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα.*

Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ «τύπου Cantor». Δείξτε ότι:

(α) Το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα.

(β) Το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Το C_θ είναι μετρήσιμο και $\lambda(C_\theta) = 1-\theta > 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1 - \frac{\theta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\theta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\theta}{3^2} = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1,2,\dots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητεσ:

(i) $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

(ii) Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

(iii) $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\theta}{3} - 2\frac{\theta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\theta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$C_\theta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(C_\theta) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \theta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1-\theta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1 - \theta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην περίπτωση του κλασικού συνόλου του Cantor, μπορούμε να δείξουμε ότι το C_θ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

18. *Έστω* $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *μια αρίθμηση του* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *ορίζουμε*

$$A(\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$ *δείξτε ότι το* $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ *είναι μη κενό.*

(γ) Δείξτε ότι $A \subseteq [0,1]$ *και* $\lambda(A) = 0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq A$ *και ότι το* A *είναι υπεραριθμήσιμο.*

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1] \subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1 \leqslant \lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon)) \leqslant 2\varepsilon < 1$.

(γ) Αφού $0 \leqslant q_n \leqslant 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε $A \subseteq A(1/j) \subseteq [-1/j, 1+1/j]$. Άρα,

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} [-1/j, 1+1/j] = [0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A) \leqslant \lambda(A(1/j)) \leqslant 2/j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A) = 0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A(1/j)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} A(1/j) = A$.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, το $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = A \cup ([0,1] \setminus A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

19. *(α) Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

(β) Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geqslant c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $\lambda(\limsup A_n) > 0$ και ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset.$$

Υπόδειξη. (α) Αφού $\limsup\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1 - \alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

(β) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n \supseteq A_k$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\right) \geqslant \lambda(A_k) \geqslant c.$$

Αν θέσουμε $E_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, τότε $E_k \searrow \limsup A_n$ και $\lambda(E_1) \leqslant \lambda(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda(\limsup A_n) = \lim_{k\to\infty} \lambda(E_k) \geqslant c > 0.$$

Αφού $\lambda(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

20. *Για κάθε $A \in \mathcal{M}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\rho(A,x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(A\cap(x-t,x+t))}{2t},$$

αν αυτό το όριο υπάρχει. Ο $\rho(A,x)$ είναι η μετρική πυκνότητα του A στο σημείο x.

(α) Δείξτε ότι $\rho(\mathbb{Q},x) = 0$ και $\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $0 < \alpha < 1$. Κατασκευάστε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\rho(A,0) = \alpha$.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\lambda(\mathbb{Q}\cap(x-t,x+t)) = 0 \;\text{ και }\; \lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-t,x+t)) = 2t.$$

[Παρατηρήστε ότι τα δύο σύνολα είναι ξένα, έχουν ένωση το $(x-t,x+t)$, και το πρώτο είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$.] Έπεται ότι

$$\rho(\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda(\mathbb{Q}\cap(x-t,x+t))}{2t} = 0$$

και

$$\rho(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\lambda((\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\cap(x-t,x+t))}{2t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{2t}{2t} = 1.$$

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$C_n = \left(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε μετρήσιμο $A_n \subset C_n$ ώστε $\lambda(A_n) = \alpha\lambda(C_n)$ (το C_n είναι απλό σύνολο και η επιλογή του A_n δεν παρουσιάζει δυσκολίες – θυμηθείτε όμως και την Άσκηση 9(β)). Ορίζουμε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\frac{1}{n+1} \leqslant t < \frac{1}{n}$, τότε

$$\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} \leqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/n,1/n))}{2/(n+1)} = \frac{2\alpha/n}{2/(n+1)} = \alpha\frac{n+1}{n} \leqslant \alpha(1+2t),$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t} &\geqslant \frac{\lambda(A\cap(-1/(n+1),1/(n+1)))}{2/n} = \frac{2\alpha/(n+1)}{2/n}\\ &= \alpha\frac{n}{n+1} \geqslant \alpha(1-2t).\end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\lambda(A\cap(-t,t))}{2t}=\alpha,$$
δηλαδή $\rho(A,0)=\alpha$.

1.2 Ομάδα Β

21. *Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $E\subset F$ και $\lambda(E)<\lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha\in\big(\lambda(E),\lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E\subset K\subset F$ και $\lambda(K)=\alpha$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(W)>0$, τότε, για κάθε $0<\beta<\lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V\subset W$ ώστε $\lambda(V)=\beta$.

Πράγματι, αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a,b]\subset\mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q\subset\mathbb{R}^{d-1}$ ώστε $W\subseteq Q_1:=[a,b]\times Q$. Ορίζουμε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με
$$f(t)=\lambda(W\cap\{x=(x_1,\dots,x_k)\in Q_1:\,a\leqslant x_1\leqslant t\}).$$
Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι
$$|f(t)-f(s)|\leqslant\lambda_{d-1}(Q)\,|t-s|.$$
Αφού $f(a)=0$ και $f(b)=\lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής. □

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $E\subset F$ και $\lambda(E)<\lambda(F)$. Έστω $\alpha\in\big(\lambda(E),\lambda(F)\big)$. Αφού $\alpha-\lambda(E)<\lambda(F\setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W\subseteq F\setminus E$ με $\lambda(W)>\alpha-\lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V\subset W$ ώστε $\lambda(V)=\alpha-\lambda(E)$. Αν θέσουμε $K=E\cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E\subset K\subset F$ και $\lambda(K)=\alpha$.

22. *Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E\subseteq[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J\subseteq[0,1]$,*
$$\lambda(J\cap E)>0\quad\text{και}\quad\lambda(J\setminus E)>0.$$

Υπόδειξη. Ελέγξτε πρώτα ότι αν I είναι ένα διάστημα μήκους α, και αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor αφαιρώντας στο n-οστό βήμα ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\alpha\delta/3^n$ (όπου $0<\delta<1$), τότε το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\alpha(1-\delta)$.

Παίρνουμε $0 < \delta_1 < 1$ και κατασκευάζουμε σύνολο D^1 στο $[0,1]$ με τον παραπάνω τρόπο. Το D^1 δεν περιέχει διαστήματα και $\lambda(D^1) = 1 - \delta_1$.

Το $B_1 = [0,1] \setminus D^1$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_1 = \cup_j R_j^1$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^1}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_2 < 1$ (το ίδιο για κάθε j). Προκύπτει σύνολο D_j^2 που δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_j^2) = (1-\delta_2)\lambda(R_j^1)$. Ορίζουμε

$$D^2 = D^1 \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} D_j^2\right).$$

Τότε,

$$\lambda(D^2) = (1-\delta_1) + (1-\delta_2)\delta_1 = 1 - \delta_1\delta_2.$$

Το $B_2 = [0,1] \setminus D_2$ είναι πάλι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_2 = \cup_j R_j^2$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^2}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_3 < 1$ (το ίδιο για κάθε j).

Επαγωγικά, ορίζουμε μια ακολουθία $\{D^n\}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητεσ:

(i) $D^{n+1} \subset B^n = [0,1] \setminus D^n$.

(ii) $\lambda(D^n) = 1 - \delta_1\delta_2 \cdots \delta_n$.

(iii) Το $D^n \setminus D^{n-1}$ είναι ένωση αριθμήσιμων το πλήθος μη επικαλυπτόμενων κλειστών συνόλων D_j^n, καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαστήματα.

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε συγκεκριμμένα $\delta_j = \frac{2^j+1}{2^j+2}$ ώστε

$$\delta_1\delta_2 \cdots \delta_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} D^n$. Τότε, $\lambda(E) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(D^n) = \lim\limits_{n\to\infty}(1 - \delta_1 \cdots \delta_n) = \frac{1}{2}$. Το E είναι μετρήσιμο, αφού κάθε D^n είναι σύνολο Borel.

Έστω $J = [a,b]$ υποδιάστημα του $[0,1]$. Ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει υποδιάστημα R_j^n κάποιου B_n ώστε $R_j^n \subseteq J$.

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι δεν υπάρχει $R_j^1 \subset B_1$ με $R_j^1 \subseteq J$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει j ώστε $R_j^1 \cap J \neq \emptyset$ (αλλιώς θα είχαμε $J \subseteq D^1$, άτοπο). Αφού το $R_j^1 = (a_j, b_j)$ είναι ανοικτό, το $R_j^1 \cap J$ είναι διάστημα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεισ:

(α) $a_j < a < b_j < b$: υπάρχει $R_t^1 = (a_t, b_t)$ με $b_j < a_t \leqslant b$ (αλλιώς, $[b_j, b] \subseteq D^1$ το οποίο είναι άτοπο). Τότε όμως, υπάρχει $R_s^1 = (a_s, b_s) \subseteq [b_j, a_t)$ λόγω της κατασκευής του D^1. Άρα, υπάρχει $R_s^1 \subseteq J$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) $a < a_j < b < b_j$: καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο.

(γ) $J = [a,b] \subset R_j^1 = (a_j, b_j)$: στο $\overline{R_j^1}$ κατασκευάστηκε το D_j^2. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό, βλέπουμε ότι είτε υπάρχει j ώστε $R_j^2 \subseteq J$ ή υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^2$.

Συνεχίζοντας έτσι, βλέπουμε ότι είτε υπάρχουν n και j ώστε $R_j^n \subseteq J$ ή για κάθε n υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^n$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε θα είχαμε

$$\lambda(J) \leqslant \inf_n \lambda(R_j^n) = 0$$

(παρατηρήστε ότι $\lambda(R_j^n) \leqslant \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{3^n}$). $\square$

Υπάρχει λοιπόν κάποιο R_j^n, ανοικτό υποδιάστημα κάποιου D^n, ώστε $R_j^n \subseteq J$. Όμως τότε, στο $\overline{R_j^n}$ κατασκευάστηκε το D_j^{n+1}, το οποίο έχει μέτρο $\lambda(R_j^{n+1}) = \lambda(R_j^n)(1-\delta_{n+1})$, μέσα σε αυτό αριθμήσιμα το πλήθος D_j^{n+2} με συνολικό μέτρο $\lambda(R_j^n)\delta_{n+1}(1-\delta_n)$ κλπ. Δηλαδή, το συνολικό μέτρο των D_j^m, $m > n$ που κατασκευάστηκαν μέσα στο R_j^n είναι ίσο με

$$\lambda(R_j^n)(1 - \delta_{n+1}\delta_{n+2}\cdots) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right).$$

Έπεται ότι

$$\lambda(E \cap R_j^n) = \lambda(R_j^n)\left(1 - \frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(R_j^n \setminus E) = \lambda(R_j^n)\frac{1}{2\delta_1 \cdots \delta_n} > 0.$$

Αφού $R_j^n \subseteq J$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(E \cap J) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J \setminus E) > 0.$$

23. *Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $x, s \in \mathbb{R}$ ώστε*

$$x, x+s, x+2s, \ldots, x+(k-1)s \in E.$$

Υπόδειξη. Αφού $\lambda(E) > 0$, χρησιμοποιώντας την Άσκηση 5 βλέπουμε ότι υπάρχει διάστημα $[a,b]$ ώστε

$$\lambda(E \cap [a,b]) > \frac{k-1}{k}(b-a).$$

Θέτουμε $A = E \cap [a,b]$. Χωρίζουμε το $[a,b)$ σε k διαδοχικά ημιανοικτά διαστήματα μήκους $s := \frac{b-a}{k}$:

$$I_1 = [a, a+s), \;\; I_2 = [a+s, a+2s), \;\; \ldots \;\; , \;\; I_k = [a+(k-1)s, b),$$

και για κάθε $j = 1, \ldots, k$ ορίζουμε $A_j = A \cap I_j$. Κατόπιν, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ θέτουμε $B_j = A_j - (j-1)s$. Παρατηρήστε ότι $B_j \subseteq I_1 = [a, a+s)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$ και $B_1 = A_1$. Θα δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \bigcap_{j=1}^{k} B_j \neq \emptyset.$$

Τότε, αν πάρουμε κάποιο $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ θα έχουμε ότι $x \in B_j = A_j - (j-1)s$ δηλαδή $x + (j-1)s \in A_j$ για κάθε $j = 1, \ldots, k$. Αφού $A_j \subseteq A \subseteq E$ για κάθε j, έπεται ότι

$$x, x+s, x+2s, \ldots, x+(k-1)s \in E.$$

Για την απόδειξη της $(*)$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda\left(I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j\right) &= \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} (I_1 \setminus B_j)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_1 \setminus B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda((I_1 + (j-1)s) \setminus (B_j + (j-1)s)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \setminus (A \cap I_j)) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \cap A^c) = \lambda([a,b] \setminus A) \\
&< \frac{1}{k}(b-a) = \lambda(I_1).
\end{aligned}$$

Άρα, το $I_1 \setminus \bigcap_{j=1}^{k} B_j$ είναι γνήσιο υποσύνολο του I_1, και έπεται η $(*)$.

24. *Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$ και $\lambda(B) > 0$. Δείξτε ότι το $A + B$ περιέχει διάστημα.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A και B έχουν πεπερασμένο και θετικό μέτρο. Μπορούμε να βρούμε αριθμήσιμη ένωση $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ διαστημάτων, που οι κορυφές τους έχουν ρητές συντεταγμένες, ώστε $A \subseteq G$ και

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A) \leqslant \frac{4}{3}\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(A \cap I_k).$$

Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\ell(I_k) \leqslant \frac{4}{3}\lambda(A \cap I_k).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα και στο B, καταλήγουμε στο εξής: υπάρχουν διαστήματα I_0 και J_0 με ρητά άκρα, ώστε

$$(*) \qquad \lambda(A \cap I_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_0) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_0) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_0).$$

Αφού τα μήκη των I_0 και J_0 είναι ρητοί αριθμοί, μπορούμε να βρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε τα I_0 και J_0 να χωρίζονται σε m και n διαδοχικά διαστήματα αντίστοιχα, που όλα έχουν το ίδιο μήκος. Χρησιμοποιώντας και την $(*)$ βλέπουμε τώρα ότι υπάρχουν διαστήματα I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος, ώστε

$$\lambda(A \cap I_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(B \cap J_1) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει διάστημα I με κέντρο το 0 και υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda((A - x) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I) \quad \text{και} \quad \lambda((B - y) \cap I) \geqslant \frac{3}{4}\lambda(I).$$

Έπεται ότι

$$\lambda((A - x) \cap (B - y) \cap I) \geqslant \frac{1}{2}\lambda(I) > 0.$$

Θέτουμε $C = (A-x)\cap(B-y)$. Από το Λήμμα του Steinhaus, το $C - C$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0. Αφού

$$A - B - (x + y) = (A - x) - (B - y) \supseteq C - C,$$

συμπεραίνουμε ότι το $A-B$ περιέχει διάστημα. Αντικαθιστώντας το B με το $-B$ παίρνουμε το ζητούμενο.

25. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x, y \in E$ ισχύει $\frac{1}{2}(x + y) \in E$. Δείξτε ότι το E έχει μη κενό εσωτερικό.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το $\frac{E}{2} = \left\{\frac{x}{2} : x \in E\right\}$. Αφού το E έχει θετικό μέτρο, το $\frac{E}{2}$ είναι μετρήσιμο και έχει θετικό μέτρο:

$$\lambda\left(\frac{E}{2}\right) = \frac{\lambda(E)}{2} > 0.$$

Από την Άσκηση 24, το σύνολο $\frac{E}{2} + \frac{E}{2}$ περιέχει κάποιο διάστημα.

Όμως, από την υπόθεση έπεται άμεσα ότι $\frac{E}{2} + \frac{E}{2} \subseteq E$. Άρα, το E περιέχει διάστημα. Ειδικότερα, έχει μη κενό εσωτερικό.

26. *Δείξτε ότι το σύνολο των $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $\sin(2^n x) \to a$ τότε $a = 0$. Πράγματι, αν $\sin(2^n x) \to a \neq 0$ τότε, για μεγάλα n, έχουμε $\sin(2^n x) \neq 0$, άρα

$$\cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2\sin(2^n x)} \to \frac{1}{2}.$$

Όμως, τότε
$$\sin^2(2^n x) = \frac{1-\cos(2^{n+1}x)}{2} \to \frac{1}{4},$$
άρα
$$1 = \cos^2(2^n x) + \sin^2(2^n x) \to \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$
το οποίο είναι άτοπο. Άρα, το σύνολο A των $x \in [0, 2\pi)$ για τα οποία η ακολουθία $\{\sin(2^n x)\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει είναι το
$$A = \{x \in [0, 2\pi) : \sin(2^n x) \to 0\}.$$
Το A είναι μετρήσιμο: θέτουμε $f_k(x) = \sin(2^k x)$, και $A_{k,m} = \left\{x \in [0, 2\pi) : |f_k(x)| < \frac{1}{m}\right\}$. Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ η f_k είναι συνεχής, άρα το $A_{k,m}$ είναι ανοικτό στο $[0, 2\pi)$, και μπορούμε να δούμε ότι
$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_{k,m}.$$
Άρα, το A είναι μετρήσιμο.

Υποθέτουμε ότι $\lambda(A) > 0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Παρατηρούμε ότι αν $x, y \in A$ τότε
$$\sin\left(2^n \frac{x+y}{2}\right) = \sin(2^{n-1}x)\cos(2^{n-1}y) + \cos(2^{n-1}x)\sin(2^{n-1}y) \to 0,$$
συνεπώς $\frac{x+y}{2} \in A$. Από την Άσκηση 25, το A, άρα και το $\frac{1}{2\pi}A \subseteq [0, 1]$, έχουν μη κενό εσωτερικό.

Έπεται ότι το $\frac{1}{2\pi}A$ περιέχει έναν τριαδικό ρητό, της μορφής $\frac{k}{3^m}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ με $0 < k < 3^m$, και ο k δεν είναι πολλαπλάσιο του 3. Τότε, $\sin\left(\frac{2^{n+1}}{3^m}k\pi\right) \to 0$, άρα και η $\sin\left(\frac{2^n}{3}k\pi\right) \to 0$. Ειδικότερα, $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right) \to 0$. Παρατηρούμε ότι $3 \mid 4^n - 1$, άρα $6 \mid 2^{2n+1} - 2$. Επομένως, ο $\frac{2^{2n+1}-2}{3}$ είναι άρτιος, άρα $\sin\left(\frac{2^{2n+1}}{3}k\pi\right) = \sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$. Επομένως, η $\sin\left(\frac{2k}{3}\pi\right)$ (η οποία είναι σταθερή) συγκλίνει στο 0. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού ο $\frac{2k}{3}\pi$ δεν είναι ακεραιο πολλαπλάσιο του π.

27. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(A) > 0$. Δείξτε ότι*
$$\lambda\big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big) = 0.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Άσκηση 24. Αν είχαμε $\lambda\big(\mathbb{R} \setminus (A+\mathbb{Q})\big) > 0$ τότε το σύνολο $A - \big(\mathbb{R} \setminus (A + \mathbb{Q})\big)$ θα περιείχε κάποιο διάστημα I. Παρατηρούμε όμως ότι αν $x \in A - \big(\mathbb{R} \setminus (A+\mathbb{Q})\big)$ τότε $x \notin \mathbb{Q}$ (αλλιώς θα είχαμε $-x \in \mathbb{Q}$ και $x = a - y$, όπου $a \in A$ και $y \notin A + \mathbb{Q}$, το οποίο θα οδηγούσε στην $a - x = y \notin A + \mathbb{Q}$ το οποίο είναι άτοπο).

Αφού το διάστημα I περιέχει ρητούς, οδηγούμαστε σε άτοπο.

Απευθείας απόδειξη. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει πεπερασμένο $J_n \subseteq \mathbb{Q}$ ώστε

$$(*) \qquad \lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_{t \in J_n} (A+t)\right) < \frac{2}{n}.$$

Αν θέσουμε $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ τότε προκύπτει άμεσα ότι

$$\lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_{t \in J} (A+t)\right) = 0.$$

Τέλος, αν ορίσουμε $I = \bigcup_{r \in \mathbb{Z}} (J+r)$ και γράψουμε το I στη μορφή $\{t_s : s \in \mathbb{N}\}$ (παρατηρήστε ότι το I είναι αριθμήσιμο) μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$\lambda\Big(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s=1}^{\infty} (A+t_s)\Big) \leqslant \sum_{r \in \mathbb{Z}} \lambda\left([r,r+1] \setminus \bigcup_{t \in J+r} (A+t)\right) = 0$$

και αφού $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{Z}} (J+r) \subseteq \mathbb{Q}$ έπεται το ζητούμενο.

Για την απόδειξη της $(*)$ παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε $k \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο και $I = \left[y - \frac{1}{k}, y + \frac{1}{k}\right]$ για κατάλληλο $y \in \mathbb{Q}$, έχουμε

$$\lambda(A \cap I) \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{2}{k},$$

άρα

$$\lambda(I \setminus A) \leqslant \frac{1}{n}\frac{2}{k}.$$

Τώρα, $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{k-1} \left[\frac{j}{k} - \frac{1}{k}, \frac{j}{k} + \frac{1}{k}\right]$. Άρα,

$$[0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} (A + \frac{j}{k} - y) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k-1} \left((I \setminus A) + \frac{j}{k}\right).$$

Θέτοντας $J_n = \{\frac{j}{k} - y : j = 1, \ldots, k-1\}$ παίρνουμε

$$\lambda\left([0,1] \setminus \bigcup_{t \in J_n} (A+t)\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k-1} \lambda\left((I \setminus A) + \frac{j}{k}\right) = (k-1)\lambda(I \setminus A) < \frac{2(k-1)}{k}\frac{1}{n} < \frac{2}{n}.$$

28. *Δείξτε ότι υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = 0$ και $\lambda(A+B) > 0$. Μπορεί το $A+B$ να περιέχει διάστημα;*

Υπόδειξη. Μπορούμε να δείξουμε ότι $C + C/2 \supseteq [0,1]$, όπου C είναι το σύνολο του Cantor και $C/2 = \{x/2 : x \in C\}$. Πράγματι, έστω $x \in [0,1]$. Θεωρούμε το τριαδικό ανάπτυγμα

$x = 0.x_1x_2\ldots x_n\ldots$ του x. Για κάθε n έχουμε $x_n \in \{0,1,2\}$. Ορίζουμε $y_n = x_n$ αν $x_n \in \{0,2\}$ και $y_n = 0$ αν $x_n = 1$. Επίσης, ορίζουμε $z_n = x_n - y_n$ για κάθε n, δηλαδή $z_n = 0$ αν $x_n \in \{0,2\}$ και $z_n = 1$ αν $x_n = 1$. Παρατηρήστε ότι $y \in C$: κάθε $y_n = 0$ ή 2. Επίσης, αν θέσουμε $u = 2y = 0.(2y_1)(2y_2)\ldots(2y_n)\ldots$, τότε $u \in C$: κάθε $u_n = 0$ ή 2. Άρα,

$$x = y + z = y + \frac{u}{2} \in C + \frac{C}{2}.$$

Τέλος, $\lambda(C) = \lambda(C/2) = 0$. Θέτοντας $A = C$ και $B = C/2$ έχουμε το ζητούμενο.

29. *Δώστε παράδειγμα ανοικτού υποσυνόλου G του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: το σύνορο του $\overline{G}$ έχει θετικό μέτρο Lebesgue.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε ένα σύνολο D τύπου Cantor το οποίο έχει θετικό μέτρο (για παράδειγμα, το σύνολο C_θ της Άσκησης 17. Ένα ανοικτό υποσύνολο G του $[0,1]$ με την ιδιότητα $\lambda(\partial(\overline{G})) > 0$ είναι η ένωση των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν στα «περιττά» βήματα της κατασκευής (το πρώτο, το τρίτο, κλπ). Για να το δούμε αυτό, ονομάζουμε U την ένωση των ανοικτών διαστημάτων που αφαιρέθηκαν στα «άρτια» βήματα της κατασκευής. Έχουμε $[0,1] = G \cup (D \cup U)$, και τα τρία αυτά σύνολα είναι ξένα. Τώρα, αποδείξτε τα εξής:

(i) $\overline{G} = G \cup D$. Το $G \cup D$ είναι κλειστό, διότι το $[0,1] \setminus (G \cup D) = U$ είναι ανοικτό σύνολο. Επίσης, $G \subseteq G \cup D$, αρκεί λοιπόν να δείξετε ότι κάθε $x \in D$ είναι σημείο συσσώρευσης του G (αυτό είναι απλό: μιμηθείτε την απόδειξη του ότι κάθε $x \in D$ είναι σημείο συσσώρευσης του D).

(ii) $\partial(G \cup D) = D$.

Έπεται ότι $\lambda(\partial(\overline{G})) = \lambda(D) > 0$.

30. *Γνωρίζουμε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων. Δείξτε ότι ο δίσκος $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ δεν μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση ανοικτών ορθογωνίων.*

Υπόδειξη. Έστω ότι ο δίσκος μπορεί να γραφτεί ως ένωση ανοικτών και ξένων ορθογωνίων. Τότε, το $(0,0)$ ανήκει σε ένα από αυτά, έστω R. Στρέφοντας το σύστημα συντεταγμένων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $R = (a,b) \times (c,d)$. Τότε $a < 0 < b$ και $c < 0 < d$. Επίσης, αν $d > 1$, τότε το $\left(0, \frac{d+1}{2}\right)$ ανήκει στο R, άρα και στον δίσκο, το οποίο είναι άτοπο, άρα $d \leqslant 1$. Επίσης, $a > -1$: όπως και για το d, αρχικά έχουμε ότι $a \geqslant -1$. Επιπλέον, αν $a = -1$, τότε $\frac{-1}{2} < \frac{-\sqrt{1-d^2/4}}{2} < \frac{1}{2}$, άρα $a = -1 < \frac{-1-\sqrt{1-d^2/4}}{2} < 0 < b$, επομένως το σημείο $\left(\frac{-1-\sqrt{1-d^2/4}}{2}, \frac{d}{2}\right)$ ανήκει στο R, άρα και στον δίσκο, και με πράξεις βλέπουμε ότι αυτό είναι άτοπο.

Θεωρούμε τώρα το σημείο $(a, 0)$, το οποίο από τα παραπάνω ανήκει στον δίσκο. Τότε, υπάρχει ορθογώνιο S, ξένο προς το R, με $(a, 0) \in S$. Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(a, 0) \in B((a, 0), \varepsilon) \subseteq S$, αλλά οποιαδήποτε μπάλα με κέντρο το $(a, 0)$ τέμνει το R.

31. *Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $B = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$ και $C = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, \infty)$. Παρατηρήστε ότι το B είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση μονοσυνόλων και το C είναι G_δ-σύνολο διότι γράφεται στη μορφή $C = \bigcap_{\mathbb{Q} \cap (0,\infty)} ((0, \infty) \setminus \{q\})$. Ειδικότερα, τα B και C είναι Borel σύνολα. Ορίζουμε

$$A = B \cup C = (\mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (0, \infty)).$$

Το A είναι Borel σύνολο ως ένωση δύο Borel συνόλων.

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

(i) Το B δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε θα υπήρχαν ανοικτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. Θέτοντας $U_n = G_n \cap (-\infty, 0]$ θα είχαμε $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ και κάθε U_n θα ήταν ανοικτό και πυκνό στον πλήρη μετρικό χώρο $(-\infty, 0]$ αφού $U_n \supseteq B$ και το B είναι πυκνό στο $(-\infty, 0]$. Θεωρώντας μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του B και τα ανοικτά πυκνά σύνολα $V_n = (-\infty, 0] \setminus \{q_n\}$ θα είχαμε

$$\emptyset = B \cap ((-\infty, 0] \setminus B) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \right),$$

το οποίο είναι άτοπο από το θεώρημα Baire.

(ii) Το C δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε το $\mathbb{R} \setminus C = \mathbb{Q} \cup (-\infty, 0]$ θα ήταν G_δ-σύνολο, άρα και η τομή του με το G_δ-σύνολο $[1, \infty)$, δηλαδή το $\mathbb{Q} \cap [1, \infty)$ θα ήταν G_δ-σύνολο. Αυτό οδηγεί σε άτοπο όπως πριν.

(iii) Το A δεν είναι G_δ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $(-\infty, 0]$ είναι G_δ-σύνολο, θα είχαμε ότι το $B = A \cap (-\infty, 0]$ είναι G_δ-σύνολο.

(iv) Ομοίως, το A δεν είναι F_σ-σύνολο. Αν ήταν, τότε επειδή το $[0, \infty)$ είναι κλειστό σύνολο, θα είχαμε ότι το $C = A \cap [0, \infty)$ είναι F_σ-σύνολο.

32. *Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Δείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, τότε το $A+B$ είναι κλειστό. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A+B$ με $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = a_n + b_n$, όπου $a_n \in A$ και $b_n \in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to a \in A$. Τότε, $b_{k_n} = x_{k_n} - a_{k_n} \to x - a$. Αφού το B είναι κλειστό, έχουμε $x - a \in B$. Άρα, $x = a + (x-a) \in A + B$. Έπεται ότι το $A+B$ είναι κλειστό.

Υποθέτουμε τώρα ότι τα A, B είναι κλειστά. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n \cap [-n, n]$. Το A_n είναι συμπαγές, άρα το $A_n + B$ είναι κλειστό από την προηγούμενη παρατήρηση. Έπεται ότι το

$$A + B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n + B)$$

είναι F_σ-σύνολο ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το $A+B$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Ορίζουμε $A = \mathbb{Z}$ και $B = \sqrt{2}\mathbb{Z}$. Τα A, B είναι κλειστά (εξηγήστε γιατί). Όμως, το $A+B = \mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z} = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία (α_n) με $\alpha_n = (\sqrt{2}-1)^n$ είναι στο $A+B$ και $\alpha_n \to 0$. Έστω $x > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $0 < \alpha_{n_0} < \varepsilon$ και μετά $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ με $m\alpha_{n_0} \leqslant x < (m+1)\alpha_{n_0}$. Τότε, $0 \leqslant x - m\alpha_{n_0} < \alpha_{n_0} < \varepsilon$. Αν $x < 0$ δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε πάλι $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $|x - m\alpha_{n_0}| < \varepsilon$. Αφού $m\alpha_{n_0} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = A + B$, έπεται ότι $\overline{A+B} = \mathbb{R}$.

33. *Έστω $\epsilon > 0$. Έστω A το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους υπάρχουν άπειρα ανάγωγα κλάσματα $\frac{p}{q}$ που ικανοποιούν την $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\epsilon}}$. Δείξτε ότι $\lambda(A) = 0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = A \cap [-n, n]$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = 0,$$

άρα $\lambda(A) = 0$. Για κάθε $q \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$B_{n,q} = \bigcup_{p=-nq}^{nq} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}, \frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right).$$

Τότε,

$$A_n \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{q=k}^{\infty} B_{n,q} = \limsup_q B_{n,q}.$$

Έχουμε

$$\lambda(B_{n,q}) \leqslant \sum_{p=-nq}^{nq} \frac{2}{q^{2+\epsilon}} = \frac{4n}{q^{1+\epsilon}} + \frac{2}{q^{2+\epsilon}},$$

άρα

$$\sum_{q=1}^{\infty} \lambda(B_{n,q}) \leqslant 4n \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{1+\epsilon}} + 2 \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{2+\epsilon}} < \infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda(A_n) \leqslant \lambda(\limsup_q B_{n,q}) = 0$.

34. *Θέτουμε $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Δείξτε ότι:*

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε: $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^{m}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} R_j$, τότε $\sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j) \geqslant 1$.

Υπόδειξη. (α) Το A είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο, άρα μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $A = \{a_j : j \in \mathbb{N}\}$. Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $R_j = \left(a_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+2}}, a_j + \frac{1}{2^{j+2}}\right)$. Τότε, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

(β) Έστω ότι $R_j = (a_j, b_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $T_j = (a_j - \varepsilon, b_j + \varepsilon)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Παρατηρήστε ότι, αφού $A = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_m$,

$$[0,1] = \overline{A} \subseteq \overline{R_1 \cup \cdots \cup R_m} = \overline{R_1} \cup \cdots \cup \overline{R_m} \subseteq T_1 \cup \cdots \cup T_m.$$

Έπεται (το έχουμε δεί στη θεωρία) ότι

$$1 = \ell([0,1]) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \ell(T_j) = \sum_{j=1}^{m} (\ell(R_j) + 2\varepsilon = 2m\varepsilon + \sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j).$$

Το πλήθος m των διαστημάτων είναι σταθερό. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ έχουμε το ζητούμενο.

35. *(α) Έστω G φραγμένο, μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(B_j) < \infty$.*

(β) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{B_j\}$ ανοικτών μπαλών ώστε να καλύπτει το G όπως στο (α) και για κάθε $p > 1$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda(B_j))^p < \infty$.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι υπάρχει αριθμήσιμη κάλυψη $\{B_j\}$ του G από ανοικτές μπάλες ώστε: κάθε σημείο του G ανήκει σε άπειρες το πλήθος B_j και $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(B_j)<\infty$. Τότε, η πρώτη υπόθεση μας λέει ότι

$$G\subseteq \limsup_j B_j.$$

Από την δεύτερη υπόθεση και από το λήμμα Borel-Cantelli (Άσκηση 10 (β)) έχουμε ότι $\lambda\left(\limsup_j B_j\right)=0$. Άρα, $\lambda(G)=0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού το G έχει μη κενό εσωτερικό.

(β) Το G είναι φραγμένο, άρα περιέχεται σε έναν κύβο Q με μήκος ακμής a. Θέτουμε $Q_1^0=Q$.

Διχοτομούμε κάθε ακμή του Q_1^0, και παίρνουμε 2^d κλειστούς κύβους $Q_i^1, i=1,\dots 2^d$. Αν x_i^1 είναι το κέντρο του Q_i^1, θέτουμε $B_i^1=B\left(x_i^1, 3\frac{a\sqrt{d}}{2}\right)$. Τότε $Q_i^1\subseteq B_i^1$ για κάθε $i=1,\dots 2^d$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά, διχοτομώντας τις ακμές κάθε κύβου του προηγούμενου βήματος. Στο n-οστό βήμα παίρνουμε 2^{dn} μπάλες, καθεμία από τις οποίες έχει ακτίνα $3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}$, άρα το άθροισμα των p δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_d)]^p 2^{dn}\left(3\frac{a\sqrt{d}}{2^n}\right)^{dp}=[\lambda(B_d)]^p(3a\sqrt{d})^{dp}2^{nd(1-p)},$$

όπου B_d είναι η Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας 1. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, κάθε σημείο του Q ανήκει σε κάποιον κύβο του n-οστού, άρα και σε μία μπάλα του n-οστού βήματος. Αν θεωρήσουμε την συλλογή όλων των μπαλών που ορίζονται με αυτόν τον τρόπο σε οποιοδήποτε βήμα, έχουμε μια κάλυψη $\{B_j\}_j$ του Q, άρα και του G, με την ιδιότητα ότι κάθε $x\in G$ ανήκει σε άπειρες B_j. Τέλος, το άθροισμα της σειράς των p-δυνάμεων των μέτρων αυτών των μπαλών φράσσεται από

$$[\lambda(B_d)]^p\sum_{n=1}^{\infty}(3a\sqrt{d})^{dp}2^{d(1-p)n}<\infty,$$

αφού $2^{d(1-p)}<1$.

36. *Εξετάστε αν υπάρχει αρίθμηση $\{q_n:n\in\mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε*

$$\mathbb{R}\neq\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{1}{n}, q_n+\frac{1}{n}\right).$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να ορίσουμε αρίθμηση των ρητών για την οποία

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{1}{n}, q_n+\frac{1}{n}\right)\right)<\infty.$$

Αυτό προφανώς αποδεικνύει το ζητούμενο. Θεωρούμε μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $M := \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ στο $\mathbb{Q} \setminus [0, 1]$ και μία 1-1 και επί συνάρτηση από το $\mathbb{N} \setminus M$ στο $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Συνδυάζοντάς τις, έχουμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ με την ιδιότητα: $n = k^2$ αν και μόνο αν $|q_n| > 1$. Παρατηρήστε ότι $\bigcup\limits_{n \notin M} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right) \subseteq [-1, 2]$, άρα

$$\lambda\left(\bigcup_{n\notin M}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant 3.$$

Επίσης,

$$\sum_{n\in M} \lambda\left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} < 4.$$

Άρα,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n\notin M}\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) + \sum_{n\in M} \lambda\left(\left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right)\right) < \infty.$$

37. *(α) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το σύνολο $\Gamma = \{(x, f(x)) : a \leqslant x \leqslant b\}$ έχει μέτρο μηδέν.*

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα: (α) $\lambda(\Gamma + \Gamma) > 0$, (β) το $\Gamma + \Gamma$ περιέχει κάποιο μη κενό ανοικτό σύνολο, (γ) η f δεν είναι γραμμική συνάρτηση.

Υπόδειξη. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$. Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε το $[a, b]$ σε k διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_k$ μήκους μικρότερου ή ίσου από δ. Τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ έχουμε ότι το $f(I_j)$ περιέχεται σε ένα διάστημα T_j μήκους $\frac{\varepsilon}{b-a}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{k}\{(x, f(x)) : x \in I_j\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times f(I_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j \times T_j.$$

Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(I_j \times T_j) = \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j)\ell(T_j) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \varepsilon,$$

διότι

$$\sum_{j=1}^{k} \ell(I_j) = \ell([a, b]) = b - a.$$

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι το $\Gamma + \Gamma$ είναι μετρήσιμο. Πράγματι, $\Gamma + \Gamma = g([a, b] \times [a, b])$, όπου $g(x, y) = (x + y, f(x) + f(y))$. Η g είναι συνεχής, άρα το $\Gamma + \Gamma$ είναι συμπαγές (ειδικότερα, μετρήσιμο) ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου $[a, b] \times [a, b]$. Η συνεπαγωγή (β) $\Longrightarrow$ (α) είναι απλή: αν το $\Gamma + \Gamma$ περιέχει κάποιο μη κενό ανοικτό σύνολο, τότε περιέχει κάποια μπάλα, άρα και κάποιο μη εκφυλισμένο ορθογώνιο Q. Συνεπώς,

$$\lambda(\Gamma + \Gamma) \geqslant \lambda(Q) = \ell(Q) > 0.$$

Δείχνουμε τώρα τη συνεπαγωγή (α) $\Longrightarrow$ (γ): έστω ότι $\lambda(\Gamma + \Gamma) > 0$ και ότι η f είναι γραμμική, δηλαδή $f(x) = Ax + B$ για κάποιους $A, B \in \mathbb{R}$. Τότε, $\Gamma + \Gamma = \{(x + y, A(x + y) + 2B) : a \leqslant x \leqslant b\}$. Δηλαδή, το $\Gamma + \Gamma$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα στον $\mathbb{R}^2$ (που περιέχεται στην ευθεία $z = Au + 2B$). Εύκολα ελέγχουμε ότι $\lambda(\Gamma + \Gamma) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Τέλος, δείχνουμε την συνεπαγωγή (γ) $\Longrightarrow$ (β): η υπόθεση είναι ότι η f δεν είναι γραμμική. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x \neq y$ στο (a, b) με $f'(x) \neq f'(y)$ (αν η f' ήταν σταθερή στο (a, b) τότε η f θα ήταν γραμμική. Για την συνάρτηση g που ορίσαμε παραπάνω έχουμε τότε ότι η Ιακωβιανή της στο (x, y) δεν μηδενίζεται: ελέγξτε ότι είναι ίση με $|f'(x) - f'(y)| > 0$. Από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης έπεται ότι η g είναι ομοιομορφισμός σε μια περιοχή του (x, y), άρα το $\Gamma + \Gamma = g([a, b] \times [a, b])$ έχει μη κενό εσωτερικό.

38. *Έστω $A \subseteq E \subseteq B$. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $\lambda(A) = \lambda(B) < \infty$, δείξτε ότι το E είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\lambda(A) = \lambda^*(A) \leqslant \lambda^*(E) \leqslant \lambda^*(B) = \lambda(B)$. Από την υπόθεση ότι $\lambda(A) = \lambda(B)$ έπεται ότι ισχύει παντού ισότητα στην παραπάνω σχέση. Ειδικότερα, $\lambda(A) = \lambda^*(E)$.

Αφού το A είναι μετρήσιμο, και από την $E \cap A = A$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(A) = \lambda^*(E) &= \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \setminus A)\\ &= \lambda^*(A) + \lambda^*(E \setminus A) = \lambda(A) + \lambda^*(E \setminus A),\end{aligned}$$

απ¨ όπου έπεται ότι $\lambda^*(E \setminus A) = 0$. Άρα, το $E \setminus A$ είναι μετρήσιμο, και έπεται ότι το το $E = A \cup (E \setminus A)$ είναι μετρήσιμο.

39. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Υποθέτουμε ότι $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Δείξτε ότι τα E_1, E_2 είναι μετρήσιμα.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν ανοικτά σύνολα A_n, B_n, G_n με

$$E_1 \subseteq A_n, \;\; E_2 \subseteq B_n \;\text{ και }\; E \subseteq G_n,$$

τέτοια ώστε

$$\lambda(A_n) < \lambda^*(E_1) + \frac{1}{n}, \ \ \lambda(B_n) < \lambda^*(E_2) + \frac{1}{n} \ \text{ και } \ \lambda(G_n) < \lambda(E) + \frac{1}{n}.$$

Θέτουμε $C_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (G_k \cap A_k)$ και $D_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (G_k \cap B_k)$. Τότε, οι $(C_n), (D_n)$ είναι φθίνουσες ακολουθίες ανοικτών συνόλων, με $E_1 \subseteq C_n, E_2 \subseteq D_n$, και

$$\lambda(C_n) < \lambda^*(E_1) + \frac{1}{n}, \ \ \lambda(D_n) < \lambda^*(E_2) + \frac{1}{n}.$$

Ορίζουμε τώρα $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ και $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$. Τα C, D είναι G_δ-σύνολα, άρα είναι μετρήσιμα. Επιπλέον, $E_1 \subseteq C$ και $E_2 \subseteq D$, άρα $E \cap D^c \subseteq E_1$. Άρα, για να δείξουμε ότι το E_1 είναι μετρήσιμο, από την Άσκηση 38 αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda(C) = \lambda(E \cap D^c)$. Αφού τα $C, E \cap D^c$ έχουν πεπερασμένο μέτρο και $E \cap D^c \subseteq C$, αρκεί να δείξουμε ότι το $C \setminus (E \cap D^c) = (C \cap D) \cup (C \cap E^c)$ έχει μηδενικό μέτρο.

Για το $C \cap E^c$, γράφουμε $C \cap E^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} (C_n \cap E^c)$. Όμως, η $(C_n \cap E^c)$ είναι φθίνουσα, και

$$\lambda(C_n \cap E^c) \leqslant \lambda(G_n \cap E^c) = \lambda(G_n) - \lambda(E) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Επομένως, $\lambda(C \cap E^c) = 0$.

Για το $C \cap D$, γράφουμε $C \cap D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (C_n \cap D_n)$. Όμως, η $(C_n \cap D_n)$ είναι φθίνουσα, και

$$\begin{aligned}\lambda(C_n \cap D_n) &= \lambda(C_n) + \lambda(D_n) - \lambda(C_n \cup D_n) \leqslant \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \frac{2}{n} - \lambda(C_n \cup D_n) \\ &\leqslant \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2) + \frac{2}{n} - \lambda(E) = \frac{2}{n},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $E = E_1 \cup E_2 \subseteq C_n \cup D_n$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) + \lambda^*(E_2)$. Άρα, $\lambda(C \cap D) = 0$.

40. *Έστω E Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ και έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές, και δείξτε ότι αν το E είναι F_σ-σύνολο τότε το $T(E)$ είναι F_σ-σύνολο. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η T είναι Lipschitz συνεχής, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.

Κεφάλαιο 2

Ολοκλήρωμα Lebesgue

2.1 Ομάδα Α

1. *Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n[f(x + 1/n) - f(x)]$. Εφόσον, η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (a, b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη οπότε η f' είναι μετρήσιμη.

2. *(α) Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) = 0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.*

(β) Έστω A, B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B) = 0$ και έστω $f : A \cup B \to [-\infty, +\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Άμεσο αφού κάθε υποσύνολο μηδενικού συνόλου είναι μετρήσιμο.

(β) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$[f > b] = \{x \in A \cup B : f(x) > b\} = \{x \in B : f(x) > b\} \cup \{x \in A : f(x) > b\}.$$

Το πρώτο σύνολο στην προηγούμενη ένωση είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο μηδενικού συνόλου ενώ το δεύτερο είναι μετρήσιμο διότι η $f|_A$ είναι μετρήσιμη.

(γ) Έστω $C = C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Τότε, το $B = A \setminus C$ είναι μηδενικό σύνολο αφού η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Καθώς, κάθε συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη, το συμπέρασμα έπεται από το (β).

3. *(α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.*

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x \in A : f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε το μη μετρήσιμο σύνολο V του Vitali στο $[0, 1]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = 1$ αν $x \in V$ και -1 αλλιώς. Τότε, η f δεν είναι μετρήσιμη, αλλά η f^2 είναι η σταθερή 1 κι άρα είναι μετρήσιμη.

(β) Παρατηρήστε ότι το σύνολο $A_2 = \{x \in A \mid f(x) \leqslant 0\}$ είναι επίσης μετρήσιμο, αφού το $A_1 = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$ είναι μετρήσιμο. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Αν $b \leqslant 0$. Τότε, $[f \leqslant b] = [f^2 \geqslant b^2] \cap A_2$ το οποίο είναι μετρήσιμο. Αν $b > 0$ τότε

$$[f \leqslant b] = (A_1 \cap [f^2 \leqslant b^2]) \cup A_2$$

το οποίο είναι μετρήσιμο, ως πράξεις τέτοιων.

4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$L = \{x \in A \mid \text{ η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει } \}$$

είναι μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = \liminf f_n(x)$ και $h(x) = \limsup f_n(x)$ είναι μετρήσιμες. Τότε, το L γράφεται ως $L = [g = h] = \{x \in A \mid g(x) = h(x)\}$, το οποίο είναι μετρήσιμο.

5. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x \in A : f(x) > q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ υπάρχει (q_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών ώστε $q_n \to a$. Τότε,

$$\{x \in A \mid f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A \mid f(x) > q_n\}.$$

Επειδή κάθε $\{x \in A \mid f(x) > q_n\}$ είναι μετρήσιμο έπεται ότι το $[f \geqslant a]$ είναι μετρήσιμο. Καθώς το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, το ζητούμενο έπεται.

6. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $B \subseteq \mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \in B\}$ είναι μετρήσιμο.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{A} = \{B \subseteq \mathbb{R} \mid f^{-1}(B) \text{ μετρήσιμο}\}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η σ-άλγεβρα των Borel του $\mathbb{R}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Γι' αυτό δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα: Πράγματι· $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ μετρήσιμο, επομένως $\mathbb{R} \in \mathcal{A}$. Αν $B \in \mathcal{A}$ τότε $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus B) = \mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ και εφόσον το $B \in \mathcal{A}$ έπεται ότι το $\mathbb{R} \setminus f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Τέλος, αν $\{B_n\}$ ακολουθία στην $\mathcal{A}$, τότε $f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο αφού κάθε $f^{-1}(B_n)$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Δείχνουμε ότι η $\mathcal{A}$ περιέχει τα ανοικτά: Αφού f μετρήσιμη το $f^{-1}((a,b)) = [f < b] \cap [f > a]$ είναι μετρήσιμο, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Δηλαδή, $(a,b) \in \mathcal{A}$. Όμως κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη (ξένη) ένωση ανοικτών διαστημάτων κι εφόσον η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα προκύπτει ότι περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Από τον ορισμό των Borel έπεται ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

7. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) < \infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in A : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k, f : A \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

Υπόδειξη. (α) Είναι προφανές ότι η ω_f είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι είναι δεξιά συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t_n \downarrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Ορίζουμε $A_n = \{x \in A : f(x) > t_n\}$. Τότε, $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > t\}$. Επομένως, από την ιδιότητα του μέτρου παίρνουμε:

$$\omega_f(t) = \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n),$$

που αποδεικνύει την δεξιά συνέχεια της f.
Η ω_f είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι συνεχής από τα αριστερά. Ισοδύναμα, αν για κάθε (t_n) με $t_n \uparrow t$ ισχύει $\omega_f(t_n) \to \omega_f(t)$. Δείχνουμε όπως πριν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \omega_f(t_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda(x \in A : f(x) > t_n) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t),$$

όπου εδώ χρησιμοποιούμε την υποθέση $\lambda(A) < \infty$. Επομένως, η ω_f είναι αριστερά συνεχής αν και μόνον αν

$$\lambda(x \in A : f(x) > t) = \lambda(x \in A : f(x) \geqslant t) \overset{\lambda(A)<\infty}{\iff} \lambda(x \in A : f(x) = t) = 0.$$

Μ' άλλα λόγια η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνον αν $\lambda(f^{-1}(\{t\}))=0$.

(β) Είναι προφανές ότι για κάθε t έχουμε $\omega_{f_k}(t)\leqslant\omega_{f_{k+1}}(t)$. Έστω $t\in\mathbb{R}$. Ορίζουμε $B_k=\{x\in A:f_k(x)>t\}$. Τότε, $B_k\subseteq B_{k+1}$ και $\cup_{k=1}^{\infty}B_k=\{x\in A:f(x)>t\}$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\omega_{f_k}(t) &= \lim_{k\to\infty}\lambda(x\in A:f_k(x)>t)=\lim_{k\to\infty}\lambda(B_k)\\ &= \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k\right)=\lambda(x\in A:f(x)>t)=\omega_f(t).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

8. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Έστω $a\in\mathbb{R}$. Τότε, $A=g^{-1}((a,+\infty))$ είναι διάστημα της μορφής $[b,+\infty)$ ή (b,∞) αφού η g είναι αύξουσα. Επομένως, το $(g\circ f)^{-1}((a,+\infty))=f^{-1}(A)$ είναι μετρήσιμο, αφού η f είναι μετρήσιμη.

9. *Έστω $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F:[0,\infty)\to[0,\infty]$ με $F(t)=\lambda(\{f>t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty}F(t)=0$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $t>s\geqslant 0$ έχουμε $\{f>t\}\subseteq\{f>s\}$. Συνεπώς,

$$F(t)=\lambda(\{f>t\})\leqslant\lambda(\{f>s\})=F(s).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι φθίνουσα. Για να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής από δεξιά, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $t\geqslant 0$ και για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $t_n\to t$ ισχύει $F(t_n)\to F(t)$ (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό). Όμως,

$$\{f>t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{f>t_n\}.$$

Πράγματι, είναι προφανές ότι αν για κάποιον n ισχύει $f(x)>t_n$ τότε $f(x)>t$, ενώ αντίστροφα, αν $f(x)>t$, από το γεγονός ότι $t_n\to t$ έπεται ότι υπάρχει n ώστε $f(x)>t_n>t$. Έχουμε επίσης υποθέσει ότι η (t_n) είναι φθίνουσα, άρα $\{f>t_n\}\subseteq\{f>t_{n+1}\}$ για κάθε n. Δηλαδή, η $(\{f>t_n\})_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Έπεται ότι

$$F(t)=\lambda(\{f>t\})=\lim_{n\to\infty}\lambda(\{f>t_n\})=\lim_{n\to\infty}F(t_n).$$

Τέλος, για κάθε $t > 0$, από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$tF(t) = t\,\lambda(\{f > t\}) \leqslant \int f.$$

Άρα,

$$F(t) \leqslant \frac{1}{t}\int f,$$

και αυτό δείχνει ότ $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

10. *Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n \searrow f$, και υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\int f_k < \infty$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty}\int f_n.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$. Αφού η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα, συμπεραίνουμε ότι η $\{f_k - f_n\}_{n=k}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Αφού $f_n \searrow f$, έχουμε $f_k - f_n \nearrow f_k - f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int (f_k - f_n) \to \int (f_k - f).$$

Παρατηρήστε ότι $0 \leqslant f_k - f \leqslant f_k$, άρα

$$\int (f_k - f_n) \leqslant \int (f_k - f) \leqslant \int f_k < \infty$$

για κάθε n. Δηλαδή, η $f_k - f$ και όλες οι $f_k - f_n$ είναι ολοκληρώσιμες. Από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος,

$$\int f_n = \int f_k - \int (f_k - f_n) \to \int f_k - \int (f_k - f) = \int f.$$

11. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f > 0$ σ.π. Αν $\int_E f = 0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f > 0$ παντού στο E, δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : f(x) > 1/n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

διότι $f(x) > 0$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) > 1/n$. Από την ανισότητα του Markov,

$$\frac{1}{n}\,\lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} f \leqslant \int_E f = 0,$$

άρα $\lambda(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0.$$

Αυτό το επιχείρημα καλύπτει και την περίπτωση όπου $f > 0$ *σ.π.*: αν $Z = \{x \in E : f(x) = 0\}$ τότε $\lambda(Z) = 0$ και $\int_{E\setminus Z} f = 0$. Μπορούμε λοιπόν να δουλέψουμε με το $E \setminus Z$: αν δείξουμε ότι $\lambda(E \setminus Z) = 0$, θα έχουμε και $\lambda(E) = 0$.

12. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\geqslant 1/n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{[-n,n]}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε τελικά $x \in [-n, n]$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{-n}^{n} f = \int f\chi_{[-n,n]} = \int g_n \to \int f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ορίζουμε $h_n(x) = f(x)\chi_{\{f\geqslant 1/n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{h_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \geqslant 1/n\} \subseteq \{f \geqslant 1/(n+1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ άρα $h_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $h_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $h_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f = \int f\chi_{\{f\geqslant 1/n\}} = \int h_n \to \int f.$$

13. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\{f\leqslant n\}} f.$$

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{f \leqslant n\} \subseteq \{f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) < \infty$

έχουμε τελικά $f(x) \leqslant n$ άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$. Δηλαδή, αν $E = \{f < \infty\}$, έχουμε $g_n\chi_E \nearrow f\chi_E$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{f\leqslant n\}} = \int g_n = \int g_n\chi_E \to \int f\chi_E.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, γνωρίζουμε ότι $\lambda(E^c) = 0$ και $\int f\chi_{E^c} = 0$. Έπεται ότι

$$\int f = \int f\chi_E + \int f\chi_{E^c} = \int f\chi_E = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f\leqslant n\}} f.$$

14. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$;*

Υπόδειξη. Όχι. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$$

είναι σχεδόν παντού ίση με την μηδενική συνάρτηση. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = 0$. Όμως, το $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ δεν υπάρχει: έχουμε

$$f(n) \to 1 \text{ και } f(-n) \to 1.$$

15. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\lambda(\{f > 2^k\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε:

$$\int f,d\lambda = \int_0^\infty \lambda(f > t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(f > t)\,dt.$$

Επειδή η συνάρτηση $t \mapsto \lambda(f > t)$ είναι φθίνουσα η τελευταία σειρά είναι ισοδύναμη με την $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\lambda(f > 2^k)$ και το συμπέρασμα έπεται.

16. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E) < \infty$, ώστε*

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

Υπόδειξη. Ορίζουμε $g_n(x) = f(x)\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}}(x)$. Παρατηρήστε ότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα διότι $\{1/n \leqslant f \leqslant n\} \subseteq \{1/(n+1) \leqslant f \leqslant n+1\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < \infty$ έχουμε τελικά $f(x) \geqslant 1/n$ και $f(x) \leqslant n$, άρα $g_n(x) = f(x) \to f(x)$, ενώ αν $f(x) = 0$ έχουμε $g_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε πάλι $g_n(x) \to 0 = f(x)$ (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες). Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}} f = \int f\chi_{\{1/n\leqslant f\leqslant n\}} = \int g_n \to \int f.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε, αν θέσουμε $E = \{1/n \leqslant f \leqslant n\}$ τότε

$$\int_E f > \int f - \varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη (από n) στο E. Τέλος, από την ανισότητα του Markov,

$$\lambda(E) \leqslant \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n \int f < +\infty.$$

17. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$ είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$. Εύκολα βλέπουμε ότι $F(x) \leqslant F(y)$, δηλαδή η F είναι αύξουσα. Οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μονότονη ακολουθία (x_n) με $x_n \to x$ ισχύει $F(x_n) \to F(x)$ (εξηγήστε γιατί). Υποθέτουμε ότι $x_n \downarrow x$ (όμοια αντιμετωπίζεται κι άλλη περίπτωση). Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_n = f\chi_{(-\infty,x_n]}$ και $g = f\chi_{(-\infty,x]}$, οπότε $F(x_n) = \int f_n\, d\lambda$ και $F(x) = \int g\, d\lambda$. Επιπλέον, $g_n \to g$ κατά σημείο και $|g_n| \leqslant f$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$F(x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} f = \int g_n\, d\lambda \to \int g\, d\lambda = F(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι δεξιά συνεχής.

18. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E) < \delta$ τότε $\int_E f < \varepsilon$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$. Παρατηρήστε ότι $f_n \leqslant n$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$

(εξηγήστε γιατί η $\{f_n\}$ είναι αύξουσα και $f_n \to f$). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (f - f_n) = \int f - \int f_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\int_E f = \int_E f_n + \int_E (f - f_n) \leqslant \int_E f_n + \int (f - f_n) \leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

19. *Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n = \chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.*

Υπόδειξη. Αν $f_n = \chi_{[n,n+1)}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: παρατηρήστε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > x$ και τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $x \notin [n, n+1)$, άρα $f_n(x) = \chi_{[n,n+1)}(x) = 0$. Έπεται ότι

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

ενώ $\int f_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

20. *Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι*

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int \left(\limsup_{n\to\infty} f_n \right);$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

Υπόδειξη. Όχι. Αν $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$, τότε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη ($0 \leqslant f_n \leqslant 1$). Παρατηρήστε ότι

$$\int \limsup_{n\to\infty} f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$

αλλά $\int f_n = \frac{1}{n}\lambda([0,n]) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = 1.$$

21. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_n \to f$. Δείξτε ότι*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Υπόδειξη. Αφού $f_n \leqslant f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\int f_n \leqslant \int f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

22. *Έστω f και f_n, $n \in \mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f < \infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f = \infty$.

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n$$

και

$$\int_{E^c} f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{E^c} f_n$$

δηλαδή

$$\int f - \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(\int f_n - \int_E f_n \right).$$

Αφού

$$-\int f = \lim_{n\to\infty} \left(-\int f_n \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_E f_n \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_E f_n.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_E f_n \leqslant \int_E f \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

23. *Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f| \to 0$.*

Υπόδειξη. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n \to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in [a,b]$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, οπότε, από την $|f| < |f_{n_0}| + \varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

24. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1 - x/n)^n \chi_{[0,n]}(x)$ των μετρησίμων συναρτήσεων για την οποία ισχύει $|f_n(x)| \leqslant e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$. Παρατηρούμε ότι η $x \mapsto e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και $f_n(x) \to e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$ κατά σημείο. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται το συμπέρασμα.

25. *Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1 - (x/n))^n e^{x/2}dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία $f_n(x) = (1 - x/n)^n e^{x/2}\chi_{[0,n]}$, η οποία αποτελείται από από μετρήσιμες συναρτήσεις με $|f_n(x)| \leqslant e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$. Η συνάρτηση $g(x) = e^{-x/2}\chi_{[0,\infty)}$ είναι ολοκηρώσιμη, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$. Αλλά, $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x < 0$ ενώ αν $x \geqslant 0$ εχουμε

$$\lim_n f_n(x) = \lim_n \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\right] = e^{-x}e^{x/2} = e^{-x/2}.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\lim_n \int_0^n \Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n e^{-x/2}\,dx = \int_0^\infty e^{-x/2}\,dx = 2,$$

που υπολογίζει το ζητούμενο όριο.

26. *Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n \to \int f$;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $g_n := f - f_n$. Παρατηρήστε ότι $g_n \geqslant 0$, $g_n \geqslant g_{n+1}$ και $g_n \searrow 0$. Εφόσον, οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $\int g_1 < +\infty$ μπορούμε να γράψουμε (από το δυϊκό του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης – Άσκηση 10):

$$\int f - \lim_n \int f_n = \lim_n \Big(\int f - \int f_n\Big) = \lim_n \Big(\int f - f_n\Big) = \lim_n \int g_n = \int \lim_n g_n = 0,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

27. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leqslant \int \big|\,|f_n| - |f|\,\big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Με ανάλογο τρόπο,

$$\left| \int f_n - \int f \right| = \left| \int (f_n - f) \right| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

28. *Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f| \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+ \to \int f^+$.*

Υπόδειξη. Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Γράφουμε

$$\left| \int_E f_n - \int_E f \right| = \left| \int_E (f_n - f) \right| \leqslant \int_E |f_n - f| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int_E f_n \to \int_E f.$$

Για το δεύτερο ερώτημα χρησιμοποιούμε την Άσκηση 27. Με την υπόθεση ότι $\int |f_n - f| \to 0$, δείξαμε ότι $\int f_n \to \int f$ και $\int |f_n| \to \int |f|$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int f_n^+ &= \int \frac{f_n + |f_n|}{2} = \frac{1}{2}\int f_n + \frac{1}{2}\int |f_n| \to \frac{1}{2}\int f + \frac{1}{2}\int |f| \\ &= \int \frac{f + |f|}{2} = \int f^+. \end{aligned}$$

29. *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της f με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\int |f|\, d\lambda = \int_0^\infty \lambda(|f| > t)\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(|f| > t)\, dt.$$

Παρατηρήστε ότι η $t \mapsto \lambda(|f| > t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t > 0$, οπότε

$$2^{k-1}\lambda(|f| > 2^k) < \int_{2^{k-1}}^{2^k} \lambda(|f| > t)\, dt < 2^{k-1}\lambda(|f| > 2^{k-1}),$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως, το ολοκλήρωμα $\int |f|\, d\lambda$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(|f| > 2^k) < +\infty$.

30. *Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n \to \int g$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n \to \int f$.*

Υπόδειξη. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leqslant g_n$ έχουμε $-g_n \leqslant f_n \leqslant g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geqslant 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geqslant 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int f + \int g = \int (f+g) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (f_n + g_n) = \liminf_{n\to\infty} \int f_n + \int g$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int g_n \to \int g$). Άρα,

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int g - \int f = \int (g-f) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int (g_n - f_n) = \int g - \limsup_{n\to\infty} \int f_n,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Άρα,

$$\int f_n \to \int f.$$

31. *Έστω* (f_n), f *ολοκληρώσιμες και έστω ότι* $f_n \to f$ *σχεδόν παντού. Δείξτε ότι* $\int |f_n - f| \to 0$ *αν και μόνο αν* $\int |f_n| \to \int |f|$.

Υπόδειξη. $(\Longrightarrow)$ Έχουμε

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| \leqslant \int \big|\, |f_n| - |f| \,\big| \leqslant \int |f_n - f| \to 0.$$

Άρα,

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

$(\Longleftarrow)$ Έχουμε $\big|\, |f_n - f| - |f_n| \,\big| \leqslant |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n - f| - |f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int (|f_n - f| - |f_n|) \to \int (-|f|).$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int |f_n| \to \int |f|.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

32. *Έστω* (f_n) *ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση* g *ώστε* $|f_n| \leqslant g$ *σχεδόν παντού για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Δείξτε ότι*

$$\int \left(\liminf_n f_n \right) \leqslant \liminf_n \int f_n \leqslant \limsup_n \int f_n \leqslant \int \left(\limsup_n f_n \right).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $h_n = g - f_n$, η οποία είναι ακολουθία ολοκηρωσίμων συναρτήσεων με $h_n \geqslant 0$. Από το λήμμα του Fatou παίρνουμε:

$$\int [g+\liminf(-f_n)]\, d\lambda = \int \liminf h_n\, d\lambda \leqslant \liminf \int h_n\, d\lambda = \liminf \left(\int g\, d\lambda - \int f_n\, d\lambda \right).$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\liminf(-f_n) - \limsup f_n$ και ότι $\int g\, d\lambda < +\infty$ προκύπτει ότι

$$-\int \limsup f_n\, d\lambda \leqslant -\limsup \int f_n\, d\lambda,$$

το οποίο αποδεικνύει το δεξιό ζευγάρι ανισοτήτων. Για την άλλη μη τετριμμένη ανισότητα εργαζόμαστε ανάλογα θεωρώντας την ακολουθία συναρτήσεων $u_n = g + f_n$.

33. *Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.*

(α) Αν $\int_E f = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf \left\{ \int_E f : \lambda(E) \geqslant \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{[0,1]} f = 0$ (διότι το $[0,1]$ είναι η ένωση δύο συνόλων μέτρου $1/2$. Έστω $A, B \subset [0,1]$ με $\lambda(A) = \lambda(B) = \frac{1}{4}$. Τότε, $\lambda([0,1] \setminus (A \cup B)) \geqslant 1/2$. Συνεπώς, υπάρχει $C \subseteq [0,1]$ με $\lambda(C) = 1/4$ και $C \cap A = C \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\int_A f = \int_{A\cup C} f - \int_C f = -\int_C f = \int_{B\cup C} f - \int_C f = \int_B f,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{A\cup C} f = 0 = \int_{B\cup C} f$ το οποίο ισχύει από την υπόθεση αφού $\lambda(A \cup C) = \lambda(B \cup C) = 1/2$. Τώρα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν $\lambda(A) = 1/4$ τότε $\int_A f = 0$. Πράγματι, υπάρχει $B \subset [0,1]$ με $\lambda(B) = 1/4$ και $A \cap B = \emptyset$, συνεπώς,

$$0 = \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f = 2 \int_A f.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 1$, αν $A \subset [0,1]$ και $\lambda(A) = \frac{1}{2^k}$ τότε

$$\int_A f = 0.$$

Έπεται τώρα ότι, για κάθε «δυαδικό ρητό» $x = \frac{m}{2^k}$, όπου $k \in \mathbb{N}$ και $0 \leqslant m \leqslant 2^k$, ισχύει

$$\int_{[0,m/2^k]} f = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x) = \int_0^x f$. Όπως στην Άσκηση 12, μπορούμε να δείξουμε ότι η F είναι συνεχής. Αφού $F(x) = 0$ για κάθε δυαδικό ρητό $x \in [0,1]$, συμπεραίνουμε ότι $F(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Ειδικότερα, $\int_I f = 0$ για κάθε διάστημα $I \subseteq [0,1]$. Έπεται τώρα ότι $\int_E f = 0$ για κάθε ανοικτό $E \subseteq [0,1]$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $\int_{[0,1]} f = 0$, έπεται ότι $\int_F f = 0$ για κάθε κλειστό $F \subseteq [0,1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\lambda(\{f \neq 0\}) > 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $\lambda(\{f > 0\}) > 0$. Έπεται ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(D) > 0$, όπου $D = \{f \geqslant 1/k\}$ (εξηγήστε γιατί). Μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq D$ με $\lambda(F) > 0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, καταλήγουμε σε άτοπο, διότι

$$\int_F f \geqslant \frac{1}{k}\lambda(F) > 0.$$

(β) Αφού $f > 0$ σχεδόν παντού υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $\lambda(\{x : f(x) > \varepsilon\}) > 2/3$. [Πράγματι· αν θεωρήσουμε την ακολουθία συνόλων $E_k = \{x : f(x) > 1/k\}$ τότε $E_k \nearrow [0,1]$, άρα $\lambda(E_k) \to 1$.] Αν θέσουμε λοιπόν $F = \{x : |f(x)| > \varepsilon\} > 2/3$ τότε μπορούμε να γράψουμε: αν E μετρήσιμο με $\lambda(E) \geqslant 1/2$ τότε

$$\int_E f\,d\lambda \geqslant \int_{E\cap F} f\,d\lambda \geqslant \varepsilon\lambda(E\cap F),$$

διότι η f είναι θετική σχεδόν παντού. Επιπλέον, είναι $\lambda(E\cap F) \geqslant \lambda(E) + \lambda(F) - 1 > 1/6$. Επομένως, $\int_E f\,d\lambda \geqslant \varepsilon/6$ για κάθε τέτοιο σύνολο E, που αποδεικνύει το ζητούμενο.

34. *Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^\infty \int_E |f_n| < +\infty$. Δείξτε ότι:*

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^\infty f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \int f_n.$$

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo–Levi έχουμε ότι $\int_E \sum_{n=1}^\infty |f_n| = \sum_{n=1}^\infty \int_E |f_n| < +\infty$, δηλαδή η συνάρτηση $F = \sum_{n=1}^\infty |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη, άρα πεπερασμένη σχεδόν παντού. Μ' άλλα λόγια η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει (απόλυτα) σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Έστω $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, η οποία ορίζεται σχεδόν για κάθε $x \in E$. Τότε, σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| = F(x).$$

Η F είναι ολοκληρώσιμη, από υπόθεση, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε την ακολουθία ολοκληρωσίμων συναρτήσεων $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ και παρατηρούμε ότι σχεδόν για κάθε $x \in E$ ισχύει

$$|s_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leqslant F(x).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε:

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \int_E \lim_n s_n = \lim_n \int_E s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n.$$

35. *(α) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.*

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \to \int_E f$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

(β) Παρατηρούμε ότι $|f_n| \leqslant |f|$ και ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, σχεδόν παντού στο E. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

36. *Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_n$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) \geqslant k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\, d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f\, d\lambda \geqslant k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda(E_i) \geqslant \frac{k}{n}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geqslant \frac{k}{n}$.

2.2 Ομάδα Β′

37. *(α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.*

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Υπόδειξη. (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, $(h \circ g)^{-1}((a, +\infty)) = g^{-1}(h^{-1}(a, +\infty))$. Όμως, η h είναι μετρήσιμη, άρα το $B = h^{-1}(a, +\infty)$ είναι Borel. Έπεται, ότι το $g^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel αφού g συνεχής.

(β) Έστω $\phi : [0, 1] \to [0, 1]$ η συνάρτηση Cantor–Lebesgue και ξαναλέμε ϕ την επέκτασή της σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ με $\phi(x) = 1$ αν $x > 1$ ενώ $\phi(x) = 0$ αν $x < 0$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \phi(x)$. Έχουμε δει ότι $\lambda(f(C)) = 1$, άρα υπάρχει $V \subsetneq f(C)$ μη μετρήσιμο. Επίσης, το $A = f^{-1}(V)$ είναι μετρήσιμο. Παρατηρήστε ότι ορίζεται η $g = f^{-1}$, η οποία είναι συνεχής και $h = \chi_A$ η οποία είναι μετρήσιμη. Τότε, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δεν είναι μετρήσιμη αφού $\{x \mid (h \circ g)(x) > 0\} = V$.

38. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Πρώτα δείχνουμε ότι η f απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του $[a, b]$ σε κλειστά. Πράγματι· αν F κλειστό στο $[a, b]$, επειδή το $[a, b]$ είναι συμπαγές έπεται ότι το F είναι συμπαγές. Αφού η f είναι συνεχής παίρνουμε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό. Αν τώρα $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι F_σ σύνολο, τότε κάθε E_n είναι κλειστό, οπότε το $f(E) = \cup_{n=1}^{\infty} f(E_n)$ είναι F_σ.

(β) Υποθέτουμε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(f(A)) = 0$. Θα δείξουμε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Πράγματι· αν A μετρήσιμο, τότε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν N και E μηδενικό σύνολο και F_σ-σύνολο αντίστοιχα, ώστε $A = E \cup N$. Τότε, $f(A) = f(E) \cup f(N)$. Αλλά, από το (α) το $f(E)$ είναι F_σ, ενώ από την υπόθεση το $f(N)$ είναι μηδενικό. Συνεπώς, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο.

Αντίστροφα· έστω ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σε μετρήσιμα. Θα δείξουμε ότι απεικονίζει μηδενικά σύνολα σε μηδενικά. Έστω $A \subset [a, b]$ με $\lambda(A) = 0$. Τότε, το $f(A)$ είναι μετρήσιμο. Αν είναι $\lambda(f(A)) > 0$ τότε υπάρχει $V \subset f(A)$ μη μετρήσιμο. Έστω $E = f^{-1}(V) \cap A$, το οποίο είναι προφανώς μετρήσιμο. Τότε, το $f(E) = V$ δεν είναι μετρήσιμο κι έχουμε αντίφαση.

39. *(α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.*

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A_n = \{x : f_n(x) > \alpha\}$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, άρα από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli έπεται ότι $\lambda(\limsup A_n) = 0$. Θέτουμε $Z = \limsup A_n$ επομένως, αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $x \notin A_n$ δηλαδή $f_n(x) \leqslant \alpha$, άρα $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$.

(β) Όπως προηγουμένως, υπάρχει Z με $\lambda(Z) = 0$ ώστε αν $x \notin Z$, τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ τότε $f_n(x) \leqslant \varepsilon_n$. Καθώς, $\varepsilon_n \to 0^+$ το ζητούμενο έπεται.

40. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.*

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$. Προς τούτο αρκεί να αποδείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta > 0$ ώστε $\lambda(x : |g(x)| > \beta) < \varepsilon$.

Έστω $E_n = \{x : |g(x)| \leqslant n\}$. Τότε, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = [0,1]$ και η $\{E_n\}$ είναι αύξουσα. Άρα, είναι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda([0,1]) = 1$. Επομένως, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(A_k) > 1 - \varepsilon$. Τότε, $\lambda(x : |g(x)| > k) < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Εφαρμόζοντας αυτό για $g = f_n$ και $\varepsilon = 2^{-n}$ βρίσκουμε $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(x : |f_n(x)| > \beta_n) < 1/2^n$. Θέτουμε $E_n = \{x : |f_n(x)| > \beta_n\}$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) < +\infty$. Αν θέσουμε $Z = \limsup E_n$, τότε από το πρώτο λήμμα Borel–Cantelli παίρνουμε $\lambda(Z) = 0$. Αν $x \notin Z$ τότε υπάρχει $N_x \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geqslant N_x$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant \beta_n$. Αν θεωρήσουμε την $\alpha_n = \frac{1}{n\beta_n}$ τότε έχουμε ότι για κάθε $x \notin Z$ ισχύει $\frac{f_n(x)}{\alpha_n} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

41. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t-περιοδική και s-περιοδική για κάποιους $t, s > 0$ με $t/s \notin \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι μη αρνητική και φραγμένη. Ορίζουμε $F(x) = \int_0^x f(t)\,d\lambda(t)$. Για κάθε y της μορφής $y = kt + ms,\ k, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,d\lambda(t) = \int_0^x f(t+y)\,d\lambda(t) = \int_y^{x+y} f(t)\,d\lambda(t) = F(x+y) - F(y),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα του Kronecker γνωρίζουμε ότι το σύνολο $D = \{kt + ms : k, m \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$. Εφόσον, η F είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και ικανοποιεί τη συναρτησιακή εξίσωση $F(x+y) = F(x) + F(y)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε y σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έπεται ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = \alpha x$. Έτσι,

$$F(x) - \alpha x = \int_0^x f(t)\,d\lambda(t) - \alpha x = \int_0^x (f(t) - \alpha)\,d\lambda(t) = 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από εδώ έπεται εύκολα ότι η $h(t) = f(t) - \alpha$ έχει ολοκλήρωμα μηδέν σε κάθε διάστημα κι άρα είναι μηδέν σχεδόν παντού.

Για τη γενική περίπτωση θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(t) = 1 + \frac{2}{\pi}\arctan f(t)$ για την οποία πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι είναι μετρήσιμη και ότι $0 < f_1 < 2$.

42. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_n(x) = f(x)\chi_{E\cap[-n,n]}(x).$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Lusin, για κάθε n βρίσκουμε ένα κλειστό σύνολο $F_n \subseteq E \cap [-n,n]$ ώστε η $g_n\,|_{F_n}$ να είναι συνεχής και $\lambda(E\cap[-n,n]\setminus F_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$. Κατόπιν, επεκτείνουμε την g_n σε μια συνεχή συνάρτηση $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (θεώρημα Tietze, στην περίπτωσή μας είναι πιο απλό, αφού το $\mathbb{R} \setminus F_n$ είναι μια ξένη ένωση ανοικτών διαστημάτων). Τότε, οι $f_n := h_n\,|_E\colon E \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θέτουμε

$$D = \{x \in E : f_n(x) \not\to f(x)\}$$

και θα δείξουμε ότι $\lambda(D) = 0$. Έστω $x \in D$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x| \leqslant n_0$ και, άρα $x \in E \cap [-n,n]$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $g_n(x) = f(x)$. Αφού $f_n(x) \not\to f(x)$, θα πρέπει να υπάρχουν άπειροι φυσικοί n για τους οποίους $f_n(x) \neq g_n(x)$, δηλαδή άπειροι φυσικοί n για τους οποίους $x \in E_n := E \cap [-n,n] \setminus F_n$. Δηλαδή,

$$D \subseteq \limsup_{n\to\infty}(E_n).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

Από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε $\lambda(\limsup_n(E_n))=0$, άρα $\lambda(D)=0$.

43. *Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η $f_x(y):=f(x,y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y\in\mathbb{R}$ η $f^y(x):=f(x,y)$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.*

Υπόδειξη. Ορίζουμε $f_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ως εξής. Αν $z=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει μοναδικός $m=m_x\in\mathbb{Z}$ ώστε $x\in\left[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}\right)$. Θέτουμε

$$f_n(x,y)=f\left(\frac{m_x}{n},y\right).$$

Δείχνουμε ότι η f_n είναι μετρήσιμη: παρατηρήστε ότι, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$E_n(\alpha):=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:f_n(x,y)>\alpha\right\}=\bigcup_{m=-\infty}^{\infty}\left[(\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}\right)\times\{y\in\mathbb{R}:f(m/n,y)>\alpha\}.$$

Για κάθε $m\in\mathbb{Z}$, αφού η $f_{m/n}$ είναι συνεχής συνάρτηση, το σύνολο $\{y\in\mathbb{R}:f(m/n,y)>\alpha\}$ είναι ανοικτό, άρα το σύνολο

$$\left[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}\right)\times\{y\in\mathbb{R}:f(m/n,y)>\alpha\}$$

είναι μετρήσιμο. Έπεται ότι το $E_n(\alpha)$ είναι μετρήσιμο για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, και αυτό δείχνει ότι η f_n είναι μετρήσιμη.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f_n(x,y)\to f(x,y)$ για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Πράγματι, αφού $\frac{m_x}{n}\to x$ καθώς το $n\to\infty$ (εξηγήστε γιατί) και αφού η f^y είναι συνεχής, έχουμε

$$f_n(x,y)=f(m_x/n,y)=f^y(m_x/n)\to f^y(x)=f(x,y).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

44. *Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν η $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x\in[0,1]$.*

Υπόδειξη. Από την Άσκηση 22 του Κεφαλαίου 1 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E\subseteq[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J\subseteq[0,1]$,

$$\lambda(J\cap E)>0\quad\text{και}\quad\lambda(J\setminus E)>0.$$

Θεωρούμε την $f = \chi_E : [0,1] \to \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι αν $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω $x_0 \in (0,1)$ και $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0,1)$. Τα σύνολα $A_\delta = E \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $B_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus E$ έχουν θετικό μέτρο. Αφού $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού, μπορούμε να βρούμε $x_\delta \in A_\delta$ και $y_\delta \in B_\delta$ για τα οποία επιπλέον έχουμε

$$g(x_\delta) = f(x_\delta) = 1 \quad \text{και} \quad g(y_\delta) = f(y_\delta) = 0.$$

Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \subset (0,1)$ για κάθε $n \geqslant n_0$, και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη παρατήρηση βρίσκουμε x_n, y_n με $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $|y_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $g(x_n) = 1$ και $g(y_n) = 0$. Αφού $x_n \to x_0$, $y_n \to x_0$ και

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} g(y_n),$$

η g είναι ασυνεχής στο x_0.

Παρόμοιο επιχείρημα εφαρμόζεται για τα $x_0 = 0$ και $x_0 = 1$ (θεωρήστε διαστήματα της μορφής $[0, \delta)$ ή $(1 - \delta, 1]$ αντίστοιχα).

45. *Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)|\, d\lambda < \infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο και $M > 0$ ώστε $\lambda([0,1] \setminus A) < \varepsilon$ και, για κάθε $x \in A$, $\sup_n |f_n(x)| \leqslant M$.*

Υπόδειξη. Η συνάρτηση $f(x) = \sup_n |f_n(x)|$ είναι μετρήσιμη, διότι οι f_n είναι μετρήσιμες. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$E_n = \{x \in [0,1] : f(x) > n\}.$$

Αφού $\sup_n |f_n(x)| < \infty$ για κάθε $x \in [0,1]$, βλέπουμε ότι η (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Από τη συνέχεια του μέτρου Lebesgue έχουμε $\lambda(E_n) \to 0$. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\lambda(E_{n_0}) < \varepsilon$. Θέτοντας $A = [0,1] \setminus E_{n_0}$ και $M = n_0$, έχουμε

$$\lambda([0,1] \setminus A) = \lambda(E_{n_0}) < \varepsilon$$

και, για κάθε $x \in A$,

$$\sup_n |f_n(x)| = f(x) \leqslant n_0 = M.$$

46. *Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$. Συμβολίζουμε με f_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n.*

(α) Αν $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Αν για κάποιο $x \in [0,1]$ η ακολουθία $(f_n(x))$ δεν συγκλίνει στο 0, τότε το x ανήκει σε άπειρα από τα I_n. Δηλαδή,

$$\{x \in [0,1] : f_n(x) \not\to 0\} \subseteq \limsup_{n\to\infty} I_n.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

από το λήμμα Borel-Cantelli συμπεραίνουμε ότι $\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} I_n\right) = 0$, άρα $\lambda(\{x \in [0,1] : f_n(x) \not\to 0\}) = 0$. Έπεται ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Όχι. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$ με $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$, τέτοια η $f_n(x)$ να αποκλίνει παντού. Αρχικά, θέτουμε $I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right]$, $I_3 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, 1\right]$, και θέτουμε $n_1 = 3$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: η σειρά $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, και $\frac{1}{4} < 1$, άρα υπάρχει ο ελάχιστος $n_2 > 4$ τέτοιος ώστε $\sum_{n=4}^{n_2} \frac{1}{n} > 1$. Καλύπτουμε τότε το $[0,1]$ με διαδοχικά κλειστά διαστήματα $I_4, I_5, \ldots, I_{n_2}$ για τα οποία έχουμε ότι $\lambda(I_k) \leqslant \frac{1}{k}$.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε ακολουθία κλειστών διαστημάτων I_n και γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών n_k τέτοια ώστε $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$, οποιαδήποτε δύο διαδοχικά από τα I_n έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο, και $\bigcup_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} I_i = [0,1]$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε σημείο $x \in [0,1]$ ανήκει σε άπειρα από τα I_n, αλλά όχι σε όλα τελικά τα I_n, επομένως η $f_n(x)$ δεν συγκλίνει.

47. *Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\delta_n := \frac{\log(n/a)}{n(b-a)}$. Τότε, για κάθε $n > a$ ισχύει $\delta_n > 0$ και $f_n(x) < 0$ για $0 < x < \delta_n$. Επομένως,

$$\int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda \geqslant \int_0^{\delta_n} [ne^{-nbx} - ae^{-nax}] \, d\lambda = \frac{1}{b} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{\frac{b}{b-a}}} \left(1 - \frac{a}{b}\right) a^{\frac{a}{b-a}},$$

απ' όπου έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = +\infty$.

Για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = a\frac{e^{-ax}}{1-e^{-ax}} - \frac{e^{-bx}}{(1-e^{-bx})^2}.$$

Έπεται ότι $\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty f_n \, d\lambda = +\infty$. Τέλος, είναι

$$\int_0^\infty f_n \, d\lambda = \frac{1}{n} - \frac{1}{b},$$

συνεπώς έχουμε $\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n \, d\lambda = -\infty$.

48. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με* $f(x) = x^{-1/2}$ *αν* $0 < x < 1$ *και* $f(x) = 0$ *αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση* $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ *των ρητών, και θέτουμε* $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{f(x-q_n)}{2^n}$.

(α) Δείξτε ότι η g *είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα,* $|g| < \infty$ *σχεδόν παντού.*

(β) Δείξτε ότι η g *είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν μεταβάλλουμε τις τιμές της* g *σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.*

(γ) Δείξτε ότι $g^2 < \infty$ *σχεδόν παντού, αλλά η* g^2 *δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.*

Υπόδειξη. (α) Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^\infty \frac{|f(x-q_n)|}{2^n} \, d\lambda(x) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} |f(x-q_n)| \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \int_{q_n}^{q_n+1} \frac{1}{\sqrt{x-q_n}} \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \, d\lambda(t) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \, 2\sqrt{t} \, |_0^1 \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{2}{2^n} = 2 < \infty.
\end{aligned}$$

Αφού $f \geqslant 0$ έχουμε

$$|g(x)| = g(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{|f(x-q_n)|}{2^n},$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \, d\lambda(x) < \infty,$$

δηλαδή η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Έστω (a,b) ένα διάστημα κα έστω $M > 0$. Θεωρούμε ένα ρητό $q_m \in (a,b)$ και βρίσκουμε $\epsilon > 0$ ώστε $(q_m, q_m + \epsilon) \subset (a,b)$. Παρατηρήστε ότι

$$g(x) \geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m} = \frac{1}{2^m\sqrt{x-q_m}} > M$$

για κάθε $x \in (q_m, q_m+\delta)$, όπου $\delta = \min\left\{\frac{1}{2^m M}, \epsilon\right\}$. Αφού το $(q_m, q_m+\delta)$ είναι υποδιάστημα του (a,b), έπεται ότι

$$\lambda(\{x \in (a,b) : g(x) > M\}) > 0$$

και το ίδιο θα ισχύει για κάθε συνάρτηση h που είναι ίση με την g σχεδόν παντού. Αυτό αποδεικνύει ότι κάθε τέτοια h δεν είναι φραγμένη στο (a,b).

Έπεται επίσης ότι η g δεν είναι συνεχής σε κανένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $g(x) = +\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ αν $g(x) < \infty$ παρατηρούμε ότι αν η g ήταν συνεχής στο x τότε θα υπήρχε κάποιο διάστημα $(x-\eta, x+\eta)$ στο οποίο η g θα ήταν φραγμένη, κάτι που είδαμε ότι δεν μπορεί να συμβεί.

(γ) Θεωρούμε τυχόν διάστημα $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Υπάρχει ρητός q_m τέτοιος ώστε $q_m < b < q_m + 1$. Αφού

$$g(x) \geqslant \frac{f(x-q_m)}{2^m} \geqslant 0,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{(a,b)} g^2(x)\,d\lambda(x) &\geqslant \int_{(a,b)} \frac{f^2(x-q_m)}{2^{2m}}\,d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \int_{q_m}^{b} \frac{1}{x-q_m}\,d\lambda(x) \\
&= \int_0^{b-q_m} \frac{1}{t}\,d\lambda(t) = \infty.
\end{aligned}$$

Άρα, η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη στο (a,b), παρόλο που, αφού $|g(x)| < \infty$ σχεδόν παντού, έχουμε $g^2(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

49. *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f\,d\lambda \geqslant \delta$.*

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \left\{x \in A : f(x) < \frac{1}{n}\right\}$. Η (A_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του A, και $\bigcap_n A_n = \emptyset$ διότι η f είναι γνησίως θετική. Αφού $\lambda(A) < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $lim_n \lambda(A_n) = 0$.

Έστω $t > 0$. Επιλέγουμε $n(t)$ ώστε $\lambda(A_{n(t)}) < \frac{t}{2}$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq A$ με $\lambda(E) > t$, έχουμε

$$\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \lambda(E) - \lambda(A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\int_E f\,d\lambda \geqslant \int_{E\setminus A_{n(t)}} f\,d\lambda \geqslant \frac{1}{n(t)}\lambda(E \setminus A_{n(t)}) \geqslant \frac{t}{2n(t)}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο, με $\delta = \delta(t) = \frac{t}{2n(t)}$.

50. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, μπορούμε να βρούμε $\delta \in (0,1)$ και $M > 0$ ώστε $|f(t)| \leqslant M$ για κάθε $t \in [0,\delta]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n(x)|\,d\lambda(x) &= \frac{1}{n}\int_0^1 |f(t)|\,t^{\frac{1}{n}-1}\,d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{n}\int_0^\delta |f(t)|\,t^{\frac{1}{n}-1}\,d\lambda(t) + \frac{1}{n}\int_\delta^1 |f(t)|\,t^{\frac{1}{n}-1}\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \frac{M}{n}\int_0^\delta t^{\frac{1}{n}-1}\,d\lambda(t) + \frac{1}{n\delta^{1-\frac{1}{n}}}\int_\delta^1 |f(t)|\,d\lambda(t)\\ &\leqslant M\delta^{\frac{1}{n}} + \frac{\delta^{\frac{1}{n}}}{\delta n}\int_0^1 |f(t)|\,d\lambda(t) < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f_n \in L_1[0,1]$.

51. *Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\,d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant f(x) + 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Πράγματι, αν $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant 1 \leqslant f(x) + 1$, ενώ αν $f(x) \geqslant 1$ έχουμε $\sqrt[n]{f(x)} \leqslant f(x) \leqslant f(x) + 1$. Αν ορίσουμε

$$g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

έχουμε λοιπόν $0 \leqslant g_n \leqslant f + 1$, και η συνάρτηση $f + 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Παρατηρούμε τώρα ότι: αν $f(x) = 0$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} = 0 \to 0$, ενώ αν $0 < f(x) < \infty$ τότε $g_n(x) = \sqrt[n]{f(x)} \to 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε $0 \leqslant f(x) < \infty$ σχεδόν παντού. Άρα,

$$\sqrt[n]{f(x)} = g_n(x) \to \chi_{\{x:f(x)>0\}}$$

σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}\, d\lambda(x) = \int_0^1 g_n(x)\, d\lambda(x) \to \int_0^1 \chi_{\{x: f(x)>0\}}(x)\, d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

52. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $B = \{f \leqslant 0\}$ και $B_k = \left\{f < \frac{1}{k}\right\}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, η (B_k) είναι φθίνουσα ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$, και $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B$, άρα

$$\lim_{k\to\infty} \lambda(B_k) = \lambda(B) = 0.$$

Επομένως, υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε $\lambda(B_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Από την υπόθεση υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{A_n} f\, d\lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{2k_0}.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$, αφού $f \geqslant \frac{1}{k_0}$ στο $[0,1] \setminus B_{k_0}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(A_n) &= \lambda(A_n \cap B_{k_0}) + \lambda(A_n \cap ([0,1] \setminus B_{k_0})) \leqslant \lambda(B_{k_0}) + k_0 \int_{A_n \cap ([0,1]\setminus B_{k_0})} \frac{1}{k_0}\, d\lambda \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + k_0 \int_{A_n} f\, d\lambda \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lambda(A_n) \to 0$.

Σημείωση. Το γεγονός ότι το $[0,1]$ έχει πεπερασμένο μέτρο χρησιμοποιήθηκε ουσιαστικά. Αν θεωρήσουμε την $f(x) = \frac{1}{x^2}$ στο $[1,\infty)$, τότε η f είναι γνήσια θετική και αν θέσουμε $A_n = [n, n+1]$ έχουμε

$$\int_{A_n} f\, d\lambda \leqslant \frac{1}{n^2} \to 0,$$

όμως $\lambda(A_n) = 1 \not\to 0$.

53. *Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x > 0$ ορίζουμε $g(x) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-xt}\, d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.*

Υπόδειξη. Έστω $t > 0$. Θέτουμε $g_t(x) = e^{-xt}$. Η παράγωγος της g_t είναι ίση με $g_t'(x) = -te^{-xt}$. Σταθεροποιούμε $x_0 > 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| = |g_t'(z)||x - x_0| = te^{-tz}|x - x_0|$$

για κάποιο z μεταξύ των x, x_0. Αφού $z \geqslant x_0 - \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{2}$, έχουμε $e^{-tz} \leqslant e^{-tx_0/2}$. Άρα,

$$|e^{-tx} - e^{-tx_0}| \leq te^{-tx_0/2}|x - x_0|.$$

Θεωρούμε την $h_{x_0}(t) = te^{-tx_0/2}$. Αφού $\lim_{t\to 0^+} h_{x_0}(t) = 0$ και $\lim_{t\to+\infty} h_{x_0}(t) = 0$, υπάρχει $M_{x_0} > 0$ τέτοιος ώστε $|h_{x_0}(t)| \leqslant M_{x_0}$ για κάθε $t > 0$. Άρα, αν $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= \left|\int_0^\infty f(t)(e^{-xt} - e^{-x_0 t})\, d\lambda(t)\right| \leqslant |\int_0^\infty |f(t)|te^{-tx_0/2}|x - x_0|\, d\lambda(t) \\ &\leqslant M_{x_0}|x - x_0| \int_0^\infty |f| d\lambda. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $x \to x_0$ βλέπουμε ότι $g(x) \to g(x_0)$, άρα η g είναι συνεχής.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, θεωρούμε τυχόν $0 < \varepsilon < 1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\delta |f|\, d\lambda < \varepsilon.$$

Επομένως, αν $x > \frac{-\log\varepsilon}{\delta}$ και $t > \delta$, τότε $-xt < \log\varepsilon$. Άρα, αν $x > \frac{-\log\varepsilon}{\delta}$,

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leqslant \int_0^\infty |f(t)|e^{-xt}\, d\lambda(t) = \int_0^\delta |f(t)|e^{-xt}\, d\lambda(t) + \int_\delta^\infty |f(t)|e^{-xt}\, d\lambda(t) \\ &\leqslant \int_0^\delta |f(t)|\, d\lambda(t) + \int_\delta^\infty |f(t)|e^{\log\varepsilon}\, d\lambda(t) < \varepsilon + \varepsilon \int_0^\infty |f|\, d\lambda. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, 1)$ ήταν τυχόν και $\int_0^\infty |f|\, d\lambda < \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

54. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$ και έστω $f, g : E \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με*

$$\int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda.$$

Δείξτε ότι είτε (α) $f = g$ σχεδόν παντού στο E είτε (β) υπάρχει μετρήσιμο $A \subset E$ τέτοιο ώστε

$$\int_A f\, d\lambda < \int_A g\, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι

$$\int_A g\, d\lambda \leqslant \int_A f\, d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subset E$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $F \subset E$, θέτοντας $A = E \setminus F$ στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_F g\,d\lambda &= \int_E g\,d\lambda - \int_{E\setminus F} g\,d\lambda \\ &= \int_E f\,d\lambda - \int_{E\setminus F} g\,d\lambda \\ &\geqslant \int_E f\,d\lambda - \int_{E\setminus F} f\,d\lambda \\ &= \int_F f\,d\lambda,\end{aligned}$$

άρα τελικά έχουμε

$$\int_F g\,d\lambda \leqslant \int_F f\,d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο $F \subset E$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $B_\varepsilon = \{f - g \geqslant \varepsilon\}$ και $C_\varepsilon = \{g - f \geqslant \varepsilon\}$. Τότε, τα B_ε και C_ε είναι μετρήσιμα, και

$$0 = \int_{B_\varepsilon} f\,d\lambda - \int_{B_\varepsilon} g\,d\lambda = \int_{B_\varepsilon} (f-g)\,d\lambda \geqslant \varepsilon\lambda(B_\varepsilon),$$

άρα $\lambda(B_\varepsilon) = 0$. Όμοια δείχνουμε ότι $\lambda(C_\varepsilon) = 0$. Έπεται ότι

$$\lambda(\{|f-g| \geqslant 1/n\}) = \lambda(B_{1/n} \cup C_{1/n}) = 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα

$$\lambda(\{f \neq g\}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{n} \{|f-g| \geqslant 1/n\}\right) = 0.$$

Δηλαδή, $f = g$ σχεδόν παντού στο E.

55. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει το εξής: για κάθε $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) > 0$ ισχύει*

$$t_E := \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f\,d\lambda \in A.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $Z = \{x \in [0,1] : f(x) \notin A\}$ έχει μέτρο μηδέν.

Υπόδειξη. Αφού το A είναι κλειστό, μπορούμε να γράψουμε το συμπλήρωμά του σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων:

$$\mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k).$$

Παρατηρήστε ότι

$$Z = \{x \in [0,1] : f(x) \notin A\} = \left\{ x \in [0,1] : f(x) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \right\}$$
$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in [0,1] : f(x) \in (a_k, b_k)\}.$$

Υποθέτουμε ότι $\lambda(Z) > 0$. Τότε, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο

$$Z_k := \{x \in [0,1] : f(x) \in (a_k, b_k)\}$$

να έχει θετικό μέτρο. Εφαρμόζοντας την υπόθεση με $E = Z_k$ βλέπουμε ότι

$$t_k := \frac{1}{\lambda(Z_k)} \int_{Z_k} f \, d\lambda \in A.$$

Όμως, $a_k < f(x) < b_k$ για κάθε $x \in Z_k$. Άρα,

$$a_k \lambda(Z_k) < \int_{Z_k} f \, d\lambda < b_k \lambda(Z_k),$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$a_k < t_k := \frac{1}{\lambda(Z_k)} \int_{Z_k} f \, d\lambda < \beta_k.$$

Δηλαδή, $t_k \in (a_k, b_k)$. Άρα, $t_k \notin A$, το οποίο είναι άτοπο.

56. *Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)| \, d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Άρα, η συνάρτηση $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Έπεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|$$

συγκλίνει σχεδόν παντού. Ειδικότερα, $f_n(t) - f(t) \to 0$ σχεδόν παντού.

57. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$,

$$\int_A f_n \, d\lambda \to 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η h είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε: αν E είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $[0,1]$ και $\lambda(E) < \delta$, τότε $\int_E h \, d\lambda < \varepsilon$.

Έστω A Borel υποσύνολο του $[0,1]$. Μπορούμε να βρούμε συμπαγές K και ανοικτό $U \subset [0,1]$ ώστε $K \subseteq A \subseteq U$ και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Urysohn βρίσκουμε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $0 \leqslant g \leqslant 1$, $g(x) = 1$ για κάθε $x \in K$ και $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus U$. Τώρα γράφουμε

$$\int_A f_n \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n \chi_A \, d\lambda = \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda + \int_{[0,1]} f_n (\chi_A - g) \, d\lambda,$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1]} f_n (\chi_A - g) \, d\lambda \right| &\leqslant \int_{[0,1]} |f_n| \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{[0,1]} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \\ &= \int_{U \setminus K} h \, |\chi_A - g| \, d\lambda \leqslant \int_{U \setminus K} h \, d\lambda < \varepsilon, \end{aligned}$$

διότι $\chi_A - g \equiv 0$ στο K και στο $[0,1] \setminus U$, $|\chi_A - g| \leqslant 1$ στο $U \setminus K$, και $\lambda(U \setminus K) < \delta$. Έπεται ότι

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| \leqslant \lim_{n \to \infty} \left| \int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \right| + \varepsilon = \varepsilon,$$

διότι $\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0$ από την υπόθεση. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{n \to \infty} \left| \int_A f_n \, d\lambda \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

58. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού, και*

$$\int_{[0,1]} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant 10$$

για κάθε n. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} |f(x)|\, d\lambda(x) \to 0.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $\alpha > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda &= \int_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}} |f_n|\, d\lambda + \int_{\{|f_n|>\alpha\}} |f_n|\, d\lambda \\
&\leqslant \int_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}} |f_n|\, d\lambda + \int_{\{|f_n|>\alpha\}} \frac{|f_n|^2}{\alpha}\, d\lambda \\
&\leqslant \alpha \int_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}} d\lambda + \frac{10}{\alpha} \\
&= \alpha \int_{[0,1]} \chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}\, d\lambda + \frac{10}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι οι $g_n := \chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}$ φράσσονται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g \equiv 1$ στο $[0,1]$, και από την υπόθεση ότι $|f_n(x)| \to 0$ σχεδόν παντού έπεται ότι «$|f_n(x)| < \alpha$ τελικά» σχεδόν παντού, δηλαδή «$\chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}(x) = 0$ τελικά» σχεδόν παντού, δηλαδή $\chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}(x) \to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_{[0,1]} \chi_{\{|f_n|\leqslant\alpha\}}\, d\lambda \to 0.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda \leqslant \frac{10}{\alpha}.$$

Αφού το $\alpha > 0$ ήταν τυχόν, αφήνοντας το $\alpha \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda = 0 \ \text{ άρα } \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n|\, d\lambda = 0.$$

59. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\leqslant\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)^2$, άρα

$$n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\leqslant 2n\ln\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)\leqslant 2|f(x)|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln\left(1+\frac{|f(x)|}{n}\right)\leqslant\frac{|f(x)|}{n}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x)=n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)$, έχουμε $|g_n|\leqslant 2|f|$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα $|f(x)|<\infty$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$|g_n(x)|=n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)\leqslant n\frac{|f(x)|^2}{n^2}=\frac{|f(x)|^2}{n}\to 0$$

σχεδόν παντού. Δηλαδή, $g_n\to 0$ σχεδόν παντού. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}}n\ln\left(1+\frac{|f(x)|^2}{n^2}\right)d\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}}g_n(x)d\lambda(x)\to 0.$$

60. *Έστω $f:[0,1]\to[1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι*

$$\int_{[0,1]}f\ln f\,d\lambda\geqslant\int_{[0,1]}f\,d\lambda\cdot\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $\alpha=\int_{[0,1]}f\,d\lambda>0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g=f/\alpha$. Παρατηρούμε ότι $(y-1)\ln y\geqslant 0$ για κάθε $y>0$ (αν $y\leqslant 1$ τότε $y-1\leqslant 0$ και $\ln y\leqslant 0$, ενώ αν $y>1$ τότε $y-1>0$ και $\ln y>0$). Συνεπώς, $y\ln y\geqslant\ln y$ για κάθε $y>0$. Αφού η g παίρνει θετικές τιμές, έχουμε $g\ln g\geqslant\ln g$ στο $[0,1]$, άρα

$$\int_{[0,1]}g\ln g\,d\lambda\geqslant\int_{[0,1]}\ln g\,d\lambda.$$

Αφού $g=f/\alpha$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\frac{f}{\alpha}(\ln f-\ln\alpha)\,d\lambda&=\int_{[0,1]}\frac{f}{\alpha}\ln\frac{f}{\alpha}\,d\lambda\geqslant\int_{[0,1]}\ln\frac{f}{\alpha}\,d\lambda\\&\geqslant\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda-\int_{[0,1]}\ln\alpha\,d\lambda=\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda-\ln\alpha,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{1}{\alpha}\int_{[0,1]}f\ln f\,d\lambda-\frac{\int_{[0,1]}f\,d\lambda}{\alpha}\ln\alpha\geqslant\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda-\ln\alpha,$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$\int_{[0,1]}f\ln f\,d\lambda\geqslant\alpha\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda=\int_{[0,1]}f\,d\lambda\cdot\int_{[0,1]}\ln f\,d\lambda.$$

Κεφάλαιο 3

Χώροι L_p

3.1 Ομάδα Α΄

1. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f \in L_p(E)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει*

$$\lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}) \leqslant \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Υπόδειξη. Έστω $\alpha > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_{\{|f|\geqslant\alpha\}} \alpha^p d\lambda(x) = \alpha^p \lambda(\{|f| \geqslant \alpha\}.$$

2. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : n-1 \leqslant |f| < n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$(n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant n^p \lambda(E_n).$$

Επίσης, αφού τα E_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f|^p \, d\lambda$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L_p(E)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leqslant 2$ για κάθε $n \geqslant 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n^p \lambda(E_n) &\leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p \lambda(E_n) \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} 2^p (n-1)^p \lambda(E_n) \\ &\leqslant 2^p \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \, d\lambda \leqslant 2^p \int_E |f|^p \, d\lambda < \infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \, d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} n^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leqslant |f| < n\}) < \infty,\end{aligned}$$

άρα $f \in L_p(E)$.

3. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(E)$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι*

$$\|f_n - f\|_p \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$|\, \|f_n\|_p - \|f\|_p \,| \leqslant \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \to 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \to 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 (γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης). Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned}|f_n - f|^p &\leqslant (|f_n| + |f|)^p \leqslant (2\max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \\ &\leqslant 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \to g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L_1(E)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L_1(E)$) και

$$\int_E |g_n| \, d\lambda = 2^p \left(\int_E |f_n|^p \, d\lambda + \int_E |f|^p \, d\lambda\right) \to 2^{p+1} \int_E |f|^p \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda,$$

διότι $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

Αφού $|f_n - f|^p \to 0$ σχεδόν παντού, από την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_E |f_n - f|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p \to 0$.

4. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $f_n \to f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \to g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ στον $L_1(E)$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leqslant \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Holder. Επίσης, αφού

$$|\, \|f_n\|_p - \|f\|_p \,| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0,$$

έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leqslant M$ για κάθε n. Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \to 0$ και $\|g_n - g\|_q \to 0$, άρα

$$\|f_n g_n - fg\|_1 \leqslant M\|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \to 0.$$

5. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leqslant p < q < \infty$.*

(α) Αν $f : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(E) \subseteq L_p(E)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(E) \neq L_p(E)$.

Υπόδειξη. (α) και (β) Υποθέτουμε ότι $\|f\|_q < \infty$, αλλιώς το δεξιό μέλος απειρίζεται και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $f \in L_q(E)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^p \cdot \mathbf{1} \, d\lambda &\leqslant \left(\int_E |f|^q d\lambda\right)^{p/q} \left(\int_E \mathbf{1} \, d\lambda\right)^{1-p/q} \\ &= \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-p/q},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις $|f|^p$ και $\mathbf{1}$ με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leqslant \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

απ¨ όπου έπεται ότι $f \in L^p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

(γ) Έστω $1 \leqslant p < q < \infty$. Θα ορίσουμε $f \in L_p(E) \setminus L_q(E)$. Αφού $0 < \lambda(E) < \infty$ μπορούμε να βρούμε ξένα μετρήσιμα $E_n \subset E$ με $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E)}{2^n}$ και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$, της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n}(x),$$

όπου $a_n > 0$ που θα επιλεγούν κατάλληλα. Έχουμε

$$\|f\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^q \quad \text{και} \quad \|f\|_p^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^p.$$

Αν ορίσουμε

$$a_n = 2^{n/q}$$

τότε

$$\|f\|_q^q = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = \infty$$

ενώ

$$\|f\|_p^p = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{np/q} = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-p/q)}} < \infty$$

(έχουμε $\delta = 1 - p/q > 0$ διότι $p < q$, και η γεωμετρική σειρά με λόγο $2^{-(1-p/q)} = 2^{-\delta} < 1$ συγκλίνει).

6. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f\chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leqslant |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\int_E |g|^p d\lambda = \int_E |f|^p \chi_B \, d\lambda = \int_B |f|^p \, d\lambda \leqslant \int_B |f|^q \, d\lambda$$
$$\leqslant \int_E |f|^q \, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty,$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $g \in L_p(E)$.

Για την h παρατηρούμε ότι $h = f\chi_{E\setminus B}$, και $|h(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in E \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leqslant |h(x)|^q$ για κάθε $x \in E \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |h|^r d\lambda &= \int_E |f|^r \chi_{E\setminus B}\, d\lambda = \int_{E\setminus B} |f|^r\, d\lambda \leqslant \int_{E\setminus B} |f|^q\, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f|^q\, d\lambda = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $h \in L_r(E)$.

7. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leqslant p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E) \cap L_r(E)$ τότε $f \in L_q(E)$ για κάθε $p \leqslant q \leqslant r$.*

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Ψπάρχει $t \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_E |f|^q\, d\lambda &= \int_E |f|^{(1-t)p}|f|^{tr}\, d\lambda \leqslant \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)p}\right)^{\frac{1}{1-t}} d\lambda\right)^{1-t} \left(\int_E \left(|f|^{tr}\right)^{\frac{1}{t}} d\lambda\right)^t \\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^{1-t} \left(\int_E |f|^r d\lambda\right)^t = \|f\|_p^{(1-t)p}\|f\|_r^{tr} < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_q(E)$.

8. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L_p(E)$ για κάποιον $p \geqslant 1$. Δείξτε ότι*

$$\ln \|f\|_p \geqslant \int_E \ln |f|\, d\lambda.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\ln \|f\|_p = \ln \left[\left(\int_E |f|^p\, d\lambda\right)^{1/p}\right] = \frac{1}{p} \ln \left(\int_E |f|^p\, d\lambda\right),$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln \left(\int_E |f|^p\, d\lambda\right) \geqslant p \int_E \ln |f|\, d\lambda = \int_E p \ln |f|\, d\lambda = \int_E \ln(|f|^p)\, d\lambda.$$

Θέτοντας $g = |f|^p$ έχουμε ότι η g είναι μη αρνητική, $g \in L_1(E)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\ln \left(\int_E g\, d\lambda\right) \geqslant \int_E \ln g, d\lambda.$$

Γράφουμε $g = e^h$, όπου $h = \ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(\int_E e^h \, d\lambda\right) \geqslant \int_E h \, d\lambda.$$

Ορίζουμε

$$t_0 = \int_E h \, d\lambda.$$

Υποθέτουμε ότι $t_0 \in \mathbb{R}$ (αν $t_0 = -\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, και $t_0 < \infty$ διότι $h = \ln g \leqslant g - 1$ και η $g - 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο E). Η συνάρτηση $u(t) := e^t$ είναι κυρτή, άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^t - e^{t_0} = u(t) - u(t_0) \geqslant u'(t)(t - t_0) = e^{t_0}(t - t_0).$$

Δηλαδή,

$$e^{h(x)} - e^{t_0} \geqslant e^{t_0}(h(x) - t_0).$$

Ολοκληρώνοντας στο E και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lambda(E) = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x) - \int_E e^{t_0} \, d\lambda(x) &\geqslant e^{t_0}\left[\int_E h(x) \, d\lambda(x) - \int_E t_0 \, d\lambda(x)\right] \\ &= e^{t_0}\left[t_0 - t_0\lambda(E)\right] = 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x) \geqslant \int_E e^{t_0} \, d\lambda(x) = e^{t_0},$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$\ln\left(\int_E e^{h(x)} \, d\lambda(x)\right) \geqslant t_0 = \int_E h \, d\lambda.$$

9. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \ldots, c_m > 0$ με $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \ldots, f_m : E \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε*

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i| \, d\lambda\right)^{c_i}.$$

Υπόδειξη. Αν $\int_E |f_i| \, d\lambda = 0$ για κάποιο $i = 1, \ldots, m$, τότε $f_i = 0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} = 0$ σχεδόν παντού, και τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσα με μηδέν.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_E |f_i| \, d\lambda > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_E |f_i| \, d\lambda} f_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Τότε, $\int_E |g_i|\,d\lambda = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)| > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$)

$$\begin{aligned}\ln(|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m}) &= c_1\ln(|g_1(x)|) + c_2\ln(|g_2(x)|) + \cdots + c_m\ln(|g_m(x)|)\\ &\leqslant \ln(c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1}|g_2(x)|^{c_2}\cdots|g_m(x)|^{c_m} \leqslant c_1|g_1(x)| + c_2|g_2(x)| + \cdots + c_m|g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x) = 0$ για κάποιο i. Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant c_1\int_E |g_1|\,d\lambda + \cdots + c_m\int_E |g_m|\,d\lambda = c_1 + \cdots + c_m = 1.$$

Αφού

$$\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}},$$

έπεται ότι

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}\right) d\lambda \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i|\,d\lambda\right)^{c_i}.$$

10. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geqslant 1$. Αν $t \in (0,1)$ και $r = tp + (1-t)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\|f\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{tp}\|f\|_q^{(1-t)q}.$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα αποδείχθηκε για την Άσκηση 7. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder για τις συναρτήσεις $|f|^{tp}$ και $|f|^{(1-t)q}$ με εκθέτες $\frac{1}{t}$ και $\frac{1}{1-t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|^r\,d\lambda &= \int_E |f|^{tp}|f|^{(1-t)q}\,d\lambda \leqslant \left(\int_E \left(|f|^{tp}\right)^{\frac{1}{t}} d\lambda\right)^t \left(\int_E \left(|f|^{(1-t)q}\right)^{\frac{1}{1-t}} d\lambda\right)^{1-t}\\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda\right)^t \left(\int_E |f|^q d\lambda\right)^{1-t} = \|f\|_p^{tp}\|f\|_r^{(1-t)q}.\end{aligned}$$

11. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n\|_p \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο E, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ και $\|f\|_p \leqslant 1$.*

Υπόδειξη. Αφού $|f_n|^p \to |f|^p$ σχεδόν παντού στο E, από το λήμμα του Fatou έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p \, d\lambda = \int_E \lim_{n\to\infty} |f_n|^p \, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p \, d\lambda \leqslant 1,$$

διότι

$$\int_E |f_n|^p \, d\lambda = \|f_n\|_p^p \leqslant 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

12. *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mathbb{R})$ με $\int f_n \, d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n \, d\lambda = 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\delta = \chi_{[-\delta,\delta]}$. Από την ανισότητα Holder παίρνουμε

$$\begin{aligned}(2\delta)^{1/q}\|f_n\|_p &= \left(\int |g_\delta|^q \, d\lambda\right)^{1/q} \|f_n\|_p \geqslant \left|\int f_n g_\delta \, d\lambda\right| \\ &= \int_{\{x:|x|\leqslant\delta\}} f_n \, d\lambda = \int f_n \, d\lambda - \int \{x : |x| > \delta\} f_n \, d\lambda \\ &= 1 - \int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n \, d\lambda.\end{aligned}$$

Από την υπόθεση υπάρχει $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{\{x:|x|>\delta\}} f_n \, d\lambda < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant n_0(\delta)$ έχουμε

$$\|f_n\|_p > \frac{1}{2} \frac{1}{(2\delta)^{1/q}}.$$

Έπεται ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p \geqslant \frac{1}{2} \frac{1}{(2\delta)^{1/q}}$$

για κάθε $\delta > 0$, και αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ παίρνουμε $\liminf_n \|f_n\|_p = +\infty$. Άρα, $\|f_n\|_p \to 0$.

13. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(E)$. Δείξτε ότι*

$$\int_E |f|^p \, d\lambda = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) \, d\lambda_1(t).$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_E |f(x)|^p \, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} \, d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty pt^{p-1} \chi_{[0,|f(x)|)}(t) \, d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) \, d\lambda(x) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x) \chi_{[0,|f(x)|)}(t) \, d\lambda(x) \right) pt^{p-1} \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{x \in E : |f(x)| > t\}}(x) \, d\lambda(x) \right) pt^{p-1} \, d\lambda_1(t) \\
&= \int_0^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) pt^{p-1} \, d\lambda_1(t).
\end{aligned}$$

14. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geqslant 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \to 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρ- τήσεων στο E με $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο E. Δείξτε ότι $\|f_n g_n - fg\|_p \to 0$.*

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $g_n \to g$ σχεδόν παντού, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|g\|_\infty \leqslant M$ (υπάρχει $Z \subset E$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε, για κάθε $x \in E \setminus Z$ ισχύουν οι $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και $g_n(x) \to g(x)$, άρα για κάθε $x \in E \setminus Z$ έχουμε $|g(x)| \leqslant M$).

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλή παρατήρηση ότι αν $u \in L_p(E)$ και $v \in L_\infty(E)$ τότε $uv \in L_p(E)$ και

$$\|uv\|_p^p = \int_E |u|^p |v|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |u|^p \|v\|_\infty^p \, d\lambda = \|v\|_\infty^p \|u\|_p^p.$$

δηλαδή

$$\|uv\|_p \leqslant \|v\|_\infty \|u\|_p.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|f_n g_n - fg\|_p &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_p \leqslant \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \\
&\leqslant \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p.
\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος έχουμε $\|f_n - f\|_p \to 0$, άρα $M\|f_n - f\|_p \to 0$. Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισησ: έχουμε

$$|f(g_n - g)|^p = |f|^p|g_n - g|^p \leqslant |f|^p(|g_n| + |g|)^p \leqslant (2M)^p|f|^p$$

σχεδόν παντού, και η $(2M)^p|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, διότι $f \in L_p(E)$ (ως $\|\cdot\|_p$-όριο των $f_n \in L_p(E)$). Επίσης, $|f(g_n - g)|^p \to 0$ σχεδόν παντού, διότι $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού και $g_n(x) - g(x) \to 0$ σχεδόν παντού. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και έχουμε

$$\int_E |f(g_n - g)|^p \, d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $\|f(g_n - g)\|_p \to 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|f_n g_n - fg\|_p \leqslant M\|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \to 0.$$

15. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:*

(α) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim\limits_{t\to 0} \int |f - f_t| = 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα την $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Έχουμε $f_t(x) = \chi_E(x+t) = \chi_{-t+E}(x)$, άρα $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και

$$\int f_t \, d\lambda = \lambda(-t+E) = \lambda(E) = \int f \, d\lambda.$$

Λόγω γραμμικότητας, συμπεραίνουμε εύκολα ότι αν ϕ είναι μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ισχύει $\phi_t \in L_1(\mathbb{R}^d$ και

$$\int \phi_t \, d\lambda = \int \phi \, d\lambda.$$

Έστω τώρα $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ με $f \geqslant 0$. Θεωρούμε ακολουθία απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ϕ_n με $\phi_n \nearrow f$. Έστω $t \in \mathbb{R}^d$. Έχουμε $(\phi_n)_t \in L_1(\mathbb{R}^d$, $(\phi_n)_t \nearrow f_t$, και

$$\int (\phi_n)_t \, d\lambda = \int \phi_n \, d\lambda.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int f_t \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n)_t \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Έτσι βλέπουμε ότι $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

Στη γενική περίπτωση, όπου $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f^+ και f^-.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Ο χώρος $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$, άρα μπορούμε να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $K = \mathrm{supp}(g)$. Η g είναι συνεχής, με φορέα το συμπαγές K, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)}$. Τότε, για κάθε $|t| < \delta$ έχουμε

$$\|g - g_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x+t)|\, d\lambda(x) = \int_{K\cup(K-t)} |g(x) - g(x+t)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\|f - f_t\|_1 \leqslant \|f - g\|_1 + \|g - g_t\|_1 + \|g_t - f_t\|_1 < 3\varepsilon,$$

χρησιμοποιώντας και την $\|f - g\|_1 = \|f_t - g_t\|_1$, η οποία ισχύει για κάθε t από το (α).

16. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.*

Υπόδειξη. Έστω $0 \neq f \in L_\infty(E)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p\, d\lambda \leqslant \int_E \|f\|_\infty^p d\lambda = \|f\|_\infty^p \lambda(E) < \infty,$$

άρα $f \in L_p(E)$. Επίσης,

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty [\lambda(E)]^{1/p} \to \|f\|_\infty$$

καθώς το $p \to \infty$, άρα $\limsup_{p\to\infty} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geqslant \int_{B_\varepsilon} |f(x)|^p d\, d\lambda \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \lambda(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p\to\infty} [\lambda(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

17. *Έστω $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(α) $f \in L_p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L_p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$.

(γ) $f \in L_p(0,\infty)$ *αν και μόνο αν* $p = p_0$.

Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^{-a}|\ln x|^b$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 < p < p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p \leqslant p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p \geqslant p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 \leqslant p \leqslant p_1$ τότε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p < p_0$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^{p/p_0}(\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p > p_1$ έχουμε

$$\int_0^\infty |f(x)|^p d\lambda(x) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_0}}\chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}(\ln(x+1))^{2/p_0}}\chi_{[1,\infty)}(x)$.

18. *Έστω* E, F *μετρήσιμα υποσύνολα του* $\mathbb{R}^d$ *με* $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) *Δείξτε ότι η* $\chi_E * \chi_F$ *είναι συνεχής συνάρτηση.*

(β) *Δείξτε ότι υπάρχουν* $x_0 \in \mathbb{R}^d$ *και* $\varepsilon > 0$ *ώστε: αν* $|x - x_0| < \varepsilon$ *τότε* $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$. *Δηλαδή, το* $E - F$ *έχει μη κενό εσωτερικό.*

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}|(\chi_E * \chi_F)(x) - (\chi_E * \chi_F)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)]\chi_F(z) d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z).\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x-z)$, τότε $\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y) = f(z+(x-y)) = f_{x-y}(z)$ με την ορολογία της Άσκησης 15. Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Έπεται ότι

$$\lim_{y\to x} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z) = \lim_{x\to y} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{x-y}|\, d\lambda = 0$$

από την Άσκηση 15 (β).

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε

$$\lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Θέτουμε $F_1 = F + x_0$. Η συνάρτηση

$$f(x) := (\chi_{-E} * \chi_{F_1})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{-E}(x-z)\chi_{F_1}(z)\, d\lambda(z) = \lambda((x+E) \cap F_1)$$

είναι συνεχής, από το πρώτο ερώτημα. Όμως,

$$f(0) = \lambda(E \cap F_1) = \lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|u| < \varepsilon$ τότε

$$f(u) = \lambda((E+u) \cap (F + x_0)) > 0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $|u| < \varepsilon$ έχουμε $E \cap (F + x_0 - u) = -u + (E+u) \cap (F + x_0) \neq \emptyset$, και θέτοντας $x = x_0 - u$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ με $|x - x_0| < \varepsilon$ ισχύει $E \cap (F + x) \neq \emptyset$.

3.2 Ομάδα Β′

19. *Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και*

$$\int_0^{1/n} f_n(t)\, dt = 1.$$

Έστω $g \in L_1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\|g_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)|\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t)\, d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g\|_1\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|g_n\|_1 \leqslant \|g\|_1 < +\infty.$$

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\|g_n - g\|_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g_t - g\|_1\, d\lambda(t),$$

όπου $g_t(x) = g(x-t)$. Πράγματι,

$$|g_n(x) - g(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t),$$

άρα

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)| f_n(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x)|\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t).\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Άσκηση 15 (β) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $\|g_t - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|g_n - g\|_1 &\leqslant \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) = \int_{[0,1/n]} \|g_t - g\|_1 f_n(t)\, d\lambda(t) \\ &< \varepsilon \int_{[0,1/n]} f_n(t)\, d\lambda(t) \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

και έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$.

20. *Έστω $p, q, r \geqslant 1$ με $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ τότε $f * g \in L_r(\mathbb{R}^d)$ και*

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $a = 1 - \frac{p}{r}$ και $b = 1 - \frac{q}{r}$. Παρατηρούμε ότι $r \geqslant p$ και $r \geqslant q$ λόγω των υποθέσεων ότι $p, r, q \geqslant 1$ και $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Ορίζουμε $p_1 = \frac{pr}{r-p}$ και $p_2 = \frac{rq}{r-q}$. Τότε, $p_1, p_2 \geqslant 1$ και $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r} = 1$. Γράφουμε

$$|(f * g)(x)| = \left| \int f(x-y)g(y)\, d\lambda(y) \right| \leqslant \int (|f(x-y)|^{1-a}|g(y)|^{1-b})|f(x-y)|^a|g(y)|^b d\lambda(y).$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9 έχουμε

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leqslant \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r}|g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y) \right)^{1/r} \left(\int |f(x-y)|^{ap_1} d\lambda(y) \right)^{1/p_1} \\ &\qquad \times \left(\int |g(y)|^{bp_2} d\lambda(y) \right)^{1/p_2} \\ &= \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r}|g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y) \right)^{1/r} \|f\|_{ap_1}^a \|g\|_{bp_2}^b. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-a)r = p$ και $(1-b)r = q$. Υψώνοντας στην r και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|f * g\|_r^r &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \left[\int \left(\int |f(x-y)|^p d\lambda(x) \right) |g(y)|^q d\lambda(y) \right] \\ &\leqslant \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \|f\|_p^p \|g\|_q^q. \end{aligned}$$

Όμως, $ap_1 = p$ και $bp_2 = q$. Άρα,

$$\|f * g\|_r^r \leqslant \|f\|_p^{p+ar} \|g\|_q^{q+br} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r,$$

δηλαδή, $\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

21. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geqslant 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$\lambda(\{x \in E : |f(x)| \geqslant t\}) \leqslant \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(E)$ για κάθε $1 \leqslant r < p$.

Υπόδειξη. Έστω $q \leqslant r < p$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|^r \, d\lambda(x) &= \int_0^\infty rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t) \\ &+ \int_1^\infty rt^{r-1}\lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\})\, d\lambda(t) \\ &\leqslant \int_0^1 rt^{r-1}\lambda(E)\, d\lambda(t) + \int_1^\infty rt^{r-1}\frac{c}{t^p}\, d\lambda(t) \\ &= \lambda(E)\int_0^1 rt^{r-1} d\lambda(t) + Cr\int_1^\infty t^{r-p-1}\, d\lambda(t) \\ &= \lambda(E) + \frac{Cr}{p-r} < \infty,\end{aligned}$$

διότι

$$\int_1^\infty t^{r-p-1}\, d\lambda(t) = \lim_{M\to\infty}\left(\frac{M^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p}\right) = \frac{1}{p-r},$$

αφού $r - p < 0$.

Έπεται ότι $f \in L_r(E)$.

22. *Έστω $r > 1$ και $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leqslant M$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο $(0,1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leqslant p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \to 0$.*

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou,

$$\int_0^1 |f|^r \, d\lambda \leqslant \liminf \int_0^1 |f_n|^r \, d\lambda \leqslant M^r,$$

διότι $\|f\|_r \leqslant m$ για κάθε n. Έπεται ότι

$$\int_0^1 |f_n - f|^r \, d\lambda \leqslant \int_0^1 2^r(|f_n|^r + |f|^r)\, d\lambda \leqslant 2^{r+1}M^r.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \to f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0,1)$ με $\lambda(E) > 1-\delta$, τέτοιο ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E. Για τυχόν $1 \leqslant p < r$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda &= \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \int_{E^c} |f_n - f|^p \, d\lambda \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + [\lambda(E^c)]^{1-\frac{p}{r}}\left(\int_{E^c} |f_n - f|^r\right)^{\frac{p}{r}} \\ &< \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}}\left(\int_0^1 |f_n - f|^r\right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}}2^{r+1}M^r.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ για κάθε $n \geqslant 0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p \, d\lambda \leqslant \int_E |f_n - f|^p \, d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_p \to 0$.

23. *Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$\phi_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\|\phi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$ και $\|\phi_h(f) - f\|_2 \to 0$ όταν $h \to 0^+$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, d\lambda(t) \right|^2 &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \left(\int_{x-h}^{x+h} \mathbf{1}^2 \, d\lambda(t) \right) \\
&= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) \cdot (2h) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\|\phi_h(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) \, d\lambda(t) \right|^2 d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) \, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t) f^2(t) \, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[t-h, t+h](x) \, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t)(2h) \, d\lambda(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \, d\lambda(t) = \|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|\phi_h(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε πρώτα ότι αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε $\phi_h(g) \to g$ ομοιόμορφα καθώς το $h \to 0$ και $\|\phi_h(g)-g\|_2 \to 0$ αφού $\phi_h(g)-g \equiv 0$ έξω από κάποιο κλειστό διάστημα (αν π.χ. $0 < h < 1$). Κατόπιν, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε g συνεχή, με συμπαγή φορέα, ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $\phi_h(f-g) = \phi_h(f) - \phi_h(g)$, και χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα γράφουμε

$$\begin{aligned}\|\phi_h(f) - f\|_2 &\leqslant \|\phi_h(f) - \phi_h(g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\ &= \|\phi_h(f-g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\ &\leqslant \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\|g - f\|_2 < \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 \leqslant \lim_{h\to 0^+} \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{h\to 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 = 0,$$

δηλαδή $\|\phi_h(f) - f\|_2 \to 0$.

24. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι $n \cdot \big(\chi_E * \chi_{[0,1/n]}\big) \to \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\chi_E(x) = n \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x)\chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z).$$

Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned}|n(\chi_E * \chi_{[0,1/n]})(x) - \chi_E(x)| &= \left| n \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(x)]\chi_{[0,1/n]}(z)\, d\lambda(z) \right| \\ &\leqslant \frac{1}{1/n} \int_{[0,1/n]} |\chi_E(x-z) - \chi_E(x)| d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{1/n} \int_{[x-1/n,x]} |\chi_E(t) - \chi_E(x)| d\lambda(t) \to \chi_E(x)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathrm{Leb}(\chi_E)$, δηλαδή σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

25. *Έστω $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $g \notin L^\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(A_n) > 0$, όπου $A_n = \{x : |g(x)| \geqslant n\}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \mathrm{sign}(g(x))\chi_{A_n}(x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x),$$

και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi, ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\,d\lambda(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\,d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\,d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Όμως,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)|g(x)|\,d\lambda(x) \\ &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} n\frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x)\,d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{1}{n^2\lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

26. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $f \in L_p[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f)\chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f\,d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x) - 2^n a_{n,k}(f)|^p \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (f(x) - f(y))\, d\lambda(y) \right|^p d\lambda(x) \\
ls & \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \cdot 2^{-np/q} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p \, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{n} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} 2^p (|f(x)|^p + |f(y)|^p) \, d\lambda(y)\, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^n 2^p \cdot 2\lambda(J_{n,k}) \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \\
&= 2^{p+1} \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p \, d\lambda(x) \\
&= 2^{p+1} \|f\|_p^p \leqslant 4^p \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|f - f_n\|_p \leqslant 4\|f\|_p$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν η g είναι συνεχής και αν ορίσουμε αντίστοιχα τις g_n, τότε $\|g - g_n\|_p \to 0$. Πράγματι, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in [0, 1]$ και $|x - y| \leqslant \delta$ να έχουμε $|g(x) - g(y)| \leqslant \varepsilon$. Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $1/2^{n_0} \leqslant \delta$, και για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|g-g_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |g(x) - 2^n a_{n,k}(g)|^p \, d\lambda(x) \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (g(x)-g(y))\, d\lambda(y) \right|^p \, d\lambda(x) \\
&ls \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |g(x)-g(y)|^p \, d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) d\lambda(x) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \lambda(J_{n,k}) \varepsilon^p \, 2^{-np/q} \, d\lambda(x) \\
&= 2^n 2^{np} (2^{-n})^2 \varepsilon^p \, 2^{-np/q} = \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

δηλαδή $\|g-g_n\|_p \leqslant \varepsilon$.

Θεωρούμε τώρα $f \in L_p[0,1]$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε συνεχή g με $\|f-g\|_p \leqslant \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι $a_{k,n}(f-g) = a_{k,n}(f) - a_{k,n}(g)$, άρα $(f-g)_n = f_n - g_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|f-f_n\|_p &\leqslant \|f-g\|_p + \|g-g_n\|_p + \|g_n - f_n\|_p \\
&\leqslant \|f-g\|_p + \|g-g_n\|_p + \|(g_n-f_n)-(g-f)\|_p + \|g-f\|_p \\
&= \|f-g\|_p + \|g-g_n\|_p + \|(g-f)_n - (g-f)\|_p + \|g-f\|_p \\
&\leqslant \|f-g\|_p + \|g-g_n\|_p + 4\|g-f\|_p + \|g-f\|_p \\
&\leqslant 6\varepsilon + \|g-g_n\|_p.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \|f-f_n\|_p \leqslant \lim_{n\to\infty} \|g-g_n\|_p + 6\varepsilon = 6\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{n\to\infty} \|f-f_n\|_p = 0,$$

δηλαδή $\|f-f_n\|_p \to 0$.

27. *Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L_p[0,\infty)$. Δείξτε ότι*

$$\left| \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) \right| \leqslant \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t)\, d\lambda(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $x > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| &\leqslant \int_0^x |f(t)|\,d\lambda(t) = \int_0^\infty |f(t)|\chi_{[0,x]}(t)\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \|f\|_p\|\chi_{[0,x]}\|_q = \|f\|_p x^{1/q} = \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\begin{aligned}\|\chi_{[0,x]}\|_q &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}^q\,d\lambda\right)^{1/q}\\ &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}\,d\lambda\right)^{1/q} = [\lambda([0,x])]^{1/q} = x^{1/q}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p = \left(\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιον α, διότι $|f|^p\chi_{[0,\alpha]} \nearrow |f|^p$ καθώς το $\alpha \to \infty$, και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\alpha^\infty |f|^p\,d\lambda = \lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_0^\infty |f|^p\,d\lambda - \int_0^\alpha |f|^p\,d\lambda\right) = 0.$$

Για κάθε $x > \alpha$ μπορούμε να γράψουμε

$$(*)\qquad \frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t).$$

Από την επιλογή του α έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^{1/q}}\int_\alpha^x |f(t)|\,d\lambda(t) &\leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\|\chi_{[\alpha,x]}\|_q\\ &= \frac{(x-\alpha)^{1/q}}{x^{1/q}}\|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p < \|f\chi_{[\alpha,x]}\|_p\\ &\leqslant \|f\chi_{[\alpha,\infty)}\|_p < \varepsilon\end{aligned}$$

για κάθε $x > \alpha$, άρα η $(*)$ δίνει

$$\frac{1}{x^{1/q}}\left|\int_0^x f(t)\,d\lambda(t)\right| \leqslant \frac{1}{x^{1/q}}\int_0^\alpha |f(t)|\,d\lambda(t) + \varepsilon$$

για κάθε $x > \alpha$. Όμως,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^{\alpha} |f(t)|\, d\lambda(t) = 0,$$

άρα

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^{x} f(t)\, d\lambda(t) \right| \leqslant 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^{x} f(t)\, d\lambda(t) \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

28. *Υποθέτουμε ότι* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *για κάθε* $1 \leqslant p < 2$ *και επιπλέον ότι*

$$\sup_{1\leqslant p<2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$ *και*

$$\|f\|_2 = \lim_{p\to 2^-} \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p \, d\lambda \leqslant M^p$$

για κάθε $p \in [1,2)$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} \, d\lambda \leqslant M^{2-1/n}.$$

Από το λήμμα του Fatou και από το γεγονός ότι $|f|^{2-1/n} \to |f|^2$ σχεδόν παντού, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} \, d\lambda \leqslant \liminf M^{2-1/n} = M^2 < \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{p\to 2^-} \|f\|_p = \|f\|_2$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p_n \in [1,2)$ με $p_n \uparrow 2$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \|f\|_{p_n} = \|f\|_2.$$

Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} \, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2 \, d\lambda.$$

Κατόπιν, θα έχουμε

$$\|f\|_{p_n} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n}\, d\lambda\right)^{\frac{1}{p_n}} \to \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$$

διότι $\frac{1}{p_n} \to \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n = |f|^2\chi_{\{|f|<1\}} + |f|^{p_n}\chi_{\{|f|\geqslant 1\}}$ και $g_n = |f|^2\chi_{\{|f|\geqslant 1\}} + |f|^{p_n}\chi_{\{|f|<1\}}$, και παρατηρούμε ότι:

(α) $f_n \leqslant |f|^{p_n} \leqslant g_n$ για κάθε n, άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n}\, d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda.$$

(β) Η (f_n) είναι αύξουσα (διότι η (p_n) είναι αύξουσα) και $f_n \nearrow |f|^2$ σχεδόν παντού, άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda.$$

(γ) Η (g_n) είναι φθίνουσα και $g_n \searrow |f|^2$ σχεδόν παντού. Επίσης, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} g_1\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_1}\, d\lambda \leqslant M^2 + M^{p_1} < \infty,$$

άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την $(g_1 - g_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda.$$

Από τα (α), (β), (γ) και από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n}\, d\lambda \to \int_{\mathbb{R}} |f|^2\, d\lambda.$$

29. *Έστω $f \in L_1[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε*

$$\int_A |f|\, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0,1]$. Δείξτε ότι $f \in L_p[0,1]$ για κάθε $1 \leqslant p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L_2[0,1]$;

Υπόδειξη. Από την υπόθεση και από την ανισότητα Markov, αν $A_t = \{|f| \geqslant t\}$, $t > 0$, έχουμε

$$t\lambda(A_t) \leqslant \int_{A_t} |f|\, d\lambda \leqslant C\sqrt{\lambda(A_t)},$$

δηλαδή
$$\lambda(A_t) \leqslant \frac{C^2}{t^2}.$$
Έστω $1 \leqslant p < 2$. Γράφουμε
$$\begin{aligned}\int_0^1 |f|^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\})\, d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\})\, d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1}\lambda(\{|f| \geq t\})\, d\lambda(t) \\ &\leqslant \int_0^1 pt^{p-1} d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1} + C^2 p \int_1^\infty t^{p-3} d\lambda(t) < \infty\end{aligned}$$
διότι $p - 3 < -1$. Άρα, $f \in L_p([0,1])$.

30. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει*
$$(*) \qquad \int_E \exp\left(f(x)\right)\, d\lambda(x) = 1.$$
όπου $E = supp(f)$. Αποδείξτε ότι $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $\|f\|_p \leqslant Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την $(*)$ αλλά $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = t^p e^{-t}$, $t > 0$. Έχουμε $g'(t) = (pt^{p-1} - t^p)e^{-t}$, άρα η g έχει μέγιστο στο $t_0 = p$. Δηλαδή,
$$t^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} e^t$$
για κάθε $t > 0$. Τότε,
$$\int |f|^p \leqslant \frac{p^p}{e^p} \int \exp(|f(x)|)\, d\lambda(x) = \frac{p^p}{e^p},$$
άρα
$$\|f\|_p \leqslant \frac{1}{e} p.$$
Για το δεύτερο ερώτημα, ένα παράδειγμα μπορεί να είναι η $f(x) = c + \ln\frac{1}{\sqrt{x}}$ στο $(0,1)$, όπου το $c \in \mathbb{R}$ επιλέγεται έτσι ώστε
$$\int_0^1 e^{f(x)} d\lambda(x) = e^c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) = e^c \cdot 2 = 1.$$
Η f δεν είναι φραγμένη, αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

31. *Έστω* $f \in L^1((0,1))$. *Για* $x \in (0,1)$ *ορίζουμε*

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι $g \in L^1((0,1))$ *και*

$$\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g(x)|\, d\lambda(x) &= \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\
&\leqslant \int_0^1 \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t}\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \chi_{(x,1)}(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\})\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 |f(t)|\, d\lambda(t) = \|f\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli. Άρα, $g \in L^1((0,1))$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini και, ακολουθώντας την ίδια πορεία, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)\, d\lambda(x) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \chi_{(x,1)}(t)\, d\lambda(t)\, d\lambda(x) \\
&= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \left(\int_0^1 \chi_{(x,1)}(t)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\})\, d\lambda(t) \\
&= \int_0^1 f(t)\, d\lambda(t) = \int_0^1 f(x)\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

32. *Έστω* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η* $g(x,y) = f(x) - f(y)$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $(0,1) \times (0,1)$, *δείξτε ότι* $f \in L^1(0,1)$.

Υπόδειξη. Αφού $|f(x)| < \infty$ για κάθε $x \in (0,1)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A = \{x \in (0,1) : |f(x)| \leqslant m] \subseteq (0,1)$ να έχει θετικό μέτρο. Θέτουμε $B = \{x \in (0,1) : |(x)| > m\}$. Τότε, αν $(x,y) \in B \times A$, έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \geqslant |f(x)| - |f(y)| \geqslant |f(x)| - m > 0.$$

Από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)\times(0,1)} |f(x)-f(y)|\, d\lambda(x,y) &\geqslant \int_{B\times A} |f(x)-f(y)|\, d\lambda(x,y)\\ &\geqslant \int_{B\times A} (|f(x)| - m)\, d\lambda(x,y)\\ &= \int_B \int_A (|f(x)| - m)\, d\lambda(y)\, d\lambda(x)\\ &= \lambda(A) \int_B (|f(x)| - m)\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_B |f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) < \infty.$$

Αφού $f \leqslant m$ στο A, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)} |f(x)|\, d\lambda(x) = \int_A |f(x)|\, d\lambda(x) + \int_B |f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant m\lambda(A) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B)\\ = m(\lambda(A) + \lambda(B)) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} = m + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

33. *Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) συζυγή εκθέτη q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Αν $f, g : E \to [0,\infty]$ δείξτε ότι*

$$\int fg\, d\lambda \geqslant \left(\int f^p\, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int g^q\, d\lambda\right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f+g)^p\, d\lambda\right)^{1/p} \geqslant \left(\int f^p\, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int g^p\, d\lambda\right)^{1/p}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Holder για τις $(fg)^p$ και g^{-p} με εκθέτες $r = \frac{1}{p}$ και

$s = \frac{1}{1-p}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int f^p \, d\lambda &= \int (fg)^p g^{-p} \, d\lambda \\ &\leqslant \left(\int fg \, d\lambda\right)^p \left(\int (g^{-p})^{\frac{1}{1-p}}\right)^{1-p} \\ &= \left(\int fg \, d\lambda\right)^p \left(\int g^q\right)^{-\frac{p}{q}},\end{aligned}$$

διότι $-\frac{p}{1-p} = q$ και $1 - p = -\frac{p}{q}$ αφού οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Έπεται ότι

$$\left(\int fg \, d\lambda\right)^p \leqslant \left(\int f^p \, d\lambda\right) \left(\int g^q\right)^{\frac{p}{q}},$$

και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη γράφουμε

$$\left(\int f^p \, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \leqslant \int f(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda$$

και

$$\left(\int g^p \, d\lambda\right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \leqslant \int g(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\left[\left(\int f^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda\right)^{1/p}\right] \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} \, d\lambda\right)^{1/q} \\ &\qquad \leqslant \int (f+g)(f+g)^{-(1-p)} \, d\lambda = \int (f+g)^p \, d\lambda.\end{aligned}$$

Αφού $-(1-p)q = p$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\left(\int f^p \, d\lambda\right)^{1/p} + \left(\int g^p \, d\lambda\right)^{1/p} &\leqslant \left(\int (f+g)^p \, d\lambda\right)^{1-1/q} \\ &= \left(\int (f+g)^p \, d\lambda\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

34. *Δείξτε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, τότε ο $L_q[0,1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0,1]$.*

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder βλέπουμε ότι αν $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ τότε $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Άρα, για κάθε $f \in L_q[0,1]$ έχουμε $f \in L_p[0,1]$. Δηλαδή, $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n = \{f \in L_p[0,1] : \|f\|_q \leqslant n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L_q[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L_p[0,1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το F_n είναι $\|\cdot\|_p$−κλειστό. Πράγματι, αν (f_k) είναι μια ακολουθία στο F_n, δηλαδή $\|f_k\|_q \leqslant n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αν $\|f_k - f\|_p \to 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f\|_q \leqslant n$: αφού $f_k \xrightarrow{L_p} f$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\lambda(|f_k - f| > \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-p}\|f_k - f\|_p^p,$$

άρα $f_k \xrightarrow{\lambda} f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_s}) της (f_k) ώστε $f_{k_s} \to f$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι $|f_{k_s}|^q \to |f|^q$ και από το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int |f|^q \, d\lambda \leqslant \liminf_{s\to\infty} \int |f_{k_s}|^q \, d\lambda \leqslant n^q,$$

διότι $\|f_{k_s}\|_q \leqslant n$. Άρα, $f \in F_n$.

(β) Το F_n έχει κενό εσωτερικό: για κάθε $f \in F_n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(f,\varepsilon) = \{g \in L_p[0,1] : \|f - g\|_p < \varepsilon\} \nsubseteq F_n.$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε $f \in F_n$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\alpha \in (1/q, 1/p)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(t) = \frac{\varepsilon(1-\alpha p)^{1/p}}{2t^\alpha},$$

η οποία ανήκει στον $L_p[0,1] \setminus L_q[0,1]$ (ελέγξτε το). Άρα, η συνάρτηση $f + h \in L_p[0,1]$ και μάλιστα $f + h \in B(f,\varepsilon)$ διότι $\|h\|_p = \varepsilon/2$, αλλά $f + h \notin F_n$, αφού $h \notin L_q[0,1]$.

Κεφάλαιο 4

Σειρές Fourier

4.1 Ομάδα Α′

1. *Έστω* $T(x) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{n}(\nu_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ *τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι:*

(α) Αν το T *είναι περιττή συνάρτηση, τότε* $\nu_k = 0$ *για κάθε* $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) Αν το T *είναι άρτια συνάρτηση, τότε* $\mu_k = 0$ *για κάθε* $k = 1, \ldots, n$.

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\nu_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, d\lambda(x).$$

Αφού το T είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx\, d\lambda(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\cos(-ky)\, d\lambda(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-T(y)\cos ky]\, d\lambda(y)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\cos ky\, d\lambda(y) = -\nu_k.\end{aligned}$$

Από την $\nu_k = -\nu_k$ έπεται ότι $\nu_k = 0$. Για $k = 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\, d\lambda(y)\\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\, d\lambda(y) = -\nu_0,\end{aligned}$$

άρα, $\nu_0 = 0$.

(β) Γνωρίζουμε ότι, για κάθε $k = 1, \ldots, n$,

$$\mu_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\, d\lambda(x).$$

Αφού το T είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx\, d\lambda(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(-y)\sin(-ky)\, d\lambda(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[T(y)(-\sin ky)]\, d\lambda(y)\\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(y)\sin ky\, d\lambda(y) = -\mu_k.\end{aligned}$$

Από την $\mu_k = -\mu_k$ έπεται ότι $\mu_k = 0$.

2. *Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Με επαγωγή ως προς k. Έχουμε $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = p_1(\cos x)$, όπου $p_1(t) = 1 - t^2$, πολυώνυμο βαθμού 2.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p_k(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p_k(\cos x)$. Τότε,

$$\sin^{2k+2} x = \sin^{2k} x \cdot \sin^2 x = p_k(\cos x)p_1(\cos x).$$

Παρατηρήστε ότι το πολυώνυμο

$$p_{k+1}(t) = p_k(t)p_1(t) = p_k(t)(1 - t^2)$$

έχει βαθμό $2k + 2$ και $\sin^{2k+2} x = p_{k+1}(\cos x)$.

3. *(α) Δείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.*

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\mu_1 x}, e^{i\mu_2 x}, \ldots, e^{i\mu_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι μ_j είναι θετικοί;

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{Z}$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$t_1 e^{ik_1 x} + \cdots + t_n e^{ik_n x} \equiv 0.$$

Τότε, για κάθε $s = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned}0 &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_s x}\left(\sum_{j=1}^{n} t_j e^{ik_j x}\right) d\lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} t_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} d\lambda(x)\\ &= 2\pi t_s,\end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k_j - k_s)x} d\lambda(x) = 0$ αν $j \neq s$ και 2π αν $j = s$. Έπεται ότι $t_1 = \cdots = t_n = 0$. Αυτό δείχνει ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Χρησιμοποιούμε μόνο το γεγονός ότι οι $\mu_1, \ldots, \mu_n$ είναι διακεκριμένοι. Υποθέτουμε ότι για κάποιους $t_1, \ldots, t_n$ ισχύει

$$t_1 e^{i\mu_1 x} + t_2 e^{i\mu_2 x} + \cdots + t_n e^{i\mu_n x} \equiv 0.$$

Παραγωγίζοντας $n-1$ φορές ως προς x και θέτοντας $x = 0$ παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 + \cdots + t_n &= 0 \\ \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 + \cdots + \mu_n t_n &= 0 \\ \mu_1^2 t_1 + \mu_2^2 t_2 + \cdots + \mu_n^2 t_n &= 0 \\ \cdots\cdots& \\ \mu_1^{n-1} t_1 + \mu_2^{n-1} t_2 + \cdots + \mu_n^{n-1} t_n &= 0. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του συστήματος είναι μη μηδενική (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 0$.

4. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,*

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y-2\pi)\,d\lambda(y) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι $f(y-2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x - 2\pi$ παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)\,d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y+2\pi)\,d\lambda(y) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι $f(y+2\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + a$ παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,d\lambda(x),$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) = \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)$$

από την 2π-περιοδικότητα της f, άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y) &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) + \int_{\pi}^{\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)\\ &= \int_{-\pi+a}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y) + \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(y)\,d\lambda(y)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,d\lambda(y).\end{aligned}$$

5. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 d\lambda(x) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 d\lambda(x) < \varepsilon^2/3.$$

Τότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} &\leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-g(x+t)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &\quad + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)-g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &\quad + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)-g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &\quad + 2\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)-f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2}\\ &< \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t)-g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} + \frac{2\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, λόγω της 2π-περιοδικότητας της $f-g$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-g(x+t)|^2 d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g(x)|^2 d\lambda(x)$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει λοιπόν $t_0 > 0$ ώστε: αν $|t| < t_0$ τότε $|g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, αν $|t| < t_0$ έχουμε

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x+t) - g(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon^2}{9 \cdot 2\pi} d\lambda(x)\right)^{1/2} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} < \varepsilon$$

για κάθε $|t| < t_0$. Άρα,

$$\lim_{t \to 0} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x)\right)^{1/2} = 0,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

6. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:*

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Υπόδειξη. (α) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky} d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky} d\lambda(y) = \widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(β) Κάνοντας την αντικατάσταση $y = -x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-y)e^{-iky} d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (-f(y))e^{-iky} d\lambda(y) = -\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

(γ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
2\pi\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\
&= \int_{0}^{\pi} f(y-\pi)e^{-ik(y-\pi)}d\lambda(y) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\
&= e^{ik\pi}\int_{0}^{\pi} f(y)e^{-iky}d\lambda(y) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\
&= -\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

διότι $f(y-\pi) = f(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ από την υπόθεση, και $e^{ik\pi} = -1$ αν ο k είναι περιττός.

(δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\overline{\widehat{f}(k)} &= \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)e^{-ikx}}d\lambda(x)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}d\lambda(x)\\
&= \widehat{f}(-k).
\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής και $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε από την

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}e^{-ikx}d\lambda(x) = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}d\lambda(x)} = \overline{\widehat{f}(-k)} = \widehat{f}(k)$$

βλέπουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $g = f - \overline{f}$ έχει συντελεστές Fourier

$$\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{\overline{f}}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{f}(k) = 0,$$

συνεπώς $g \equiv 0$. Έπεται ότι $f = \overline{f}$, άρα $f(x) \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε*

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Το γράφημα της τ_a είναι μεταφορά του γραφήματος της f κατά a. Το σημείο $(x, f(x))$ μεταφέρεται στο $(x+a, \tau_a(x+a)) = (x+a, f(x))$. Έχουμε

$$\tau_a(x+2\pi) = f(x-a+2\pi) = f(x-a) = \tau_a(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η τ_a είναι 2π-περιοδική. Τέλος,

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_a}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-a)e^{-ik(x-a)}d\lambda(x)\\ &= e^{-ika}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{-ika}\widehat{f}(k).\end{aligned}$$

8. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

Υπόδειξη. Η g_m έχει περίοδο $2\pi/m$ (άρα και 2π) και το γράφημά της είναι το γράφημα της f συμπιεσμένο: σε ένα διάστημα μήκους 2π «επαναλαμβάνεται» m-φορές. Αν $m \mid k$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(y)e^{-iky/m}$ είναι 2π-περιοδική, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi m}\int_{-\pi m}^{\pi m} f(y)e^{-iky/m}d\lambda(y)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-i(k/m)y}d\lambda(y) = \widehat{f}(k/m).\end{aligned}$$

Αν ο m δεν διαιρεί τον k, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f(my)e^{-iky}$ είναι 2π-περιοδική γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g_m}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(mx)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my+2\pi)e^{-ik(y+2\pi/m)}d\lambda(y)\\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-2\pi/m}^{\pi-2\pi/m} f(my)e^{-iky}d\lambda(y)\\ &= e^{-i2k\pi/m}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(my)e^{-iky}d\lambda(y)\\ &= e^{-i2k\pi/m}\widehat{g_m}(k).\end{aligned}$$

Αφού ο m δεν διαιρεί τον k, έχουμε $e^{-i2k\pi/m} \neq 1$, άρα $\widehat{g_m}(k) = 0$.

9. *Έστω $f, f_n \in L_1(\mathbb{T})$ ($n \in \mathbb{N}$) συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \textit{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. *Δηλαδή, για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$ *ώστε για κάθε* $n \geqslant n_0$ *και για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)e^{-ikx} d\lambda(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f_n(x) - f(x))e^{-ikx} d\lambda(x) \right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, |e^{-ikx}|\, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x) - f(x)|\, d\lambda(x) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

10. *Ορίζουμε* $f(x) = \pi - x$ *αν* $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, *και επεκτείνουμε την* f *σε μια* 2π*-περιοδική συνάρτηση στο* $\mathbb{R}$. *Δείξτε ότι η σειρά Fourier της* f *είναι η*

$$S(f, x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Υπόδειξη. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi, \pi]$. Έχουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x + 2\pi) = -\pi - x$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = -\pi + x = -(\pi - x) = -f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι περιττή στο $[-\pi, \pi]$. Συνεπώς,

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, $a_0(f) = 0$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $b_k(f)$: αφού η $f(x)\sin kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned}
b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin kx\, d\lambda(x)\\
&= \left[-2\frac{(\pi-x)\cos kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}\, d\lambda(x)\\
&= \frac{2\pi}{\pi k} + \left[\frac{2\sin kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{2}{k}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f,x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

11. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f(x) = (\pi - x)^2$ *στο* $[0, 2\pi]$ *και την επεκτείνουμε σε μια* 2π*-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο* $\mathbb{R}$*. Δείξτε ότι*

$$S(f,x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(2\pi)$, άρα η f επεκτείνεται σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση. Είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε την f στο $[-\pi,\pi]$. Έχουμε $f(x) = (\pi - x)^2$ αν $0 < x < \pi$ και $f(x) = f(x+2\pi) = (-\pi - x)^2 = (\pi + x)^2$ αν $-\pi < x < 0$. Παρατηρήστε ότι

$$f(-x) = (\pi - x)^2 = f(x)$$

για κάθε $0 < x < \pi$, δηλαδή η f είναι άρτια στο $[-\pi,\pi]$. Συνεπώς,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για τον $a_0(f)$ γράφουμε

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)^2 d\lambda(x) = \left[\frac{-(\pi - x)^3}{6\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi^3}{6\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $k \geqslant 1$: αφού η $f(x)\cos kx$ είναι άρτια, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, d\lambda(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)^2\cos kx\, d\lambda(x) \\ &= \left[\frac{2(\pi-x)^2\sin kx}{\pi k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2(\pi-x)\sin kx}{k}\, d\lambda(x) \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin kx}{k}\, d\lambda(x) \\ &= \left[-\frac{4(\pi-x)\cos kx}{\pi k^2}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k^2} \\ &= \frac{4\pi}{\pi k^2} = \frac{4}{k^2}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$S(f,x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f)| + |b_k(f)|) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < +\infty,$$

η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$f(0) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

απ¨ όπου παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

12. *Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \textit{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Κάνοντας την αντικατάσταση $y = x + \pi/k$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx-\pi)\,d\lambda(x) \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,d\lambda(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-\pi/k)\cos(kx)\,d\lambda(x), \end{aligned}$$

λόγω της 2π-περιοδικότητας της f. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-\pi/k)]\cos(kx)\,d\lambda(x),$$

και χρησιμοποιώντας την υπόθεση παίρνουμε

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-\pi/k)|\,|\cos(kx)|\,d\lambda(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} M|\pi/k|^{\alpha} d\lambda(x) = \frac{C}{k^{\alpha}},$$

όπου $C = M\pi^{\alpha}$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|b_k(f)| \leqslant C/k^{\alpha}$.

13. *Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0) = 0$. Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(kx)\,d\lambda(x) \\ &= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k} + \frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(kx)\,d\lambda(x) \\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - \frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,d\lambda(x) \\ &= i\frac{(-1)^k\pi}{k} - i\frac{(-1)^k\pi}{k} + \frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2i[(-1)^k - 1]}{\pi k^3}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{-ikx}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}(e^{ikx}-e^{-ikx})\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin((2k+1)x),\end{aligned}$$

διότι $(-1)^k-1=0$ αν ο k είναι άρτιος, και

$$2i[(-1)^k-1](e^{i(2k+1)x}-e^{-i(2k+1)x}) = -4i(2i\sin((2k+1)x)) = 8\sin((2k+1)x).$$

14. *Έστω $0<\delta<\pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με*

$$f(x)=\begin{cases}1-\frac{|x|}{\delta} & \textit{αν } |x|\leqslant\delta\\ 0 & \textit{αν } \delta\leqslant|x|\leqslant\pi\end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x)=\frac{\delta}{2\pi}+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta}\cos kx.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)d\lambda(x)=\frac{\delta}{2\pi}.$$

Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(1-\frac{|x|}{\delta}\right)\cos(kx)\,d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(1-\frac{x}{\delta}\right)\cos(kx)\,d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}-\frac{x\sin(kx)}{\delta k}-\frac{\cos(kx)}{\delta k^2}\right]_0^{\delta}\\ &= \frac{\sin(k\delta)}{\pi k}-\frac{\delta\sin(k\delta)}{\pi\delta k}+\frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}\\ &= \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$
\begin{aligned}
S(f,x) &= \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} e^{ikx} = \frac{\delta}{2\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx}) \\
&= \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} \cos(kx).
\end{aligned}
$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\delta)}{\pi\delta k^2} < +\infty,$$

έχουμε $f(x) = S(f,x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. *Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[-\pi,\pi]$ ορίζεται από την*

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \textit{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}+\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}e^{ikx} &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}(e^{ikx}+e^{-ikx})\\ &= \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^k-1]}{\pi k^2}\cos(kx)\\ &= \frac{\pi}{2}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1)x).\end{aligned}$$

Αφού

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \frac{\pi}{2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2}<+\infty,$$

έχουμε $f(x)=S(f,x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$0=f(0)=\frac{\pi}{2}-4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\pi(2k+1)^2},$$

δηλαδή

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}.$$

16. *Έστω* $f\in L_1(\mathbb{T})$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x)|\,d\lambda(x)=0.$$

(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,d\lambda(x)=-\int_0^{2\pi}f\big(x+\frac{\pi}{n}\big)\sin nx\,d\lambda(x).$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,d\lambda(x)=0.$$

Υπόδειξη. (α). Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής. Εφόσον, είναι και 2π-περιοδική θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν $\varepsilon > 0$ τυχόν, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, αν $0 < |t| < \delta$ τότε,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(t)|\, d\lambda(x) < \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon\, dt = 2\pi\varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι συνεχής. Στην γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και f_ε συνεχή 2π-περιοδική ώστε $\int_{-\pi}^{\pi} |f - f_\varepsilon| < \varepsilon$. Τότε, με χρήση της τριγωνικής ανισότητας παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, d\lambda(x) &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f_\varepsilon(x+t)|\, d\lambda(x) \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)|\, d\lambda(x) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x) - f(x)|\, d\lambda(x) \\ &= 2\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\, d\lambda(x) + \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)|\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι,

$$\limsup_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|\, d\lambda(x) \leqslant 2\varepsilon + \limsup_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f_\varepsilon(x+t) - f_\varepsilon(x)|\, d\lambda(x) = 2\varepsilon.$$

Καθώς, το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν το ζητούμενο έπεται.

(β) Με την αλλαγή μεταβλητής $x = y + \pi/n$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, d\lambda(x) &= \int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f\left(y + \frac{\pi}{n}\right)\sin(\pi + ny)\, d\lambda(y) \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\sin(nx)\, d\lambda(x).\end{aligned}$$

Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\, d\lambda(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left|f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{n}\right)\right|\, d\lambda(x).$$

Τώρα, το συμπέρασμα έπεται από το (α) για $t = \pi/n \to 0$.

17. *(α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της* $\cos x$ *από το* $(0,\pi)$ *στο* $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ *δείξτε ότι*

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)$ δείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0<x<\pi$.

Υπόδειξη. (α) Επεκτείνουμε την $f:[\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x\pi\\ 0, & x=-\pi,0,\pi\\ -\cos x, & -\pi<x<0\end{cases}$ σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση σ' όλο το $\mathbb{R}$. Επομένως, είναι $a_k(f)=0$, αφού f περιττή και

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, d\lambda(x)\\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos x\sin kx\, d\lambda(x)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\sin(k-1)x+\sin(k+1)x]\, d\lambda(x). \end{aligned}$$

Αν ο k είναι περιττός, τότε βλέπουμε εύκολα ότι $b_k=0$ ενώ αν ο $k=2s$ τότε

$$b_{2s}(f) = \frac{8}{\pi}\frac{s}{4s^2-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$S(f,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Αφού η σειρά $S(f)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και η $f|_{(0,\pi)}$ είναι συνεχής, έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι αν $0<x<\pi$ τότε

$$\cos x = f|_{(0,\pi)}(x) = S(f,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}.$$

Για το (β) δουλεύουμε ανάλογα.

4.2 Ομάδα Β΄

18. *(α) Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ θέτουμε*

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k}\sin jx.$$

Δείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, δείξτε ότι

$$\left|\sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx\right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geqslant k > m \geqslant 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

Υπόδειξη. (α) Έστω $k > m$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} A_k(x) - A_m(x) &= \sum_{j=m+1}^{k} \sin(jx) = \frac{1}{\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \sin(x/2)\sin(jx) \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{j=m+1}^{k} \big[\cos\big(j-1/2\big)x - \cos\big(j+1/2\big)x\big] \\ &= \frac{1}{2\sin(x/2)} \big[\cos\big(m+1/2\big)x - \cos\big(k+1/2\big)x\big]. \end{aligned}$$

Από την $|\cos t| \leqslant 1$ έπεται ότι

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{2}{2|\sin(x/2)|} = \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε άθροιση κατά μέρη: είναι

$$\begin{aligned} \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin(jx) &= \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j (A_j(x) - A_{j-1}(x)) \\ &= \lambda_k A_k(x) - \lambda_{m+1} A_m(x) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) A_j(x) \\ &= \lambda_k (A_k(x) - A_m(x)) + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})(A_j(x) - A_m(x)), \end{aligned}$$

διότι

$$\lambda_{m+1} A_m(x) = \left[\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})\right] A_m(x).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=m+1}^{k}\lambda_j\sin(jx)\right| &\leqslant \lambda_k|A_k(x)-A_m(x)| + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})|A_j(x)-A_m(x)| \\ &\leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}\left(\lambda_k + \sum_{j=m+1}^{k-1}(\lambda_j-\lambda_{j+1})\right) \\ &= \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}.\end{aligned}$$

19. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ και $k\lambda_k \leqslant M$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, δείξτε ότι*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \sin kx\right| \leqslant (\pi+1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < x < \pi$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\sin kx = \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin kx + \sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx,$$

όπου $m = \min\{n, \lfloor \pi/x \rfloor\}$. Για το πρώτο άθροισμα έχουμε

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\sin(kx) \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{M\sin kx}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{Mkx}{k} = Mmx \leqslant M\pi.$$

Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την προηγούμενη άσκηση: είναι

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\lambda_k\sin kx\right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{\sin(x/2)} \leqslant \frac{M}{(m+1)\sin(x/2)} \leqslant M,$$

διότι $m+1 > \pi/x$, άρα

$$(m+1)\sin(x/2) \geqslant \frac{\pi}{x}\frac{2x}{2\pi} = 1$$

από την $\sin y \geqslant \frac{2y}{\pi}$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

20. *(Λήμμα του Stečkin). Έστω $f(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k\cos kx + \mu_k\sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$f(x_0) = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Δείξτε ότι: αν $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ *τότε*

$$f(x_0+t) \geqslant \|f\|_\infty \cos(nt).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $A = \|f\|_\infty$ και ορίζουμε

$$g(t) = f(x_0+t) - A\cos(nt).$$

Αν υποθέσουμε ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, τότε υπάρχει $0 < |s| \leqslant \frac{\pi}{n}$ ώστε $g(s) < 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 < t_0 < \frac{\pi}{n}$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, 2n$ θέτουμε $t_k = \frac{k\pi}{n}$ και έχουμε

$$g(t_k) = f(x_0+t_k) - A\cos(k\pi).$$

Παρατηρούμε ότι $f(t_0) = f(x_0) = 0$, $f(s) < 0$ και για κάθε $k = 1, \ldots, 2n$ έχουμε $g(t_k) \geqslant 0$ αν ο k είναι περιττός και $g(t_k) \leqslant 0$ αν ο k είναι άρτιος. Έπεται ότι η $g(y) = 0$ έχει τουλάχιστον $2n+1$ ρίζες στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Αυτό είναι άτοπο: ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ $2n$ ρίζες στο $[0, 2\pi)$ (εξηγήστε γιατί: η διάσταση του χώρου αυτών των πολυωνύμων είναι $2n+1$).

21. *(Ανισότητα του Bernstein). Έστω* $f(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ *τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι*

$$\|f'\|_\infty \leqslant n\|f\|_\infty.$$

Υπόδειξη. Παίρνοντας αν χρειαστεί το $-f$ στη θέση του f, θεωρούμε x_0 τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \|f'\|_\infty.$$

Παρατηρήστε ότι $f(x_0) = 0$. Από την προηγούμενη άσκηση, για κάθε $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ έχουμε

$$f'(x_0+t) \geqslant \|f'\|_\infty \cos(nt).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} f\left(x_0 + \frac{\pi}{2n}\right) - f\left(x_0 - \frac{\pi}{2n}\right) &= \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} f'(x_0+t)\,d\lambda(t) \geqslant \|f'\|_\infty \int_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} \cos(nt)\,d\lambda(t) \\ &= \|f'\|_\infty \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2n}} = \frac{2}{n}\|f'\|_\infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|f'\|_\infty &\leqslant \frac{n}{2}\left(\left|f\left(x_0+\frac{\pi}{2n}\right)\right|+\left|f\left(x_0-\frac{\pi}{2n}\right)\right|\right)\\ &\leqslant \frac{n}{2}\cdot 2\|f\|_\infty = n\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

22. *Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x)=\chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x)=1$ αν $x\in[a,b]$ και $f(x)=0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η*

$$S(f,x)=\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}\,e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S(f)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x\in\mathbb{R}$. Βρείτε τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f,x)$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,d\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b d\lambda(x)=\frac{b-a}{2\pi}.$$

Αν $k\neq 0$, έχουμε

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-ikx}d\lambda(x)=\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{ik}.$$

Έπεται ότι

$$S(f,x)=\widehat{f}(0)+\sum_{k\neq 0}\widehat{f}(k)e^{ikx}=\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{e^{-ika}-e^{-ikb}}{2\pi ik}\,e^{ikx}.$$

Η $S(f,x)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x\in\mathbb{R}$. Θα έπρεπε να συγκλίνει η σειρά

$$\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{|e^{-ika}-e^{-ikb}|}{2\pi|k|}=\frac{b-a}{2\pi}+\sum_{k\neq 0}\frac{|e^{ik(b-a)}-1|}{2\pi|k|}.$$

Η σειρά αυτή αποκλίνει: αν ο $\frac{b-a}{2\pi}$ είναι ρητός τότε η ακολουθία $\{e^{ik(b-a)}\}_k$ παίρνει πεπερασμένες το πλήθος τιμές, όλες διαφορετικές από 1, ενώ αν ο $\frac{b-a}{2\pi}$ είναι άρρητος τότε η ακολουθία $\{e^{ik(b-a)}\}_k$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στη μοναδιαία περιφέρεια, και αυτό συνεπάγεται ότι το πλήθος των $|k|\leqslant N$ για τους οποίους $|e^{ik(b-a)}-1|\geqslant \frac{1}{2}$ είναι μεγαλύτερο από c_1N για κάποια σταθερά $c_1>0$, άρα

$$\sum_{k=-N}^{N}\frac{|e^{ik(b-a)}-1|}{2\pi|k|}\geqslant c_2\log N\to\infty.$$

23. *Έστω* $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ *τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το* T *παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο* Q *ώστε*

$$T(x) = |Q(x)|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $c_n \neq 0$. Παρατηρήστε ότι $c_{-k} = \overline{c_k}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και ότι

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x)\, d\lambda(x) > 0.$$

Θεωρούμε το μιγαδικό πολυώνυμο

$$P(z) = z^n \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = c_{-n} + c_{1-n} z + \cdots + c_n z^{2n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\overline{P(1/\overline{z}} &= \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k \overline{z}^{-n-k}} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c_k} z^{-n-k} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} c_{-k} z^{-n-k} = \sum_{m=-n}^{n} c_m z^{m-n} = z^{-2n} \sum_{m=-n}^{n} c_m z^{m+n} \\
&= z^{-2n} P(z).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $P(z) = 0$ αν και μόνο αν $P(1/\overline{z}) = 0$. Επίσης, $P(0) \neq 0$ και $P(w) \neq 0$ για κάθε $w \in \mathbb{T}$, διότι αν $w = e^{ix}$ τότε $P(w) = e^{inx} T(x) \neq 0$ από την υπόθεση ότι το T δεν μηδενίζεται. Άρα, οι ρίζες του P είναι n ζεύγη $z_k, 1/\overline{z_k}$ με $0 < |z_k| < 1$. ($k = 1, \ldots, n$). Δηλαδή, υπάρχει $a \in \mathbb{C}$ ώστε

$$P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - z_k) \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}} \right).$$

Θέτουμε $P_1(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
P_2(z) := \prod_{k=1}^{n} \left(z - \frac{1}{\overline{z_k}} \right) &= \frac{1}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} z \left(z_k - \frac{1}{z} \right) \\
&= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} \prod_{k=1}^{n} z \left(\frac{1}{z} - z_k \right) \\
&= \frac{(-1)^n z^n}{\overline{z_1} \cdots \overline{z_n}} P_1 \left(\frac{1}{z} \right).
\end{aligned}$$

Άρα, αν $|z| = 1$ έχουμε

$$|P_2(z)| = |\overline{P_2(z)}| = \left| \frac{(-1)^n \overline{z}^n}{z_1 \cdots z_n} P_1\left(\frac{1}{\overline{z}}\right) \right| = \frac{|P_1(z)|}{|z_1 \cdots z_n|}.$$

Τώρα γράφουμε

$$T(x) = |T(x)| = |e^{-inx} P(e^{ix})| = |a P_1(e^{ix}) P_2(e^{ix})| = |a| \cdot |P_1(e^{ix})| \cdot \frac{|P_1(e^{ix})|}{|z_1 \cdots z_n|},$$

και αν ορίσουμε

$$Q(x) = \left(\frac{|a|}{|z_1 \cdots z_n|} \right)^{1/2} P_1(e^{ix})$$

έχουμε

$$T(x) = |Q(x)|^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

24. *(α) Έστω $0 < \delta < \pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$,*

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx \right| \leqslant \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \qquad \textit{και} \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} \sin kx \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k \to 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0, 2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$, όπου $0 < \delta < \pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, 2\pi)$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $A_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx$ και χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2 \sin a \cos b = \sin(a - b) + \sin(a + b)$ ως εξής:

$$2 \sin(x/2) A_n(x) = \sin(x/2) + \sum_{k=1}^{n} \left[\sin\left(\frac{x}{2} - kx\right) + \sin\left(\frac{x}{2} + kx\right) \right] = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x.$$

Για κάθε $x \in (0, 2\pi)$ είναι $\sin(x/2) > 0$, άρα

$$A_n(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin(x/2)}.$$

Αν $0 < \delta < \pi$ τότε για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ ισχύει $\sin(x/2) \geqslant \sin(\delta/2)$. Επομένως, έχουμε $|A_n(x)| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}$. Για το άλλο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $2 \sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$ και εργαζόμαστε ανάλογα.

(β) Για να δείξουμε την κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy για σειρές πραγματικών αριθμών και συναρτήσεων αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Dirichlet: Αν (ε_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών όρων με $\varepsilon_n \to 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ σειρά πραγματικών αριθμών με φραγμένα μερικά αθροίσματα, δηλαδή υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε $|u_1 + \cdots + u_n| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n$ συγκλίνει.

Τώρα, το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συγκλίνουσα είναι άμεση συνέπεια του (α) σε συνδυασμό με το κριτήριο Dirichlet. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι η υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n αρκεί να αντικατασταθεί από την υπόθεση των ομοιόμορφα φραγμένων αθροισμάτων ως προς n και ως προς $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Μια άλλη, πιο άμεση απόδειξη (η οποία όμως ακολουθεί την ίδια ιδέα) θα ήταν η εξής: Έστω $x \in (0, 2\pi)$ τυχόν αλλά σταθερό. Θεωρούμε την σειρά αριθμών $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$. Παρατηρήστε από το (α) ότι $\cos kx = A_k(k) - A_{k-1}(x)$ με $A_0(x) \equiv \frac{1}{2}$. Τότε, αν $1 \leqslant n < m$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k (A_k(x) - A_{k-1}(x))\right| \\ &= \left|-t_{n+1}A_n(x) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})A_k(x) + t_m A_m(x)\right| \\ &\leqslant t_{n+1}|A_n(x)| + \sum_{k=n+1}^{m-1} (t_k - t_{k+1})|A_k(x)| + t_m|A_m(x)| \\ &\leqslant 2t_{n+1} \max_{n+1 \leqslant k \leqslant m} |A_k(x)| \leqslant \frac{t_{n+1}}{\sin(x/2)},\end{aligned}$$

από το (α). Καθώς, $t_k \to 0$ έπεται από το κριτήριο του Cauchy ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει. Παρατηρήστε ότι αν $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$, τότε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} t_k \cos kx\right| \leqslant \frac{t_n}{\sin(\delta/2)},$$

ομοιόμορφα ως προς x, επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Αφού έχουμε σειρά συνεχών συναρτήσεων, έπεται ότι άθροισμά της είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\delta, 2\pi - \delta]$. Επειδή το $\delta \in (0, \pi)$ ήταν τυχόν, έχουμε ότι η συνάρτηση $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ είναι συνεχής. Για την άλλη σειρά εργαζόμαστε ανάλογα.

25. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $g \in L_\infty(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)\, d\lambda(x) = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Τότε, ολοκληρώνουμε την απόδειξη ως εξής: αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p_ε τέτοιο ώστε $\|f - p_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x) - p_\varepsilon(x)|\,|g(x)|\,d\lambda(x) \\
&\qquad + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right| + |\widehat{p_\varepsilon}(0) - \widehat{f}(0)|\,|\widehat{g}(0)| \\
&\qquad \leqslant \|f - p_\varepsilon\|_1\|g\|_\infty + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right| + \|p_\varepsilon - f\|_1|\widehat{g}(0)| \\
&\qquad \leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|) + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} p_\varepsilon(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{p_\varepsilon}(0)\widehat{g}(0)\right|,
\end{aligned}$$

και αφήνοντας το $n \to \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| \leqslant \varepsilon(\|g\|_\infty + |\widehat{g}(0)|).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)g(nx)d\lambda(x) - \widehat{f}(0)\widehat{g}(0)\right| = 0.$$

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, και λόγω γραμμικότητας του ζητούμενου ως προς f μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) = e^{ikx}$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Αν $k = 0$ είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(nx)d\lambda(x) &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi}\int_{-n\pi}^{n\pi} g(y)d\lambda(y) = \frac{1}{n}\cdot n\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(y)d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g(y)d\lambda(y) = \widehat{g}(0)
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, λόγω της περιοδικότητας της g. Μένει να δείξουμε ότι, για κάθε $k \neq 0$,

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} e^{ikx}g(nx)d\lambda(x) = 0.$$

Παρόμοιο επιχείρημα με το αρχικό δείχνει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι η g είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Σε αυτήν την περίπτωση ελέγχουμε την $(*)$ με απλές πράξεις.

Κεφάλαιο 5

Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

5.1 Ομάδα Α΄

1. *Έστω* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε* $s_n = c_1 + \cdots + c_n$*. Δείξτε ότι:*

(α) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *συγκλίνει στον* s*, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον* s*.*

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ *είναι Cesàro αθροίσιμη στον* s*, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον* s*.*

Υπόδειξη. (α) Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Θέτοντας $s_0 = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= \sum_{k=1}^{\infty}(s_k - s_{k-1})r^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k - r\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.\end{aligned}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $s_n = c_1 + \cdots + c_n \to 0$. Επειδή η (s_k) είναι συγκλίνουσα είναι και φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_k| \leqslant M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s_k \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|s_k| < \varepsilon$. Παίρνοντας απόλυτες τιμές στην $(*)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| &\leqslant (1-r)\sum_{k=\text{‘}}^{k_0} |s_k| r^k + (1-r)\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |s_k| r^k \\ &\leqslant (1-r) M r \frac{1-r^{k_0}}{1-r} + \varepsilon(1-r)\sum_{k=1}^{\infty} r^k \\ &\leqslant M(1-r^{k_0}) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Αν επιλέξουμε $r_0 \in (0,1)$ ώστε $M(1-r_0^{k_0}) < \varepsilon$, τότε για κάθε $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k\right| < 2\varepsilon,$$

το οποίο δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to 0$ καθώς $r \to 1^-$.

Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας την $(*)$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} (s_k - s) r^k + (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) r^k + (1-r) s \cdot \frac{r}{1-r} \\ &\to 0 + s = s.\end{aligned}$$

Για το (β): αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$(**) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

Έχουμε ότι $\sigma_{k+1} = \frac{s_0+s_1+\cdots+s_k}{k+1}$. Άρα, θέτοντας $\sigma_0 = 0$ έχουμε $s_k = (k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k$ για

$k = 0, 1, \ldots$. Τότε, χρησιμοποιώντας και την πρώτη ταυτότητα από το (α), έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty} s_k r^k \\ &= (1-r)\sum_{k=0}^{\infty}[(k+1)\sigma_{k+1} - k\sigma_k]r^k \\ &= (1-r)\left[\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k\right] \\ &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k \\ &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - s)kr^k + (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} skr^k \\ &= (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty}(\sigma_k - s)kr^k + rs,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, έχουμε $\sigma_k - s \to 0$. Ειδικότερα, η $(\sigma_k - s)$ είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $B > 0$ ώστε $|\sigma_k - s| \leqslant B$ για κάθε k. Αφού $\sigma_k - s \to 0$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $k > k_0$ τότε $|\sigma_k - s| < \varepsilon$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k - s\right| &\leqslant (1-r)^2 \sum_{k=1}^{k_0} |\sigma_k - s|kr^k + (1-r)^2 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |\sigma_k - s|kr^k + |s - rs| \\ &\leqslant (1-r)k_0 B(1 - r^{k_0}) + \varepsilon r + (1-r)|s|.\end{aligned}$$

Έστω $r_0 \in (0,1)$ ώστε $Bk_0(1 - r_0^{k_0}) < \varepsilon$ και $(1 - r_0)|s| < \varepsilon$. Τότε, αν $r_0 < r < 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k\right| \leqslant \varepsilon + \varepsilon r + (1-r)|s| < 3\varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \to s$ καθώς $r \to 1^-$.

2. *Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι $s_n(f) = (f * D_n)$ και ότι η πράξη $*$ της συνέλιξης είναι προσεταιριστική και μεταθετική:

$$s_n(f) * g = (f * D_n) * g = f * (D_n * g) = f * (g * D_n) = f * s_n(g).$$

Όμοια δείχνουμε και την άλλη ισότητα.

3. *Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,*

$$\lim_{\delta\to 0} \|K_\delta\|_p = \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_\delta(x)|^p d\lambda(x) \right)^{1/p} = +\infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Για κάθε $0 < \eta < \pi$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\eta = \chi_{[-\eta,\eta]}$. Από την ανισότητα Holder παίρνουμε

$$(\eta/\pi)^{1/q} \|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_\eta(t)|^q \, d\lambda(t) \right)^{1/q} \|K_\delta\|_p \geqslant \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(x) g_\eta(x) \, d\lambda(x) \right|.$$

Από την άλλη πλευρά, από τις ιδιότητες των καλών πυρήνων παίρνουμε

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_\delta(x) g_\eta(x) \, d\lambda(x) \right| = \left| 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\eta<|x|\leqslant\pi} K_\delta(x) \, d\lambda(x) \right|.$$

Έστω $M > 0$. Υπάρχει $\eta \in (0, \pi)$ ώστε $(\pi/\eta)^{1/q} > 2M$. Επιπλέον, υπάρχει $\delta_0 > 0$ ώστε αν $0 < \delta < \delta_0$ τότε $\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\eta<|x|\leqslant\pi} K_\delta(x) \, d\lambda(x) \right| < 1/2$ (εξηγήστε γιατί). Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $0 < \delta < \delta_0$ τότε

$$\|K_\delta\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_\delta(x)|^p \, d\lambda(x) \right)^{1/p} > M,$$

το οποίο δείχνει ότι $\|K_\delta\|_p \to +\infty$ καθώς $\delta \to 0$.

4. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

Υπόδειξη. Αν θεωρήσουμε το n-οστό μερικό άθροισμα Cesàro της f τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\sigma_{2n-1}(f,0) = \frac{1}{2n}\sum_{m=0}^{2n-1} s_m(f,0) \geqslant \frac{1}{2n}\sum_{m=n}^{2n-1} s_m(f,0) \geqslant \frac{1}{2}s_n(f,0),$$

διότι $s_m(f,0) = a_0/2 + a_1 + \cdots + a_m$ και $a_k \geqslant 0$ για κάθε k, άρα $s_m(f,0) \geqslant s_n(f,0)$ για κάθε $m = n, n+1, \ldots, 2n-1$. Από την άλλη πλευρά γνωρίζουμε ότι

$$|\sigma_{2n-1}(f,x)| \leqslant \|f * F_{2n-1}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|F_{2n-1}\|_1 = \|f\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^\infty a_n$ είναι άνω φραγμένα:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant 2s_n(f,0) \leqslant 4\|f\|_\infty,$$

που αποδεικνύει τη σύγκλιση της σειράς.

5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την*

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η g είναι 2π-περιοδική, και $g(x) = g(x + 2\sqrt{2}\pi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x-2\sqrt{2}\pi)e^{-ik(x-2\sqrt{2}\pi)}d\lambda(x)\\ &= e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+2\sqrt{2}\pi}^{\pi+2\sqrt{2}\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = e^{ik2\sqrt{2}\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}d\lambda(x)\\ &= e^{ik2\sqrt{2}\pi}\widehat{g}(k).\end{aligned}$$

Αν $k \neq 0$ έχουμε $e^{ik2\sqrt{2}\pi} \neq 1$, άρα $\widehat{g}(k) = 0$. Έπεται ότι $g(x) = \widehat{g}(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι σταθερή. Άρα, και η f είναι σταθερή.

6. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια*

$$f(x-0) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \textit{και} \quad f(x+0) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-}(f * P_r)(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < y < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x-0)| < \varepsilon/2$ και αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x+0)| < \varepsilon/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η P_r είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση με μέση τιμή 1, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f * P_r)(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y) f(x-y)\, d\lambda(y) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y) - f(x+0)]\, d\lambda(y) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y) - f(x-0)]\, d\lambda(y).\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y) - f(x+0)]\, d\lambda(y)\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\, |f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y) \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\, |f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $-\delta < y < 0$ τότε $|f(x-y) - f(x+0)| < \varepsilon/2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\, |f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y) &\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\delta}^{0} P_r(y)\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(y)\, d\lambda(y) = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\, |f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y) &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\, (|f(x-y)| + |f(x+0)|\, d\lambda(y) \\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\, d\lambda(y) \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $r \to 1^-$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, υπάρχει $r_0 \in (0,1)$ ώστε, για κάθε $r_0 \leqslant r < 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(y)\, |f(x-y) - f(x+0)|\, d\lambda(y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(y)[f(x-y) - f(x+0)]\, d\lambda(y) \to 0$$

καθώς το $r \to 1^-$. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(y)[f(x-y) - f(x-0)]\, d\lambda(y) \to 0$$

καθώς το $r \to 1^-$. Προσθέτοντας, παίρνουμε το ζητούμενο.

7. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, d\lambda(t) = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγι- στικού θεωρήματος Weierstrass.

Υπόδειξη. Δείχνουμε ότι η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από τον ορισμό της, κάθε Q_n είναι άρτια, μη αρνητική συνάρτηση και ικανοποιεί την $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)d\lambda(t) = 1$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{\delta\leqslant |t|\leqslant \pi} Q_n(t)d\lambda(t) = 2\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)d\lambda(t) \to 0 \quad \text{όταν } n \to \infty.$$

Έστω $0 < \delta < \pi$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1+\cos t}{2} \leqslant \frac{1+\cos \delta}{2} < 1$ για κάθε $t \in [\delta, \pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)d\lambda(t) \leqslant 2\pi\alpha_n \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\alpha_n \leqslant 4(n+1)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\theta^n = 0$ για $\theta = \frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

Γράφουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} = 2\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n = 2\int_0^{\pi}\cos^{2n}(t/2)d\lambda(t) = 4\int_0^{\pi/2}\cos^{2n} y\, d\lambda(y).$$

Η $f(y) = \cos y$ είναι κοίλη στο $[0, \pi/2]$ και $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 0$. Συνεπώς, $\cos y \geqslant 1 - \frac{2y}{\pi}$ για κάθε $y \in [0, \pi/2]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\frac{2\pi}{\alpha_n} \geqslant 4\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{2y}{\pi}\right)^{2n} d\lambda(y) = 2\pi\int_0^1 (1-s)^{2n}ds = \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Δηλαδή, $\alpha_n \leqslant \frac{2n+1}{2}$.

Αφού η $\{Q_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων, για κάθε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ισχύει $f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε Q_n είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Άρα, οι συναρτήσεις $f * Q_n$ είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα (εξηγήστε γιατί). Έτσι, έχουμε απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε*

$$G_n(x) = F_n(x) \sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leqslant 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

Υπόδειξη. Τα δύο μέλη της ισότητας $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ είναι γραμμικά ως προς T, αρκεί λοιπόν να την επαληθεύσουμε για όλες τις συναρτήσεις $T_k(x) = e^{ikx}$, $|k| \leqslant n$. Έχουμε

$$T_k'(x) = ike^{ikx}$$

και

$$\begin{aligned}
(T_k * G_n)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_k(x-y) G_n(y)\, d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)} F_n(y) \sin(ny)\, d\lambda(y) \\
&= \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-y)} e^{isy} \sin(ny)\, d\lambda(y) \\
&= e^{ikx} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)y} \frac{e^{iny} - e^{-iny}}{2i}\, d\lambda(y) \\
&= \frac{1}{2i} e^{ikx} \sum_{s=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|s|}{n}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{i(s-k+n)y} - e^{i(s-k-n)y}]\, d\lambda(y).
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k+n)y} d\lambda(y) = 0$$

εκτός αν $s = k - n$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k-n)y} d\lambda(y) = 0$$

εκτός αν $s = n + k$. Το πρώτο μπορεί να συμβεί μόνο αν $k > 0$ και το δεύτερο μόνο αν $k < 0$. Συνεπώς, αν $0 < k < n$ έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = \frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n-k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$

Αν $-n < k < -1$, έχουμε

$$(T_k * G_n)(x) = -\frac{1}{2i}e^{ikx}\left(1 - \frac{n+k}{n}\right) = \frac{k}{2ni}e^{ikx} = \frac{-ik}{2n}e^{ikx}.$$

Σε κάθε περίπτωση, αν $k \neq 0$ παίρνουμε

$$(*) \qquad T_k'(x) = -2n(T_k * G_n)(x).$$

Αν πάλι $k = 0$, τα δύο μέλη της $(*)$ είναι ίσα με μηδέν. Έτσι, έχουμε αποδείξει την $T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$ για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n.

Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |T'(x)| &= 2n|(T * G_n)(x)| \leqslant 2n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |T(x-y)|\,|F_n(y)\sin ny|\,d\lambda(y) \\ &\leqslant 2n\|T\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\,d\lambda(y) = 2n\|T\|_\infty. \end{aligned}$$

9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $g_n := s_n(f) - \sigma_{n+1}(f)$. Χρησιμοποιώντας την $\sigma_n = \frac{s_0+\cdots+s_{n-1}}{n}$ και την υπόθεση, θα δείξουμε ότι $g_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |s_n(f,x)-\sigma_n(f,x)| &= \frac{|(s_0-s_n)+(s_1-s_n)+\cdots(s_{n-1}-s_n)|}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k}1\right)(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k|a_k\cos kx+b_k\sin kx|. \end{aligned}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την στοιχειώδη ανισότητα $|a\cos\theta+b\sin\theta|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$ για $a,b\in\mathbb{R}$ και $\theta\in\mathbb{R}$, τότε βρίσκουμε:

$$\|s_n(f)-\sigma_{n+1}(f)\|_\infty\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{a_k^2+b_k^2}\to 0,$$

καθώς $n\to\infty$. Από το θεώρημα του Fejér ξέρουμε $\|f-\sigma_{n+1}(f)\|_\infty\to 0$. Από την τριγωνική ανισότητα

$$\|f-s_n(f)\|_\infty\leqslant\|f-\sigma_{n+1}(f)\|_\infty+\|\sigma_{n+1}(f)-s_n(f)\|_\infty$$

έπεται το ζητούμενο.

10. *Έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T:L_1(\mathbb{T})\to L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g)=f*g$ έχει νόρμα*

$$\|T\|:=\sup\{\|T(g)\|_1:\|g\|_1\leqslant 1\}=\|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $g\in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$\|T(g)\|_1=\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1,$$

άρα ο T είναι φραγμένος τελεστής και $\|T\|\leqslant\|f\|_1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει $\|F_n\|_1=1$, άρα

$$\|T\|\geqslant\|T(F_n)\|_1=\|F_n*g\|_1=\|\sigma_n(g)\|_1.$$

Αφού $\|\sigma_n(g)-g\|_1\to 0$, έχουμε $\|\sigma_n(g)\|_1\to\|g\|_1$. Συνεπώς,

$$\|T\|\geqslant \lim_{n\to\infty}\|\sigma_n(g)\|_1=\|g\|_1.$$

11. *Έστω $f\in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)|\leqslant A$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x\in\mathbb{T}$ ισχύει*

$$|s_n(f,x)|\leqslant\|f\|_\infty+2A.$$

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\sigma_{n+1}(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}\quad\text{και}\quad s_n(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Άρα,

$$s_n(f,x)=\sigma_{n+1}(f,x)+\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Αφού $|k\widehat{f}(k)|\leqslant A$ για κάθε k, έπεται ότι

$$\begin{aligned}|s_n(f,x)| &\leqslant |\sigma_{n+1}(f,x)|+\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k\widehat{f}(k)|}{n+1}|e^{ikx}|\leqslant\|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty+\frac{(2n+1)A}{n+1}\\ &\leqslant \|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty+2A.\end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f)\|_\infty=\|f*F_{n+1}\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty\|F_{n+1}\|_1=\|f\|_\infty$, παίρνουμε το ζητούμενο.

12. *Έστω $p\geqslant 1$ και έστω $f\in L_p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα*

$$\lim_{n\to\infty}n\|\sigma_n(f)-f\|_p=0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Υπόδειξη. Για κάθε $k\neq 0$ και $n\geqslant|k|$ έχουμε

$$(\widehat{\sigma_n(f)-f})(k)=\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}(k)-\widehat{f}(k)=-\frac{|k|}{n}\widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$|\widehat{f}(k)|=\frac{n}{|k|}\,|(\widehat{\sigma_n(f)-f})(k)|\leqslant\frac{n}{|k|}\|\sigma_n(f)-f\|_1\leqslant\frac{n}{|k|}\|\sigma_n(f)-f\|_p.$$

Από την $n\|\sigma_n(f)-f\|_p\to 0$ έπεται ότι

$$|\widehat{f}(k)|\leqslant\frac{1}{|k|}\cdot n\|\sigma_n(f)-f\|_p\to\frac{1}{|k|}\cdot 0=0,$$

δηλαδή $\widehat{f}(k) = 0$. Έπεται ότι $f \equiv \widehat{f}(0)$ (όλοι οι συντελεστές Fourier της $f - \widehat{f}(0)$ είναι ίσοι με μηδέν, και $f - \widehat{f}(0) \in L_p(\mathbb{T})$).

13. *Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L_1(\mathbb{T})$,*

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{Z}$. Για κάθε $g \in L^1(\mathbb{T})$ έχουμε

$$(\widehat{g - g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - (\widehat{g * f_n})(k) = \widehat{g}(k) - \widehat{g}(k)\widehat{f_n}(k) = \widehat{g}(k)(1 - \widehat{f_n}(k)).$$

Άρα,

$$|\widehat{g}(k)|\,|1 - \widehat{f_n}(k)| = |(\widehat{g - g * f_n})(k)| \leqslant \|g - g * f_n\|_1 \to 0.$$

Θεωρώντας την $g(x) = e^{ikx}$ (για την οποία $\widehat{g}(k) = 1$) παίρνουμε $|1 - \widehat{f_n}(k)| \to 0$, δηλαδή $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$.

14. *Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά*

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t) = \int_A \left(\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikt} \right) d\lambda(t) = \int_A s_n(f,t)\, d\lambda(t).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &:= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} S_m = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \int_A s_m(f,t)\, d\lambda(t) \\ &= \int_A \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} s_m(f,t) \right) d\lambda(t) = \int_A \sigma_{n+1}(f,t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Αφού $\|\sigma_{n+1}(f) - f\|_1 \to 0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_A \sigma_{n+1}(f,t) d\lambda(t) - \int_A f(t) d\lambda(t) \right| &\leqslant \int_A |\sigma_{n+1}(f,t) - f(t)|\, d\lambda(t) \\ &\leqslant \|\sigma_{n+1}(f) - f\|_1 \to 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\sigma_{n+1} \to \int_A f(t)\, d\lambda(t)$, δηλαδή η σειρά $\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$ είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

5.2 Ομάδα Β′

15. *Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι η f προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$(*) \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χωρίστε το $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ σε m διαδοχικά διαστήματα $I_1, \ldots, I_m$ του ιδίου μήκους, και θεωρήστε τα $J_r = f^{-1}(I_r)$, $r = 1, \ldots, m$. Επειδή η f είναι αύξουσα, κάθε J_r είναι διάστημα ή μονοσύνολο ή το κενό σύνολο (εξηγήστε γιατί). Προκύπτει έτσι μια διαμέριση $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ του $[-\pi, \pi]$, όπου $[b_s, b_{s+1}]$ είναι εκείνα τα J_r που είναι διαστήματα. Αν ορίσουμε $t_s = \inf\{f(x) : b_s \leqslant x \leqslant b_{s+1}\}$, τότε $|f(x) - t_s| \leqslant \frac{1}{m}$ στο (b_s, b_{s+1}). Επίσης, $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$, διότι η f είναι αύξουσα. Αν ορίσουμε $g_m(x) = \sum_{s=1}^{N} t_s \chi_{[b_s, b_{s+1}]}(x)$, τότε

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{m}.$$

Αν δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε για κάθε συνάρτηση g της μορφής $(*)$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ να ισχύει $|k\widehat{g}(k)| \leqslant M$, τότε από την $(**)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} |k\widehat{f}(k)| &\leqslant |k\widehat{g_m}(k)| + |k||\widehat{f}(k) - \widehat{g_m}(k)| \\ &\leqslant M + |k|\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_m(x)|\, dx \leqslant M + |k|\frac{1}{m} \end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και αφήνοντας το $m \to \infty$, βλέπουμε ότι $|k\widehat{f}(k)| \leqslant M$.

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s, b_{s+1}]}$: αν $k \neq 0$, έχουμε

$$\widehat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{b_s}^{b_{s+1}} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ikb_s} - e^{-ikb_{s+1}}}{2\pi i k}.$$

Έπεται ότι, για την $g(x)=\sum_{s=1}^N t_s\chi_{[b_s,b_{s+1}]}(x)$,

$$\begin{aligned}2\pi ik\widehat{g}(k) &= \sum_{s=1}^N t_s(e^{-ikb_s}-e^{-ikb_{s+1}})\\ &= t_1e^{-ib_1x}-t_Ne^{-ib_{N+1}x}+\sum_{s=2}^N e^{-ikb_s}(t_s-t_{s-1}).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}2\pi|k\widehat{g}(k)| &\leqslant |t_1|+|t_N|+\sum_{k=2}^N (t_s-t_{s-1}) = |t_1|+|t_N|+(t_N-t_1)\\ &\leqslant 4\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

διότι $t_N-t_1\leqslant \|f\|_\infty-(-\|f\|_\infty)=2\|f\|_\infty$. Έπεται το ζητούμενο, με $M=2\|f\|_\infty/\pi$.

16. *Έστω $0<\alpha\leqslant 1$ και έστω $f\in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t\in\mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$|f(t+x)-f(t)|\leqslant A|x|^\alpha,\qquad |x|\leqslant\pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha<1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t)-f(t)|\leqslant \frac{\pi+1}{1-\alpha}\,\frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha=1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t)-f(t)|\leqslant 2\pi A\,\frac{\ln(n+1)}{n}.$$

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $\alpha=1$ (η περίπτωση $0<\alpha<1$ είναι παρόμοια). Αν $F_n(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin(nx)}{\sin(x/2)}\right)^2$ ο πυρήνας του Fejér τότε μπορούμε να γράψουμε $\sigma_n(f)(x)=(f*F_n)(x)$. Επομένως, αν $x\in\mathbb{R}$ τότε

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f,x)-f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x-t)-f(x)]F_n(t)\,d\lambda(t)\right|\\ &\leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|F_n(t)\,d\lambda(t)\\ &\leqslant \frac{M}{2n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|t|}{|\sin(t/2)|}\frac{\sin^2(nt)}{|\sin(t/2)|}\,d\lambda(t),\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την συνθήκη Lipschitz για την f και το ότι η $\{F_n\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων που παίρνει θετικές τιμές. Καθώς, η συνάρτηση $t\mapsto\frac{t}{\sin(t/2)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\pi)$, παίρνουμε $|\frac{t}{\sin(t/2)}|\leqslant\pi$ για κάθε $|t|\leqslant\pi$. Έτσι, βρίσκουμε:

$$\|\sigma_n(f)-f\|_\infty\leqslant\frac{M}{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right|\,d\lambda(t),$$

διότι $|\sin nt| \leqslant 1$. Τέλος, αν μιμηθούμε την απόδειξη της

$$\|D_n\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\, d\lambda(t) \leqslant C\log n,$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right| d\lambda(t) \leqslant C\log n$$

και το συμπέρασμα έπεται. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\sin(t/2) > t/\pi$ για $0 < t < \pi$,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\sin nt}{\sin(t/2)}\right| d\lambda(t) &\leqslant 2\pi\int_0^{\pi} \frac{|\sin(nt)|}{t}\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi\int_0^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, d\lambda(t) + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi^2 + 2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{k\pi}\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\int_0^{\pi} |\sin t|\, d\lambda(t) \\
&\leqslant 2\pi^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \leqslant c\log n
\end{aligned}$$

για κάποια αριθμητική σταθερά $c > 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant c' M\frac{\log n}{n}.$$

17. *Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,*

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι η $b_n = a_{n-1} - a_n$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} - a_n) = a_0 < \infty.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} nb_{n+1} = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\, F_n(x).$$

Αφού $F_n \geqslant 0$ και $\int_{\mathbb{T}} F_n(x)d\lambda(x) = 2\pi$ για κάθε $n \geqslant 1$, από το θεώρημα Beppo-Levi έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}).$$

Όμως,

$$\sum_{n=1}^{N} n(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} b_n - Nb_{N+1} \to \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Τέλος, υπολογίζουμε το

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \lim_{N\to\infty} \widehat{f_N}(k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=|k|}^{N} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \\
&= \sum_{n=|k|}^{\infty} n(b_n - b_{n+1}) - |k|\sum_{n=|k|}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = |k|b_{|k|} + \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n - |k|b_{|k|} \\
&= \sum_{n=|k|+1}^{\infty} b_n = a_{|k|}.
\end{aligned}$$

18. *(α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την απολύτως συνεχή συνάρτηση $F(t) = (-i)\int_0^t f(s)ds$. Η F είναι 2π-περιοδική, διότι $\widehat{f}(0) = 0$ από την υπόθεση, άρα $F(2\pi) = 0 = F(0)$. Έχουμε

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} F(x)e^{-ikx}d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)\frac{e^{-ikx}}{k}d\lambda(x) = \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

για κάθε $k \neq 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\sigma_{n+1}(F,0) = \widehat{F}(0) + \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\widehat{f}(k)}{k} \to F(0).$$

Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) \frac{\widehat{f}(k)}{k} = \lim_{n\to\infty} \left(2\sum_{k=1}^{n} \frac{\widehat{f}(k)}{k} - \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)\right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k)$ και $\widehat{f}(0) = 0$. Όμως, $\widehat{f}(k) \to 0$ άρα

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{n}{n+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k) \to 0.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ με σειρά Fourier την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$. Τότε, $\widehat{2if}(k) = a_k$. Οι συντελεστές Fourier της $g = 2if$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του (α), άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < +\infty.$$

19. *Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$ και $b_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 1$. Δείξτε ότι*

$$|s_n(f,x)| \leqslant 5M$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$.

Υπόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} kb_k.$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $|\sigma_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty \leqslant M$. Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$|\sigma_n(f,x)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)| F_n(t)\, d\lambda(t) \leqslant M \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\, d\lambda(t) = M.$$

Επιπλέον, είναι $\sigma_{n+1}(f,x) = \sum_{k=1}^{n}(1-\frac{k}{n+1})b_k \sin kx$. Οπότε, για $x_n = \pi/(4n)$ και $2n$ αντί n παίρνουμε

$$M \geqslant \sigma_{2n+1}(f,x_n) = \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)b_k\sin(kx_n) \geqslant \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)b_k\frac{k}{2n},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\sin x > (2/\pi)x$ για $0 < x < \pi/2$ και το γεγονός ότι $b_k \geqslant 0$. Συνεπώς, είναι

$$2nM \geqslant \sum_{k=1}^{2n}\left(1-\frac{k}{2n+1}\right)kb_k \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}kb_k,$$

χρησιμοποιώντας ακόμη μια φορά το γεγονός ότι $b_k \geqslant 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$\sum_{k=1}^{n} kb_k \leqslant 4nM.$$

Συνδυάζοντας με τα παραπάνω βρίσκουμε:

$$|s_n(f,x)| \leqslant |\sigma_{n+1}(f,x)| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}kb_k \leqslant M + \frac{4nM}{n+1} < 5M,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 6

L_2-σύγκλιση σειρών Fourier

6.1 Ομάδα Α΄

1. *(α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \textit{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \textit{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) \, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(kx) \, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x \sin(kx)}{k} + \frac{\cos(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2}e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\frac{\pi^2}{4}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2k+1)^4}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2d\lambda(x)=\frac{\pi^2}{3}.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

Όμως,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96}=\frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Αφού η f είναι περιττή, έχουμε $\widehat{f}(0)=0$. Για $k\neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)=\frac{-i}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin(kx)\,d\lambda(x)\\
&= \frac{-i}{\pi}\left[-\frac{\pi x\cos(kx)}{k}+\frac{\pi\sin(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}+\frac{i}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin(kx)\,d\lambda(x)\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-\frac{i}{\pi}\left[\frac{x^2\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{2i}{\pi k}\int_0^{\pi}x\cos(kx)\,d\lambda(x)\\
&= i\frac{(-1)^k\pi}{k}-i\frac{(-1)^k\pi}{k}+\frac{2i}{\pi k}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}+\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η

$$\sum_{k\neq 0}\frac{2i[(-1)^k-1]}{\pi k^3}e^{ikx}.$$

Από την ταυτότητα του Parseval,

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2k+1)^6}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2d\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2x^2d\lambda(x)=\frac{\pi^4}{30}.$$

Έπεται ότι
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$
Όμως,
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^6}=\frac{\pi^6}{960}+\frac{1}{64}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}.$$
Συνεπώς,
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960}=\frac{\pi^6}{945}.$$

2. *Δείξτε ότι: αν $\alpha\notin\mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης*
$$f(x)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}e^{i(\pi-x)\alpha}$$
στο $[0,2\pi]$, είναι η
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$
Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k+\alpha)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε
$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-ikx}d\lambda(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}e^{i\pi\alpha}e^{-ix(\alpha+k)}d\lambda(x)\\ &= \frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\left[\frac{-e^{-ix(\alpha+k)}}{i(k+\alpha)}\right]_0^{2\pi}=\frac{e^{i\pi\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\,\frac{1-e^{-2\pi i\alpha}}{i(k+\alpha)}\\ &= \frac{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}}{2i(k+\alpha)\sin\pi\alpha}=\frac{2i\sin\pi\alpha}{2i(k+\alpha)\sin\pi\alpha}\\ &= \frac{1}{k+\alpha}.\end{aligned}$$
Συνεπώς, η σειρά Fourier της f είναι η
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$
Από την ταυτότητα του Parseval,
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k+\alpha)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2d\lambda(x)=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)},$$

αφού $|f(x)| = \frac{\pi}{|\sin(\pi\alpha)|}$ για κάθε x.

3. *Έστω $0 < a \leqslant \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.*

(α) Δείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

Υπόδειξη. (α) Για $k = 0$ έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \mathbf{1}\, d\lambda(x) = \frac{2a}{2\pi} = \frac{a}{\pi}.$$

Για $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} e^{-ikx} d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \cos(kx)\, d\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{a} \cos(kx)\, d\lambda(x) \\ &= \left[\frac{\sin(kx)}{\pi k} \right]_0^a = \frac{\sin(ka)}{\pi k}. \end{aligned}$$

(β) Αν $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x, άρα

$$f(x) = S(f, x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Θέτοντας $x = 0$ στην ισότητα του (β) έχουμε

$$1 = f(0) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} = \frac{a}{\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{\pi k},$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{a}{\pi} \right) = \frac{\pi - a}{2}.$$

Για το δεύτερο άθροισμα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Parseval: έχουμε $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ για κάθε k, άρα

$$\|f\|_2^2 = |\widehat{f}(0)|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 = \frac{a^2}{\pi^2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{\pi^2 k^2}.$$

Αφού

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \mathbf{1}^2 d\lambda(x) = \frac{a}{\pi},$$

τελικά έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{a}{\pi} - \frac{a^2}{\pi^2}\right) = \frac{\pi a}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a(\pi - a)}{2}.$$

4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, γνωρίζουμε ότι $f \equiv S(f)$. Συνεπώς,

$$f(x) - s_n(f,x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παίρνοντας απόλυτες τιμές και κατόπιν supremum πάνω απ' όλα τα $x \in \mathbb{R}$, καταλήγουμε στην

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τη σχέση των συντελεστών Fourier της f με τους συντελεστές Fourier της f': $|a_k(f)| = \frac{1}{k}|b_k(f')|$, $|b_k(f)| = \frac{1}{k}|a_k(f')|$ και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, διαδοχικά, για να πάρουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k(f)| + |b_k(f)|) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k}\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k(f')|^2\right)^{1/2}\right] \\
&\leqslant \sqrt{2/n}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γενονός ότι

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}$$

και την στοιχειώδη ανισότητα $\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{2}\sqrt{a+b}$. Επομένως,

$$\sqrt{n}\|f-s_n(f)\|_\infty\leqslant\sqrt{2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k(f')|^2+|b_k(f')|^2\right)^{1/2}.$$

Από την ανισότητα του Bessel έχουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k(f')|^2+|b_k(f')|^2)$ συγκλίνει και το συμπέρασμα έπεται.

5. *Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f)>0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)|\leqslant C(f)$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim\limits_{|k|\to\infty}|k\widehat{f}(k)|=0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|<+\infty$.

Υπόδειξη. Η απάντηση είναι καταφατική σε όλα τα ερωτήματα. Αρχικά παρατηρούμε ότι η f' είναι ολοκληρώσιμη. Από την ταυτότητα του Parseval,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f'}(k)|^2=\|f'\|_2^2<+\infty.$$

Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k)=ik\widehat{f}(k)$, συνεπώς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2|\widehat{f}(k)|^2<+\infty.$$

Έπεται το (β) (και από αυτό, το (α)): αφού η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\lim_{|k|\to\infty}|k\widehat{f}(k)|=0.$$

Για το (γ), από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k\neq 0}|\widehat{f}(k)|\right)^2 &= \left(\sum_{k\neq 0}(k|\widehat{f}(k)|)\frac{1}{k}\right)^2\\ &\leqslant\left(\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2}\right)\left(\sum_{k\neq 0}k^2|\widehat{f}(k)|^2\right)<+\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = |\widehat{f}(0)| + \sum_{k\neq 0} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

6. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 d\lambda(x),$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, d\lambda(x) = 0.$$

Από την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 d\lambda(x) = \|f\|_2^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \\
&= \sum_{k\neq 0} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k\neq 0} \frac{|\widehat{f'}(k)|^2}{k^2} \\
&\leqslant \sum_{k\neq 0} |\widehat{f'}(k)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\widehat{f'}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) d\lambda(x) = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0$$

από την 2π-περιοδικότητα της f. Ισότητα μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \geqslant 2$ (εξηγήστε γιατί). Ισοδύναμα αν

$$f(x) = \widehat{f}(1)e^{ix} + \widehat{f}(-1)e^{-ix}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

7. *(α) Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\, d\lambda(t) = 0$. Δείξτε ότι*

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, d\lambda(t) \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 d\lambda(t).$$

(β) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 d\lambda(t) \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Υπόδειξη. (α) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, d\lambda(t) \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 d\lambda(t).$$

Αφού $\int_0^{2\pi} g(t) d\lambda(t) = 0$, από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$\int_0^{2\pi} |g(t)|^2 d\lambda(t) \leqslant \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 d\lambda(t),$$

και έπεται το ζητούμενο.

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι $[a,b] = [0,\pi]$. Αφού $f(0) = f(\pi) = 0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση με $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) d\lambda(t) = 0$, θέτοντας $f(x) = -f(-x)$ για $x \in [-\pi, 0]$. Η επέκταση της f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $(k\pi, k\pi + \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Εφαρμόζοντας το (α) με $g = f$, παίρνουμε

$$\left| \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, d\lambda(t) \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 d\lambda(t) \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η f είναι περιττή, συμπεραίνουμε ότι

$$(*) \qquad \int_0^{\pi} |f(t)|^2\, d\lambda(t) \leqslant \int_0^{\pi} |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

Αν το $[a,b]$ είναι τυχόν, θεωρούμε την $F : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ με $F(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right)$. Τότε, η $(*)$ ισχύει για την F, δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left| f\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right) \right|^2 d\lambda(x) &= \int_0^{\pi} |F(x)|^2\, d\lambda(x) \leqslant \int_0^{\pi} |F'(x)|^2 d\lambda(x) \\ &= \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \left| f'\left(a + \frac{b-a}{\pi} x\right) \right|^2 d\lambda(x). \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = a + \frac{b-a}{\pi} x$, παίρνουμε

$$\int_a^b |f(t)|^2\, d\lambda(t) \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 d\lambda(t).$$

6.2 Ομάδα Β′

8. *Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

Υπόδειξη. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{I_n\}$ υποδιαστημάτων του $[0, 2\pi]$ με τις ακόλουθες ιδιότητεσ:

(i) Για κάθε $x \in [0, 2\pi]$, τα σύνολα $A_x = \{n \in \mathbb{N} : x \in I_n\}$ και $B_x = \{n \in \mathbb{N} : x \notin I_n\}$ είναι άπειρα.

(ii) $\ell(I_n) \to 0$, όπου $\ell(I)$ είναι το μήκος ενός διαστήματος I.

Ένας τρόπος να ορίσουμε μια τέτοια ακολουθία είναι ο εξής: παίρνουμε $I_1 = [0, 2\pi]$, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0, 2\pi]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα I_2 και I_3 μήκους π, στη συνέχεια χωρίζουμε το $[0, 2\pi]$ σε τέσσερα διαδοχικά διαστήματα $I_4, \ldots, I_7$ μήκους $\pi/2$ και ούτω καθεξής.

Ορίζουμε $f_n = \chi_{I_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Παρατηρήστε ότι κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ell(I_n)}{2\pi} = 0.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ έχουμε ότι τα A_x και B_x είναι άπειρα υποσύνολα του $\mathbb{N}$, άρα μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών (k_n) και (r_n) στα A_x και B_x αντίστοιχα. Τότε,

$$f_{k_n}(x) = \chi_{I_{k_n}}(x) = 1 \to 1 \ \text{ και } \ f_{r_n}(x) = \chi_{I_{r_n}}(x) = 0 \to 0,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

9. *Δείξτε ότι*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα του n-οστού πυρήνα του Dirichlet στο $[-\pi, \pi]$ είναι ίσο με 2π. Δηλαδή,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t}{\sin\frac{t}{2}} d\lambda(t) = 2\pi.$$

Γράφουμε
$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, d\lambda(t) + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)t\, d\lambda(t),$$
όπου $g(t) = \frac{1}{\sin(t/2)} - \frac{1}{t/2}$. Παρατηρούμε ότι η g μπορεί να οριστεί στο 0 ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,
$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right) t\, d\lambda(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(t/2)\sin(nt)\, d\lambda(t)\\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(t/2)\cos(nt)\, d\lambda(t) \to 0\end{aligned}$$
όταν $n\to\infty$, από το Λήμμα Riemann–Lebesgue για τις συνεχείς συναρτήσεις $g(t)\cos(t/2)$ και $g(t)\sin(t/2)$. Έπεται ότι
$$\lim_{n\to\infty} 2\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, d\lambda(t) = 2\pi.$$
Όμως,
$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t/2}\, d\lambda(t) = \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{2\sin x}{x}\, d\lambda(x).$$
Έπεται ότι
$$\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{\sin x}{x}\, d\lambda(x) \to \frac{\pi}{2}$$
όταν $n\to\infty$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι υπάρχει το
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, d\lambda(x) = \lim_{M\to\infty} \int_0^{M} \frac{\sin x}{x}\, d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$
Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες.

10. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz*
$$|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|$$
για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$, όπου $K>0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t>0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Δείξτε ότι
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$
και συμπεράνατε ότι
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. (α) Από την ταυτότητα του Parseval έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{g_t}(k)|^2.$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier της g_t: είναι

$$\widehat{g_t}(k) = \widehat{f(x+t)}(k) - \widehat{f(x-t)}(k) = e^{ikt}\widehat{f}(k) - e^{-ikt}\widehat{f}(k) = (2i\sin kt)\widehat{f}(k).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Lipschitz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x-t)|^2 d\lambda(x)\\ &\leqslant \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} K^2(2t)^2 d\lambda(x) = K^2t^2.\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για $t = \pi/2^{p+1}$ έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin(k\pi/2^{p+1})|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leqslant \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geqslant \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι¨ αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}},$$

δηλαδή

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| < +\infty$. Χρησιμοποιώντας το (β) και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty}2^{p/2}\frac{K\pi}{\sqrt{2}2^p} = \frac{K\pi}{\sqrt{2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^p} < +\infty.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1}|\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1}|\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

11. *Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Holder*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της Άσκησης 10. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$ και, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g_t(x)|^2 d\lambda(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}4|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2.$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη Holder παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin kt|^2|\widehat{f}(k)|^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+t)-f(x-t)|^2 d\lambda(x)\\ &\leqslant \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}K^2(2t)^{2\alpha}d\lambda(x) = K^2t^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, έχουμε

$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin(k\pi/2^{p+1})|^2|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Όμως, αν $2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p$ έχουμε $\frac{\pi}{4} \leqslant \left|\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$. Άρα, $|\sin(k\pi/2^{p+1})| \geqslant \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ γι¨ αυτές τις τιμές του k. Επιστρέφοντας στην προηγούμενη ανισότητα, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p}|\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}},$$

δηλαδή
$$\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{2K^2\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha(p+1)}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \left(\sum_{2^{p-1}<|k|\leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} 2^{p/2} \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^{\alpha p+\alpha}} = \frac{\sqrt{2}K\pi^\alpha}{2^\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(\alpha-\frac{1}{2})p}} < +\infty,\end{aligned}$$

διότι $\alpha - \frac{1}{2} > 0$. Έπεται ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| = \sum_{k=-1}^{1} |\widehat{f}(k)| + \sum_{|k|>1} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

12. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Δείξτε ότι*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

Υπόδειξη. Για την $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \pi - x$ έχουμε $\widehat{g}(0) = 0$ και $\widehat{g}(k) = \frac{(-i)}{k}$ για κάθε $k \neq 0$. Έχουμε $f, g \in L_2(\mathbb{T})$, άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x) f(x)\, d\lambda(x) = \langle g, f\rangle &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k}(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{k}(-i) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.\end{aligned}$$

13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Υποθέτουμε ότι $a_0 = 0$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln\left(2 \sin\frac{x}{2}\right) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Επεκτείνουμε την $\ln(2\sin\frac{x}{2})$ σε μια άρτια 2π-περιοδική συνάρτηση g στο $\mathbb{R}$. Εξηγήστε πρώτα ότι, γενικά, αν $f,g\in L_2(\mathbb{T})$ και οι f,g παίρνουν πραγματικές τιμές, τότε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)d\lambda(x) = \frac{1}{2}a_0(f)a_0(g) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)a_k(g)+b_k(f)b_k(g)).$$

Αφού η g είναι άρτια, έχουμε $b_k(g)=0$ για κάθε $k\geqslant 1$. Άρα,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)d\lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty}a_k(f)a_k(g).$$

Τέλος, για κάθε $k\geqslant 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_k(g) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|2\sin\frac{x}{2}\right|\cos kx\,d\lambda(x)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\ln(2\sin\frac{x}{2})\cos kx\,d\lambda(x)\\
&= -\frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin kx\cos\frac{x}{2}}{2\sin(x/2)}\,d\lambda(x)\\
&= -\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(k+1/2)x+\sin(k-1/2)x}{2\sin(x/2)}\,d\lambda(x)\\
&= -\frac{1}{2k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{D_k(x)+D_{k-1}(x)}{2}\,d\lambda(x) = -\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

14. *Έστω $f\in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty}[w_1(f,\pi/n)]^2<\infty,$$

όπου

$$w_1(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(x+t)-f(t)|\,d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι $f\in L^2(\mathbb{T})$.

Υπόδειξη. Από το θεώρημα Riesz-Fisher αρκεί να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2$ συγκλίνει. Έστω $0\neq k\in\mathbb{Z}$. Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{f(\cdot+\pi/k)}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(t+\pi/k)e^{-ikt}d\lambda(t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}f(s)e^{-iks}ds=-\widehat{f}(k).$$

Άρα,

$$2|\widehat{f}(k)|=|\widehat{f(\cdot+\pi/k)}(k)-\widehat{f}(k)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t+\pi/k)-f(t)|\,d\lambda(t)=w_1(f,\pi/k).$$

Χρησιμοποιώντας και την $w_1(f,x)=w_1(f,-x)$ (η οποία προκύπτει από την αλλαγή μεταβλητής $s=x+t$ στο $\int_{\mathbb{T}}|f(x+t)-f(t)|\,d\lambda(t)$) έχουμε

$$|\widehat{f}(k)|\leqslant \frac{w_1(f,\pi/|k|)}{2}$$

για κάθε $k\neq 0$. Επίσης, $|\widehat{f}(0)|\leqslant \|f\|_1$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\widehat{f}(k)|^2\leqslant |\widehat{f}(0)|^2+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[w_1(f,\pi/k)]^2}{4}\leqslant \|f\|_1^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}[w_1(f,\pi/k)]^2<\infty$$

από την υπόθεση.

15. *Έστω $f\in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε*

$$F(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}\right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F\in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2\leqslant \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x)<\infty$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{T}$.

Υπόδειξη. Για κάθε $N\in\mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_N(x)=\sum_{n=1}^{N}\frac{|s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)=\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Άρα,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}g_N(x)\,d\lambda(x)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=-n}^{n}\frac{|k|^2}{n(n+1)^2}|\widehat{f}(k)|^2=\sum_{k=-N}^{N}|k|^2|\widehat{f}(k)|^2\sum_{n=|k|}^{N}\frac{1}{n(n+1)^2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=|k|}^{N}\frac{1}{n(n+1)^2}&=\sum_{n=|k|}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\&\leqslant \sum_{n=|k|}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n=|k|+1}^{N+1}\frac{1}{n(n+1)}\\&=\frac{1}{|k|}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{|k|+1}+\frac{1}{N+2}\\&\leqslant \frac{1}{|k|(|k|+1)}\leqslant \frac{1}{|k|^2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\,d\lambda(x) \leqslant \sum_{k=-N}^{N} |k|^2|\widehat{f}(k)|^2\,\frac{1}{|k|^2} = \sum_{k=-N}^{N} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|F\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x)-\sigma_{n+1}(f,x)|^2}{n}\right) d\lambda(x)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} g_N(x)\,d\lambda(x) \leqslant \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

16. *Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geqslant 0$. Δείξτε ότι*

$$\left|\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1}\right| \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε την $\phi : [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$ με $\phi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ότι $\widehat{\phi}(k) = \frac{1}{k+1}$ για κάθε $k \geqslant 0$ και $\|\phi\|_\infty = \pi$.

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} &= \sum_{n,m=0}^{N} |x_n|\,|y_m|\,\widehat{\phi}(n+m)\\ &= \sum_{n,m=0}^{N} |x_n|\,|y_m|\,\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \phi(t)e^{-i(n+m)t}d\lambda(t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|e^{-int}\right)\left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|e^{-imt}\right)\phi(t)\,d\lambda(t).\end{aligned}$$

Δηλαδή, αν ορίσουμε $\alpha_N(t) = \sum_{n=0}^{N} |x_n|e^{-int}$ και $\beta_N(t) = \sum_{m=0}^{N} |y_m|e^{-imt}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \alpha_n(t)\beta_n(t)\phi(t)d\lambda(t)\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\alpha_N(t)|\,|\beta_N(t)|\,\|\phi\|_\infty d\lambda(t)\\ &\leqslant \|\phi\|_\infty \|\alpha_N\|_2 \|\beta_N\|_2\end{aligned}$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Αφού

$$\|\alpha_N\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \quad \text{και} \quad \|\beta_N\|_2 = \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|^2\right)^{1/2},$$

παίρνουμε

$$\sum_{n,m=0}^{N} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} \leqslant \|\phi\|_\infty \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{N} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Αφού $\|\phi\|_\infty = \pi$, έπεται ότι

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|x_n|\,|y_m|}{n+m+1} \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2\right)^{1/2}.$$

Ειδικότερα, έχουμε το ζητούμενο.