
Κεφάλαιο 7: L_2 -σύγκλιση σειρών Fourier

Ομάδα Α'

1. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π -περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

2. Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{i(\pi-x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k + \alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνετε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k + \alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi \alpha)}.$$

3. Έστω $0 < a \leq \pi$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a, a]}(x)$.

(α) Δείξτε ότι $\hat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\hat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(γ) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

4. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_{\infty} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(β) Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_{\infty} = 0.$$

5. Έστω $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leq C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(β) Εξετάστε αν $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(γ) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π -περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' δείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a \cos x + b \sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

7. (α) Έστω $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t) dt = 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt \right|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) Έστω $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

Ομάδα Β'

8. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

9. Δείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π -περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipshitz

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, δείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2 \pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leq 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

11. Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π -περιοδική, η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Holder

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

12. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - x)f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}.$$

13. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής 2π -περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f . Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) dx.$$

14. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} [w_1(f, \pi/n)]^2 < \infty,$$

όπου

$$w_1(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(x+t) - f(t)| dt.$$

Δείξτε ότι $f \in L^2(\mathbb{T})$.

15. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Ορίζουμε

$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f, x) - \sigma_n(f, x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$

Δείξτε ότι $F \in L^2(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leq \|f\|_2$. Ειδικότερα, $F(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο \mathbb{T} .

16. Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geq 0$. Δείξτε ότι

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leq \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $\phi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$. Παρατηρήστε ότι $\widehat{\phi}(k) = \frac{1}{k+1}$ και $\|\phi\|_{\infty} = \pi$.