Κεφάλαιο 2: Ολοκλήρωμα Lebesgue

Ομάδα Α′

1. Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη, τότε η f' είναι μετρήσιμη.

2. (α) Αν $A\subseteq\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A)=0$, δείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f:A\to[-\infty,+\infty]$ είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω A,B μετρήσιμα σύνολα με $\lambda(B)=0$ και έστω $f:A\cup B\to[-\infty,+\infty]$ μια συνάρτηση της οποίας ο περιορισμός $f|_A$ στο A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

(γ) Αν το $A\subseteq\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο σύνολο και η $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού στο A, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

3. (α) Δώστε παράδειγμα μη μετρήσιμης συνάρτησης f με την ιδιότητα η f^2 να είναι μετρήσιμη.

(β) Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και έστω $f:A\to\mathbb{R}$. Αν η f^2 είναι μετρήσιμη και το σύνολο $\{x\in A:f(x)>0\}$ είναι μετρήσιμο, δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

4. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^d$ μετρήσιμο και $f_n:A\to[-\infty,+\infty]$, $n\in\mathbb{N}$, ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$L=\{x\in A:\ \text{η ακολουθία } (f_n(x))_{n=1}^{\infty} \text{ συγκλίνει }\}$$

είναι μετρήσιμο.

5. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f:A\to[-\infty,+\infty]$ συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $q\in\mathbb{Q}$, το σύνολο $\{x\in A:f(x)>q\}$ είναι μετρήσιμο. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

6. Έστω $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι αν το $B\subseteq\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel, τότε το $f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R}^d:f(x)\in B\}$ είναι μετρήσιμο.

7. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A)<\infty$ και έστω $f:A\to\mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t)=\lambda(\{x\in A:\ f(x)>t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_k,f:A\to\mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k\uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k}\uparrow\omega_f$.

8. Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.

9. Έστω $f:\mathbb{R}\to[0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $F:[0,\infty)\to[0,\infty]$ με $F(t)=\lambda(\{f>t\})$. Δείξτε ότι η F είναι φθίνουσα, συνεχής από δεξιά, και $\lim_{t\to+\infty}F(t)=0$.

10. Υποθέτουμε ότι f και f_n, $n\in\mathbb{N}$, είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, $f_n\searrow f$, και υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ ώστε $\int f_k\,d\lambda<\infty$. Δείξτε ότι

$$\int f\,d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda.$$

11. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f>0$ $\sigma.\pi.$ Αν $\int_E f\,d\lambda=0$ για κάποιο μετρήσιμο σύνολο E, δείξτε ότι $\lambda(E)=0$.

12. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f\geqslant 1/n\}} f\,d\lambda.$$

13. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_{\{f\leqslant n\}} f\,d\lambda.$$

14. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είναι σωστό ότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$;

15. Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\lambda(\{f>2^k\})<\infty.$$

16. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda(E)<\infty$, ώστε

$$\int_E f\,d\lambda > \int f\,d\lambda - \varepsilon.$$

Επιπλέον, δείξτε ότι το E μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε η f να είναι φραγμένη στο E.

17. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f\,d\lambda$ είναι συνεχής.

18. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\lambda(E)<\delta$ τότε $\int_E f\,d\lambda<\varepsilon$.

19. Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f_n=\chi_{[n,n+1)}$ δείξτε ότι στο Λήμμα του Fatou η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια.

20. Έστω (f_n) μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Είναι σωστό ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda \leqslant \int\left(\limsup_{n\to\infty} f_n\right)d\lambda;$$

Αν προσθέσουμε την υπόθεση ότι η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη;

21. Έστω f και f_n, $n\in\mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n\leqslant f$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $f_n\to f$. Δείξτε ότι

$$\int f\,d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda.$$

22. Έστω f και f_n, $n\in\mathbb{N}$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n\to f$ και

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n\,d\lambda = \int f\,d\lambda<\infty.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\lambda = \int_E f\,d\lambda$$

για κάθε μετρήσιμο σύνολο E. Δώστε παράδειγμα που να δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει αν $\int f\,d\lambda=\infty$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε τα $\int_E f\,d\lambda$ και $\int_{E^c} f\,d\lambda$.]

23. Έστω (f_n) ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[a,b]$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int_a^b |f_n - f|\, d\lambda \to 0$.

24. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = 1.$$

25. Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-(x/n))^n e^{x/2} dx$ (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

26. Έστω ότι οι f, f_n είναι ολοκληρώσιμες και $f_n \nearrow f$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\int f_n\, d\lambda \to \int f\, d\lambda$;

27. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f|\, d\lambda \to 0$, δείξτε ότι $\int f_n\, d\lambda \to \int f\, d\lambda$ και $\int |f_n|\, d\lambda \to \int |f|\, d\lambda$.

28. Έστω f, f_n ολοκληρώσιμες. Αν $\int |f_n - f|\, d\lambda \to 0$, δείξτε ότι $\int_E f_n\, d\lambda \to \int_E f\, d\lambda$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο E, και $\int f_n^+\, d\lambda \to \int f^+\, d\lambda$.

29. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \lambda(\{|f| > 2^k\}) < \infty$.

30. Έστω (f_n), (g_n) και g ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leqslant g_n$, $f_n \to f$, $g_n \to g$ (όλα αυτά σχεδόν παντού) και ότι $\int g_n\, d\lambda \to \int g\, d\lambda$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι $\int f_n\, d\lambda \to \int f\, d\lambda$.

31. Έστω (f_n), f ολοκληρώσιμες και έστω ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού. Δείξτε ότι $\int |f_n - f|\, d\lambda \to 0$ αν και μόνο αν $\int |f_n|\, d\lambda \to \int |f|\, d\lambda$.

32. Έστω (f_n) ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ολοκληρώσιμη συνάρτηση g ώστε $|f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι

$$\int \left(\liminf_n f_n\right) d\lambda \leqslant \liminf_n \int f_n\, d\lambda \leqslant \limsup_n \int f_n\, d\lambda \leqslant \int \left(\limsup_n f_n\right) d\lambda.$$

33. Έστω f μετρήσιμη και σχεδόν παντού πεπερασμένη στο $[0,1]$.

(α) Αν $\int_E f\, d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) = 1/2$, δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

(β) Αν $f > 0$ σχεδόν παντού, δείξτε ότι

$$\inf\left\{ \int_E f\, d\lambda : \lambda(E) \geqslant \frac{1}{2} \right\} > 0.$$

34. Έστω $f_n : E \to \mathbb{R}$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\sum_{n=1}^\infty \int_E |f_n|\, d\lambda < +\infty$. Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν για κάθε $x \in E$.

(β) Η συνάρτηση $\sum_{n=1}^\infty f_n$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int \left(\sum_{n=1}^\infty f_n\right) d\lambda = \sum_{n=1}^\infty \int f_n\, d\lambda.$$

35. (α) Αν $f \geqslant 0$ σχεδόν παντού στο E και αν $f_n = \min\{f, n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \, d\lambda \to \int_E f \, d\lambda$.

(β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο E και $f_n = \max\{\min\{n, f\}, -n\}$, δείξτε ότι $\int_E f_n \, d\lambda \to \int_E f \, d\lambda$.

36. Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $E_1, \ldots, E_n$ μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Δείξτε ότι υπάρχει $i \leqslant n$ ώστε $\lambda(E_i) \geqslant k/n$.

Ομάδα Β′

37. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

38. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f απεικονίζει F_σ-σύνολα σε F_σ-σύνολα.

(β) Δείξτε ότι η f απεικονίζει μετρήσιμα σύνολα σε μετρήσιμα σύνολα αν και μόνο αν για κάθε $A \subset [a,b]$ με $\lambda(A) = 0$ ισχύει $\lambda(f(A)) = 0$.

39. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leqslant \alpha$ για κάθε $x \notin Z$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^\infty \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin Z$.

40. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $Z \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin Z$.

41. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι t-περιοδική και s-περιοδική για κάποιους $t, s > 0$ με $t/s \notin \mathbb{Q}$, δείξτε ότι η f είναι σχεδόν παντού σταθερή.

42. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο. Δείξτε ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων $f_n : E \to \mathbb{R}$.

43. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ χωριστά συνεχής συνάρτηση: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $f_x(y) := f(x,y)$ είναι συνεχής και για κάθε $y \in \mathbb{R}$ η $f^y(x) := f(x,y)$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.

44. Δείξτε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: αν η $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την f τότε η g είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in [0,1]$.

45. Έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει $\sup_n |f_n(x)| \, d\lambda < \infty$. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $A \subseteq [0,1]$ μετρήσιμο και $M > 0$ ώστε $\lambda([0,1] \setminus A) < \varepsilon$ και, για κάθε $x \in A$, $\sup_n |f_n(x)| \leqslant M$.

46. Έστω $\{I_n\}$ ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_n \subseteq [0,1]$. Συμβολίζουμε με f_n την χαρακτηριστική συνάρτηση του I_n.

(α) Αν $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι $f_n(x) \to 0$ σχεδόν παντού.

(β) Εξετάστε αν ισχύει το ίδιο με την υπόθεση ότι $\lambda(I_n) \leqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

47. Σταθεροποιούμε $0 < a < b$ και ορίζουμε $f_n(x) = ae^{-nax} - ne^{-nbx}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n| \, d\lambda = \infty$$

και

$$\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\lambda \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n \, d\lambda.$$

48. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{-1/2}$ αν $0 < x < 1$ και $f(x) = 0$ αλλιώς. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών, και θέτουμε $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x-q_n)}{2^n}$.

(α) Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, $|g| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Δείξτε ότι η g είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο και δεν είναι φραγμένη σε κανένα διάστημα. Τα παραπάνω ισχύουν ακόμα κι αν μεταβάλλουμε τις τιμές της g σε οποιοδήποτε σύνολο μηδενικού μέτρου Lebesgue.

(γ) Δείξτε ότι $g^2 < \infty$ σχεδόν παντού, αλλά η g^2 δεν είναι ολοκληρώσιμη σε κανένα διάστημα.

49. Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $0 < \lambda(A) < \infty$. Αν $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μια γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι: για κάθε $t > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του A με $\lambda(E) > t$ τότε $\int_E f \, d\lambda \geqslant \delta$.

50. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο 0. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $f_n(x) = f(x^n)$ είναι ολοκληρώσιμη.

51. Έστω f μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,1]$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sqrt[n]{f(x)} \, d\lambda(x) = \lambda(\{x : f(x) > 0\}).$$

52. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι γνήσια θετική σχεδόν παντού. Έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f(x) \, d\lambda(x) = 0.$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 0$.

53. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για $x > 0$ ορίζουμε $g(x) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt} \, d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η g είναι συνεχής και ότι $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

54. Έστω $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $0 < x \leqslant b$ ορίζουμε $g(x) = \int_x^b \frac{f(t)}{t} \, d\lambda(t)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,b]$ και $\int_0^b g(x) \, d\lambda(x) = \int_0^b f(t) \, d\lambda(t)$.

55. Έστω $E \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$ και έστω $f, g : E \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda.$$

Δείξτε ότι είτε (α) $f = g$ σχεδόν παντού στο E είτε (β) υπάρχει μετρήσιμο $A \subset E$ τέτοιο ώστε

$$\int_A f \, d\lambda < \int_A g \, d\lambda.$$

56. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάποιο κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει το εξής: για κάθε $E \subset [0,1]$ με $\lambda(E) > 0$ ισχύει

$$t_E := \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f \, d\lambda \in A.$$

Δείξτε ότι το σύνολο $Z = \{x \in [0,1] : f(x) \notin A\}$ έχει μέτρο μηδέν.

57. Έστω $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \, d\lambda(t) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού.

58. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν τα εξής:

(α) Υπάρχει μη αρνητική ολοκληρώσιμη $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε n ισχύει $|f_n| \leqslant h$ σχεδόν παντού.

(β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n g \, d\lambda \to 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε Borel σύνολο $A \subset [0,1]$,

$$\int_A f_n \, d\lambda \to 0.$$

59. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ σχεδόν παντού, και

$$\int_{[0,1]} |f(x)|^2 d\lambda(x) \leqslant 10$$

για κάθε n. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} |f(x)| \, d\lambda(x) \to 0.$$

60. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 + \frac{|f(x)|^2}{n^2}\right) d\lambda(x).$$

61. Έστω $f : [0,1] \to [1,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} f \ln f \, d\lambda \geqslant \int_{[0,1]} f \, d\lambda \cdot \int_{[0,1]} \ln f \, d\lambda.$$