Πραγματική Ανάλυση (2013–14)

28 Μαρτίου 2014

Θέμα 1. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω A,B μη κενά υποσύνολα του X. Αποδείξτε πλήρως τα παρακάτω:

(α) Το εσωτερικό A° του A είναι ανοικτό σύνολο και η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι κλειστό σύνολο.

(β) Αν $A \subseteq B$ τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(γ) Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $A^\circ \cap \overline{B} = \emptyset$.

(2μ)

Θέμα 2. (α) Έστω $f,g : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $x \in X$ ώστε $f(x) \neq g(x)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε: για κάθε $y,z \in B(x,r)$ ισχύει $f(y) \neq g(z)$.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Αποδείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. Το D είναι πυκνό στον X.
2. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $f(x) = 0$ για κάθε $x \in D$, ισχύει $f \equiv 0$.

(2μ)

Θέμα 3. Θεωρούμε τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Q}$ με την συνήθη μετρική.

(α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ με την ιδιότητα $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \emptyset$.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε συνάρτηση $f : (\mathbb{N}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(γ) Εξετάστε αν κάθε συνάρτηση $f : (\mathbb{N}, |\cdot|) \to (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι Lipschitz συνεχής.

(δ) Εξετάστε αν οι $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ και $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ είναι ομοιομορφικοί.

(2μ)

Θέμα 4. (α) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in X$ με την εξής ιδιότητα: αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X και $x_0 \in G$ τότε το $X \setminus G$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in X$ η κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x,1)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος. **(2μ)**

Θέμα 5. (α) Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του X τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

(β) Έστω (X,d) μετρικός χώρος, (Y,σ) συμπαγής μετρικός χώρος, και τ μια μετρική γινόμενο στο $X \times Y$. Αν $f : X \to Y$ είναι μια συνάρτηση, αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η f είναι συνεχής.
2. Το γράφημα $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ της f είναι κλειστό υποσύνολο του $(X \times Y, \tau)$.

(2μ)

Θέμα 6. (α) Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάποια $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής και ότι

$$\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx.$$

(β) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a,\infty)$, $a > 0$. **(2μ)**

Καλή Επιτυχία!