Κεφάλαιο 3: Ολοκλήρωμα Riemann και Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ομάδα Α΄

1. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω Q διαμέριση του $[a,b]$. Δείξτε ότι

$$V(\phi) = \sup\{V(\phi, P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a,b]\ ,\ P \supseteq Q\}.$$

2. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = x \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\phi(0) = 0$ είναι συνεχής αλλά έχει άπειρη κύμανση.

(β) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\psi(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $\psi(0) = 0$ έχει φραγμένη κύμανση.

3. (α) Έστω (ϕ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε ϕ_n έχει φραγμένη κύμανση και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $V(\phi_n \mid a,b) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $\phi_n \to \phi$ κατά σημείο, δείξτε ότι η ϕ έχει φραγμένη κύμανση και $V(\phi \mid a,b) \leq M$.

(β) Η υπόθεση $V(\phi_n \mid a,b) \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ στο (α) είναι ουσιαστική. Δείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$\phi_n(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \geqslant \frac{1}{2n\pi} \\ 0, & 0 \leqslant x < \frac{1}{2n\pi} \end{cases}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση ϕ της Άσκησης 2(α) και ότι κάθε ϕ_n έχει φραγμένη κύμανση (ενώ η ϕ όχι).

4. Έστω (ϕ_n) ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a,b]$ και έχουν φραγμένη κύμανση. Αν $\phi_n \to \phi$ κατά σημείο, δείξτε ότι

$$V(\phi \mid a,b) \leq \liminf_{n\to\infty} V(\phi_n \mid a,b).$$

[*Υπόδειξη για τις Ασκήσεις 3 και 4:* Δείξτε ότι $V(\phi_n, P) \to V(\phi, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.]

5. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε: για κάθε $\varepsilon > 0$, $V(\phi \mid a+\varepsilon, b) \leq M$.

(α) Δείξτε ότι $V(\phi \mid a,b) < +\infty$.

(β) Ποιά επιπλέον υπόθεση για την ϕ μας εξασφαλίζει ότι $V(\phi \mid a,b) \leq M$;

6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $I(x) = 0$ αν $x < 0$ και $I(x) = 1$ αν $x \geqslant 0$. Έστω (c_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$ και έστω (x_n) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων του $(a,b]$. Αν

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I(x - x_n), \quad x \in [a,b]$$

δείξτε ότι $\phi \in BV[a,b]$ και

$$V(\phi \mid a,b) = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.$$

7. Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και κατά τμήματα μονότονη συνάρτηση. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $N(y)$ το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\phi(x) = y$ στο $[a,b]$. Αν $m = \min\{\phi(x) : a \leq x \leq b\}$ και $M = \max\{\phi(x) : a \leq x \leq b\}$, δείξτε ότι

$$V(\phi \mid a,b) = \int_m^M N(y)\, d\lambda(y).$$

8. Βρείτε, αν υπάρχει, συνεχή συνάρτηση $\phi \in BV[a,b]$ η οποία δεν είναι Lipschitz συνεχής.

9. Έστω $a, b > 0$. Ορίζουμε

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leqslant 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f έχει φραγμένη κύμανση στο $[0,1]$ αν και μόνο αν $a > b$. Παίρνοντας $a = b$, κατασκευάστε (για κάθε $0 < \alpha < 1$) μια συνάρτηση που ικανοποιεί την Lipschitz συνθήκη τάξης α

$$|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|^{\alpha}$$

για κάποια σταθερά $A > 0$, αλλά δεν έχει φραγμένη κύμανση.

10. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, $x \neq 0$, και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε x, αλλά η f' δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1, 1]$.

11. Δείξτε (με βάση τον ορισμό) ότι η συνάρτηση Cantor-Lebesgue δεν είναι απολύτως συνεχής.

12. Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η

$$D^+(g)(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(α) Η f απεικονίζει σύνολα μέτρου μηδέν σε σύνολα μέτρου μηδέν.

(β) Η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα.

14. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής, αύξουσα συνάρτηση με $f(a) = A$ και $f(b) = B$. Έστω $g : [A, B] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι η $g(f(x))f'(x)$ είναι μετρήσιμη στο $[a, b]$.
(β) Δείξτε ότι αν η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[A, B]$ τότε η $g(f(x))f'(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_A^B g(y)d\lambda(y) = \int_a^b g(f(x))f'(x)d\lambda(x).$$

15. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η fg είναι απολύτως συνεχής, και

$$\int_a^b f'(x)g(x)d\lambda(x) = -\int_a^b f(x)g'(x)d\lambda(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Ομάδα Β′

16. Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|^d} \quad \text{για κάθε } |x| \geqslant 1,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι ολοκληρώσιμη.

17. Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{|x|(\log 1/|x|)^2} \quad \text{αν } |x| \leqslant 1/2$$

και $f(x) = 0$ αλλιώς. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε επίσης ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε

$$f^*(x) \geqslant \frac{c}{|x|(\log 1/|x|)} \quad \text{για κάθε } |x| \leqslant 1/2,$$

και συμπεράνατε ότι η f^* δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη μηδενική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$f_+^*(x) = \sup_{h>0} \int_x^{x+h} |f(y)|\, d\lambda(y).$$

Για κάθε $\alpha > 0$ θέτουμε $E_\alpha^+ = \{x \in \mathbb{R} : f_+^*(x) > \alpha\}$. Δείξτε ότι

$$\lambda(E_\alpha^+) = \frac{1}{\alpha} \int_{E_{\alpha+}} |f(y)| d\lambda(y).$$

[*Υπόδειξη.* Εφαρμόστε το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου για την $F(x) = \int_a^x |f(y)| d\lambda(y) - \alpha x$.]

19. Έστω F κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$\delta(x) = d(x, F) = \inf\{|x-y| : y \in F\}.$$

Ελέγξτε ότι $\delta(x+y) \leqslant |y|$ για κάθε $x \in F$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι, ισχυρότερα, ισχύει το εξής:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\delta(x+y)}{|y|} = 0 \ \text{ σχεδόν για κάθε } x \in F.$$

20. Κατασκευάστε μια αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: η f είναι ασυνεχής στο x αν και μόνο αν $x \in \mathbb{Q}$.

21. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $D^+(f)(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι η f είναι αύξουσα.

22. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a,b)$ και $|f'(x)| \leqslant M$, δείξτε ότι $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$ για κάθε $x, y \in [a,b]$ και ότι η f είναι απολύτως συνεχής.

23. Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ με

$$\liminf_{\substack{\lambda(B)\to 0 \\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y) d\lambda(y) = \infty$$

για κάθε $x \in E$.

23. Έστω $E \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(E) = 0$. Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα, απολύτως συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $D_+(f)(x) = D_-(f)(x) = \infty$ για κάθε $x \in E$.

24. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

για κάποια σταθερά $M > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν η f είναι απολύτως συνεχής και $|f'(x)| \leqslant M$ σχεδόν για κάθε x.

25. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αποδείξτε τα εξής:

(α) Η f είναι συνεχής.

(β) Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα και απολύτως συνεχής, σε κάθε κλειστό διάστημα $[\gamma, \delta] \subset (a,b)$.

(γ) Η $f'(x)$ υπάρχει σε όλα, εκτός από αριθμήσιμα το πλήθος, τα $x \in (a,b)$, η $f' = D^+(f)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) d\lambda(t)$$

για κάθε $x < y$ στο (a,b).

(δ) Αντίστροφα, αν η $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα, τότε για κάθε $\gamma \in (a, b)$ η $f(x) = \int_\gamma^x g(t) d\lambda(t)$ είναι κυρτή συνάρτηση στο (a, b).

26. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a, b)$ και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι η f είναι απολύτως συνεχής και

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) d\lambda(x).$$