
Κεφάλαιο 5: Σειρές Fourier

Ομάδα Α'

1. Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$.

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

2. Δείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. (α) Δείξτε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι \mathbb{C} -γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\mu_1 x}, e^{i\mu_2 x}, \dots, e^{i\mu_n x}$$

είναι \mathbb{C} -γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι μ_j είναι θετικοί;

4. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο \mathbb{R} ,

$$\int_a^b f(x) d\lambda(x) = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x) d\lambda(x) = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x) d\lambda(x),$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) d\lambda(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) d\lambda(x) = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) d\lambda(x).$$

5. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 d\lambda(x) = 0.$$

6. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S[f]$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k .

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

7. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\tau_a(x) = f(x-a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f . Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f .

8. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f . Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f .

9. Έστω $f, f_n \in L_1(\mathbb{T})$ ($n \in \mathbb{N}$) συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)| d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \rightarrow \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \rightarrow \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k . Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

10. Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π -περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι

$$S(f, x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

12. Έστω $0 < \alpha \leq 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε k ,

$$|a_k(f)| \leq \frac{C}{k^\alpha} \quad \text{και} \quad |b_k(f)| \leq \frac{C}{k^\alpha}.$$

13. Θεωρούμε την περιττή 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f , υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

14. Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leq \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leq |x| \leq \pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\delta}{k^2 \pi \delta} \cos kx.$$

15. Θεωρούμε την 2π -περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που στο $[-\pi, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f , υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και δείξτε ότι $\hat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\hat{f}(k) = \frac{-1 + (-1)^k}{\pi k^2}, \quad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S[f]$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x = 0$ δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

16. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια 2π -περιοδική συνάρτηση, ολοκληρώσιμη στο $[0, 2\pi]$.

(α) Δείξτε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)| d\lambda(x) = 0.$$

[Υπόδειξη: εξετάστε πρώτα την περίπτωση που η f είναι συνεχής.]

(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx d\lambda(x) = - \int_0^{2\pi} f\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin nx d\lambda(x).$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx d\lambda(x) = 0.$$

17. (α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ δείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0, \pi)$ στο $(-\pi, \pi)$ δείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2 - 1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

Ομάδα Β'

18. (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^k \sin jx.$$

Δείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{j=m+1}^k \lambda_j \sin jx \right| \leq \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geq k > m \geq 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

19. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ και $k\lambda_k \leq M$ για κάθε $k = 1, \dots, n$, δείξτε ότι

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \sin kx \right| \leq (\pi + 1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0 < x < \pi$. Γράψτε, αν θέλετε,

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \sin kx = \sum_{k=1}^m \lambda_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^n \lambda_k \sin kx,$$

όπου $m = \min\{N, \lfloor \pi/x \rfloor\}$.]

20. (Λήμμα του Stečkin). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x_0) = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Δείξτε ότι: αν $|t| \leq \frac{\pi}{n}$ τότε

$$f(x_0 + t) \geq \|f\|_\infty \cos(nt).$$

21. (Ανισότητα του Bernstein). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι

$$\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty.$$

22. Έστω $[a, b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi, \pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi, \pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a, b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π -περιοδικά στο \mathbb{R} . Δείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) = \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik} e^{ikx}.$$

Δείξτε ότι η $S[f]$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f, x)$ συγκλίνει.

23. Έστω $T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το T παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Δείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο Q ώστε

$$T(x) = |Q(x)|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

24. (α) Έστω $0 < \delta < \pi$. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$,

$$\left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\delta}{2}} \quad \text{και} \quad \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $t_k \rightarrow 0$. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0, 2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$, όπου $0 < \delta < \pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, 2\pi)$.

25. Έστω $f \in L_1(\mathbb{T})$ και $g \in L_{\infty}(\mathbb{T})$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) g(nx) d\lambda(x) = \hat{f}(0) \hat{g}(0).$$