Κεφάλαιο 6: Προσεγγίσεις της μονάδας και Αθροισιμότητα

Ομάδα Α΄

1. Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n = c_1 + \cdots + c_n$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

(β) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

2. Έστω $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

3. Έστω $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ μια οικογένεια καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{\delta\to 0}\|K_\delta\|_p = \lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_\delta(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} = +\infty.$$

4. Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνάρτηση 2π-περιοδική και ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Δείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f)(x) = \lim_{r\to 1^-} (f * P_r)(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(x)\,d\lambda(x).$$

7. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\,d\lambda(t) = 1.$$

Δείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \xrightarrow{\text{ομ}} f.$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

8. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x) = F_n(x)\sin nx,$$

όπου F_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Δείξτε ότι: αν $T \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$T'(x) = -2n(T * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|T'(x)| \leqslant 2n\|T\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|T'\|_\infty \leqslant n\|T\|_\infty$ για κάθε $T \in \mathcal{T}_n$.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2+b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

10. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι ο τελεστής $T : L_1(\mathbb{T}) \to L_1(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον πυρήνα του Fejér F_n, $n \in \mathbb{N}$.

11. Έστω $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Δείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι

$$s_n(f,x) = \sigma_{n+1}(f,x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

12. Έστω $p \geqslant 1$ και έστω $f \in L_p(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_p = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

13. Έστω (f_n) ακολουθία στον $L_1(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in L_1(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

14. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{T}$, η σειρά

$$\sum_k \widehat{f}(k) \int_A e^{ikt} d\lambda(t)$$

είναι Cesàro αθροίσιμη στο $\int_A f(t)\, d\lambda(t)$.

Ομάδα Β′

15. Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Υπολογίστε αρχικά τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s,b_{s+1}]}$. Κατόπιν, δείξτε ότι η f προσεγγίζεται (ως προς την $\|\cdot\|_1$) από κλιμακωτές συναρτήσεις της μορφής

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s,b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$.

16. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant A|x|^\alpha, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

Δείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant \frac{\pi+1}{1-\alpha}\,\frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f,t) - f(t)| \leqslant 2\pi A\,\frac{\ln(n+1)}{n}.$$

17. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in L_1(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ και θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n)\, F_n(x).$$

18. (α) Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Δείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

19. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και $b_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Δείξτε ότι

$$|s_n(f)(x)| \leq 5M$$

για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.