Πραγματική Ανάλυση (2011-12)

Ενδιάμεση Εξέταση – 14 Ιανουαρίου 2012

1. Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(α) Αν $\mathbb{Q} \subseteq A$, τότε το A είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(β) Αν $A \subseteq [0,1]$ και $A' = [0,1]$, τότε το A είναι υπεραριθμήσιμο. Με A' συμβολίζουμε το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A.

(γ) Αν $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τότε $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(δ) Αν $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ και το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του B.

(3μ)

2. **(α)** Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι $A' = (\overline{A})'$. Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.

(β) Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m$ με την Ευκλείδεια μετρική. Αποδείξτε ότι: αν A είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και αν $x, y \in A^\circ$ τότε $\|x-y\|_2 < \mathrm{diam}(A)$.

Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα σε *κάθε μετρικό χώρο*;

(3μ)

3. **(α)** Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: για κάθε μη κενό $A \subseteq X$,

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \quad \text{και} \quad \mathrm{diam}(f(A)) = \mathrm{diam}(f(\overline{A})).$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Το *γράφημα* της f είναι το σύνολο

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Αποδείξτε ότι: αν η f είναι φραγμένη και αν το γράφημα $G(f)$ της f είναι κλειστό, τότε η f είναι συνεχής.

(3μ)

4. **(α)** Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον (X, d) τότε η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στον (Y, σ).

(β) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του X, G ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.

(3μ)

Καλή επιτυχία!