

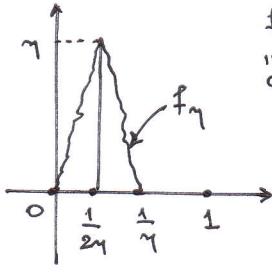
(Πρόταση 7.2.8) Έστω $f_n, f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$

Αν f είναι συνεχής και $f_n \xrightarrow{ο.μ.} f$ τότε

" $\forall x_0 \in X$ και $\forall (x_n)$ στο X με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$ "

Παρατήρηση: Αν έχουμε $f_n \xrightarrow{κ.σ} f$ (και όχι $f_n \xrightarrow{ο.μ.} f$) τότε το συμπέρασμα δεν ισχύει.

Π.Χ



$f, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

Έχουμε $f_n \xrightarrow{κ.σ} f \equiv 0$

Όμως αν πάρουμε $x_n = \frac{1}{2n} \rightarrow x_0 = 0$

αλλά $f_n(x_n) = n \rightarrow +\infty \neq 0 = f(x_0)$

Απόδειξη (δευτερεύουσα): Έστω $x_n \rightarrow x_0$

$$|f(x_0) - f_n(x_n)| \leq |f(x_0) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)| \leq |f(x_0) - f(x_n)| + \|f - f_n\|_\infty$$

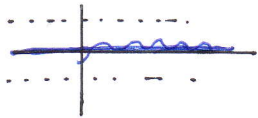
$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0
 (αρχή της μεταφοράς για τη συνεχή f) (δίδει $f_n \xrightarrow{ο.μ.} f$)

Πρόταση - δέυουσα: Έστω $f_n, f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο και έστω

$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

Υποθέτουμε ότι $f_n \xrightarrow{κ.σ} f$ και $f'_n \xrightarrow{ο.μ.} g$. Τότε $f' = g$.

ΛΥΣΗ



Θα δείξουμε ότι $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$ για κάθε $x \in [a, b]$ (*)

Έστω $x \in [a, b]$. Ξέρουμε ότι $f'_n \xrightarrow{ο.μ.} g$ στο $[a, b]$ άρα και στο $[a, x]$.

Επίσης f'_n, g συνεχείς (άρα ολοκληρώσιμες)

$$\text{Άρα, } \int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Τότε } f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} & f(a) + \int_a^x g(t) dt \\ \downarrow f_n \xrightarrow{κ.σ} f & \text{γιατί } f_n \xrightarrow{κ.σ} f & \\ f(x) & & \end{array}$$

Άρα έχουμε δείξει την (*). Παίρνοντας παράγωγο σε αυτήν έχουμε $f'(x) = g(x)$.

17) $f_\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_\eta(x) = \frac{x}{1+\eta x^2}$

(α) $\exists f : f_\eta \xrightarrow{p.k.} f$

(β) $f'_\eta(x) \rightarrow f'(x)$ αν $x \neq 0$ αλλά $f'_\eta(0) \rightarrow f'(0)$

(γ) για ποια διαστήματα $[a, \beta]$ ισχύει $f'_\eta \xrightarrow{p.k.} f'$ στο $[a, \beta]$;

ΛΥΣΗ

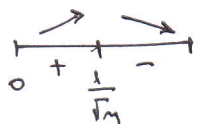
(α) Αν $x=0$ έχουμε $f_\eta(0) = 0 \rightarrow 0$

Αν $x \neq 0$ έχουμε $f_\eta(x) = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{x}{1+x^2} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{x} = 0$

Άρα, $f_\eta \xrightarrow{p.k.} 0$.

Για την ομοιόμορφη σύγκλιση έχουμε $\|f_\eta\|_\infty = \sup \left\{ \frac{|x|}{1+\eta x^2} : x \in \mathbb{R} \right\} =$
 $= \sup \left\{ \frac{x}{1+\eta x^2} : x \geq 0 \right\}$ $\uparrow$ άρτια

Παραγωγίζουμε: $\left(\frac{x}{1+\eta x^2} \right)' = \frac{1+\eta x^2 - 2\eta x^2}{(1+\eta x^2)^2} = \frac{1-\eta x^2}{(1+\eta x^2)^2}$



Άρα, $\|f_\eta\|_\infty = \left| f_\eta\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) \right| = \frac{\frac{1}{\sqrt{\eta}}}{1+\eta \cdot \frac{1}{\eta}} = \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \rightarrow 0$

Διὰρ. $f_\eta \xrightarrow{p.k.} 0$

(β) Έχουμε $f'_\eta(x) = g_\eta(x) = \frac{1-\eta x^2}{(1+\eta x^2)^2} \rightarrow f'(x) = 0$ (αφού $f \equiv 0$)

• Για $x=0$ έχουμε $f'_\eta(0) = g_\eta(0) = 1 \not\rightarrow 0$

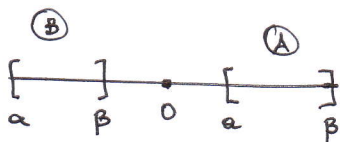
• Για $x \neq 0$ $|g_\eta(x)| = \left| \frac{1-\eta x^2}{(1+\eta x^2)^2} \right| \leq \frac{1+\eta x^2}{(1+\eta x^2)^2} = \frac{1}{1+\eta x^2} \rightarrow 0$

Διὰρ. $g_\eta(x) \rightarrow 0$.

(γ) Έχουμε $g_\eta(x) = \frac{1-\eta x^2}{(1+\eta x^2)^2}$ και ζητάμε όλα τα $[a, \beta]$ για τα οποία $g_\eta \xrightarrow{p.k.} 0$ στο $[a, \beta]$.

• Ξέρουμε ότι $g_\eta(0) = 1 \not\rightarrow 0$. Άρα αν $0 \in [a, \beta]$ τότε απορρίπτεται να ισχύει

γιατί θα είχαμε $g_\eta \xrightarrow{p.k.} 0$ στο $[a, \beta] \Rightarrow g_\eta(0) \rightarrow 0$



Ποιές περιπτώσεις μένουν:

(A) $0 < a < \beta$

Τότε $\forall x \in [a, \beta]$, $|g_\eta(x)| \leq \frac{1}{1+\eta x^2} \leq \frac{1}{1+\eta a^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|g_\eta\|_\infty \leq \frac{1}{1+\eta a^2} \rightarrow 0$. Συνεπώς, $g_\eta \xrightarrow{p.k.} 0$.

8) $\alpha < \beta < 0$, $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2 x^2} \leq \frac{1}{1+n^2 \beta^2}$

$\Rightarrow \|g_n\|_\infty \leq \frac{1}{1+n^2 \beta^2} \rightarrow 0$. Άρα, $g_n \xrightarrow{ο.κ.} 0$ στο $[a, \beta]$.

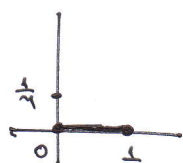
9) (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών f_n με $f_n \xrightarrow{ο.κ.} f$ συνεχή.

(β) —||— —||— ακολουθώσεων $f_n: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n \xrightarrow{κ.σ} f$ μη-ακολουθώση.

(γ) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας μη ακολουθώσεων $f_n: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n \xrightarrow{ο.κ.} f$ ακολουθώση.

ΛΥΣΗ

(α)



$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x=0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

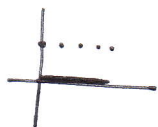
$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{ο.κ.} 0$ που είναι συνεχής

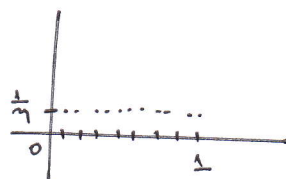
(β) $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

όπου $\{q_n: n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια αριθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

Κάθε f_n είναι ακολουθώση και $f_n \xrightarrow{κ.σ} \text{Dirichlet}$ που δεν είναι ακολουθώση.



(γ) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$



Οι f_n δεν είναι ακολουθώσιμες και $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{ο.κ.} 0$ που είναι ακολουθώση.

25) Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \cdot \sin\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-a, a]$ όπου $a > 0$

ΛΥΣΗ

Γράφουμε $\frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \sin\left(1 + \frac{x}{k}\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \sin 1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \left[\sin\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \sin 1 \right]$

και $\left| \sin\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \sin 1 \right| = |\cos \xi| \cdot \left| \frac{x}{k} \right| \leq \frac{a}{k}$
για κάποιο ξ
ανάμεσα στα $1, 1 + \frac{x}{k}$

$f_k: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$

$|f_k(x)| = \frac{1}{\sqrt{k}} \left| \sin\left(1 + \frac{x}{k}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

Άρα $\|f_k\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$

Κοιτώντας την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$

① Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \sin 1$ συζυγίζεται ομοιόμορφα στο $[-a, a]$

δίδει γ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ συζυγίζεται από το κριτήριο του Leibniz.

② Για την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} \left(\sin\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \sin 1 \right)$ $\rightarrow g_k(x)$

έχουμε $|g_k(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{a}{k} = \frac{a}{k^{3/2}}$ για κάθε $x \in [-a, a]$

$\Rightarrow \|g_k\|_{\infty} \leq \frac{a}{k^{3/2}}$ $\downarrow$ M_k . Η $\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^{3/2}}$ συζυγίζεται, οπότε από το κριτήριο των Weierstrass η $\sum g_k$ συζυγίζεται ομοιόμορφα.

Τότε και η αρχική συζυγίζεται ομοιόμορφα ως άθροισμα δύο σειρών συναρτήσεων που συζυγίζουν ομοιόμορφα.

26 Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^2+k}{k^2}$ συζυγίζεται ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[-a, a]$

όπου $a > 0$ αλλά δεν συζυγίζεται απολύτως στα ακραία τμήματα του x .

ΛΥΣΗ

• Έστω $x \in \mathbb{R}$. Η $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \cdot \frac{x^2+k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2+k}{k^2} = +\infty$

γιατί $\frac{x^2+k}{k^2} \geq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}$ και η $\sum \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

• Έστω $a > 0$.

① Η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ συζυγίζεται από Leibniz, άρα συζυγίζεται ομοιόμορφα

σαν σειρά συναρτήσεων στο $[-a, a]$.
(σταθερών)

② Η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^2}{k^2}$ $\rightarrow f_k(x)$ συζυγίζεται ομοιόμορφα στο $[-a, a]$ από κριτήριο Weierstrass

(δίδει: Έχουμε $|f_k(x)| = \frac{x^2}{k^2} \leq \frac{a^2}{k^2} \Rightarrow \|f_k\|_{\infty} \leq \frac{a^2}{k^2}$ $\downarrow$ M_k και η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^2}{k^2}$ συζυγίζεται, $\forall x \in [-a, a]$)

Άρα, και το άθροισμα των ① και ②

32 (α) Έστω $f_n: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$, ο (X, d) συμπαγής

και έστω $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

Υποθέτουμε ότι: "αν $x \in X$ και $x_n \in X$ και $x_n \rightarrow x$ τότε $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ "

Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{ok} f$

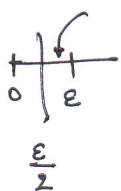
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Με απαγωγή σε άτοπο: Έστω ότι $f_n \not\xrightarrow{ok} f$.

Τότε $\|f_n - f\|_\infty \not\rightarrow 0$

$\Downarrow$

Υπάρχει $\varepsilon > 0$ και (f_{k_n}) υπακούουσα της (f_n) με $\|f_{k_n} - f\|_\infty \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.



Αφού $\|f_{k_n} - f\|_\infty = \sup \{ |f_{k_n}(y) - f(y)| : y \in X \} \geq \varepsilon$

$$\text{για κάθε } n \text{ υπάρχει } x_{k_n} \in X : |f_{k_n}(x_{k_n}) - f(x_{k_n})| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Αφού ο X είναι συμπαγής, η (x_{k_n}) έχει υπακούουσα $x_{k_{n_j}} \rightarrow x \in X$.

Τώρα, έχουμε:

$$\begin{array}{l} |f_{k_{n_j}}(x_{k_{n_j}}) - f(x_{k_{n_j}})| \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ από την } (*) \\ x_{k_{n_j}} \rightarrow x \implies f(x_{k_{n_j}}) \rightarrow f(x) \text{ (f συνεχής)} \\ \text{Υπόθεση} \implies f_{k_{n_j}}(x_{k_{n_j}}) \rightarrow f(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \leq |f_{k_{n_j}}(x_{k_{n_j}}) - f(x_{k_{n_j}})|$$

$$\downarrow$$

$$|f(x) - f(x)| = 0$$

δηλ. $\frac{\varepsilon}{2} \leq 0$, Άτοπο.

Ορίζουμε $y_s = \begin{cases} x_s, & s = k_{n_j} \\ x, & \text{αλλιώς} \end{cases}$

τότε $y_s \rightarrow x \implies f_s(y_s) \rightarrow f(x) \implies$ η υπακ. $f_{k_{n_j}}(y_{k_{n_j}}) \rightarrow f(x)$

"
 $f_{k_{n_j}}(x_{k_{n_j}})$

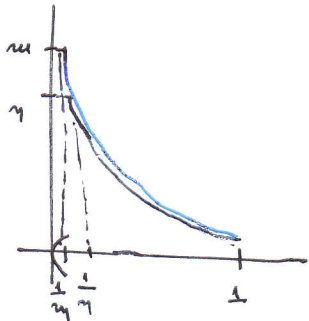
32 (β) Ορίσουμε $f_n: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{x}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$

και $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$

Δείξτε ότι: ① Αν $x_n, x \in (0, 1]$ και $x_n \rightarrow x$ τότε $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$

② $f_n \not\rightarrow f$.

ΜΣΗ



$$\textcircled{2} (f - f_n)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - n, & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα, } \|f - f_n\|_\infty = \sup \left\{ \frac{1}{x} - n : 0 < x \leq \frac{1}{n} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - n \right) = +\infty$$

Αφού $\|f - f_n\|_\infty = +\infty \not\rightarrow 0$ δεν ισχύει ότι $f_n \xrightarrow{o\mu} f$.

① Έστω $x_n \in (0, 1]$ και $x_n \rightarrow x \in (0, 1]$



Θα δείξουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq x_n \leq 1$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Πράγματι, } x_n \rightarrow x \\ \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_n - \frac{1}{n} \rightarrow x > 0 \\ \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0, x_n - \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow x_n > \frac{1}{n} \end{array} \right]$$

$$\text{Τότε } \forall n \geq n_0, f_n(x_n) = \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{x} = f(x)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{αφού } x_n \rightarrow x > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{x_n} \rightarrow \frac{1}{x} \end{array} \right)$$

30 Έστω $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $g(1) = 0$

Ορίσουμε $g_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_n(x) = x^n \cdot g(x)$

Δείξτε ότι: $g_n \xrightarrow{o\mu} 0$.

ΜΣΗ

$$\underline{\Sigma\eta\mu}: \text{Αν } 0 \leq x < 1 \text{ τότε } x^n \rightarrow 0 \Rightarrow x^n \cdot g(x) \rightarrow 0 \text{ δηλ. } g_n(x) \rightarrow 0$$

$$\text{Αν } x = 1 \text{ τότε } g_n(1) = 1^n \cdot g(1) = g(1) = 0 \rightarrow 0$$

$$\text{Άρα, } g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} 0.$$

Για την ομοιότητα εστίαση: Παίρνουμε $\varepsilon > 0$ και ζητάμε $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$:

$$\forall n \geq \eta_0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \underbrace{|x \cdot g(x)|}_{g_n(x)} < \varepsilon$$

Με θεωρ. Πιμ:

$$H \quad x \cdot |g(x)| \downarrow 0$$

το $[0,1]$ είναι συμπαγές

οι $x \cdot |g(x)|$ συνεχής

Άρα, η εστίαση είναι ομοιότητα

ΛΥΣΗ

• Αφού g είναι συνεχής στο 1 και $g(1) = 0$, υπάρχει $\delta \in (0,1)$:

$$\forall x \in [1-\delta, 1] \quad |g(x) - g(1)| < \varepsilon \Rightarrow |x \cdot g(x)| \leq |g(x)| < \varepsilon$$

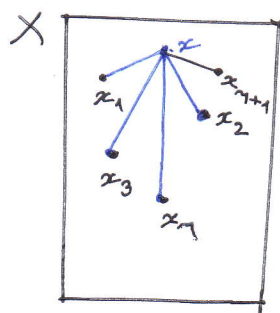
• Υπάρχει η_0 : $\forall n \geq \eta_0 \quad (1-\delta)^n \cdot \|g\|_\infty < \varepsilon$

$$\text{Για } x \in [0, 1-\delta] \text{ έχουμε } |x \cdot g(x)| = x \cdot |g(x)| \leq (1-\delta)^n \cdot \|g\|_\infty < \varepsilon$$

$$\text{Έστω } n \geq \eta_0 \text{ και } x \in [0,1] \quad \begin{cases} x \leq 1-\delta \Rightarrow |g_n(x)| \leq (1-\delta)^n \cdot \|g\|_\infty < \varepsilon \\ 1-\delta \leq x \leq 1 \Rightarrow |g_n(x)| \leq |g(x)| < \varepsilon \end{cases}$$

[31] Έστω (X, d) διαχωρίσιμος μετρίως χώρος και $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμητικό πουνό υποσύνολο του X .

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίσουμε $F_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \text{dist}(x, F_n)$



(a) Δείξτε ότι η (f_n) είναι φθίνουσα ακολουθία (συνεχών) συναρτήσεων και $f_n \xrightarrow{ε.σ} 0$

$$\begin{aligned} \text{φθίνουσα: } f_{n+1}(x) &= \min \{d(x, x_1), \dots, d(x, x_n), d(x, x_{n+1})\} \\ &\leq \min \{d(x, x_1), \dots, d(x, x_n)\} = f_n(x) \end{aligned}$$

Γενικότερα, αν $A \subseteq B$ τότε $\text{dist}(x, B) \leq \text{dist}(x, A)$

$$\text{και εδώ } F_n \subseteq F_{n+1}$$

Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι $f_n(x) \rightarrow 0$

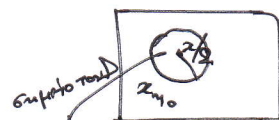
Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το D είναι πουνό, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $d(x, x_{n_0}) < \varepsilon$

$\Downarrow$

$$f_{n_0}(x) = \text{dist}(x, F_{n_0}) \leq d(x, x_{n_0}) < \varepsilon$$

Τότε, $\forall n \geq n_0 \quad -\varepsilon < 0 \leq f_n(x) \leq f_{n_0}(x) < \varepsilon$

$$\text{Ανλ. } \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x)| < \varepsilon$$



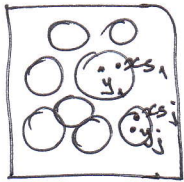
(β) $f_n \xrightarrow{0} 0 \Rightarrow 0$ (X, d) είναι ομοιά φραγμένος.

(γ) Αν 0 (X, d) είναι ομοιά φραγμένος τότε $f_n \xrightarrow{0} 0$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$: $\boxed{\forall x \in X \quad f_{n_0}(x) < \varepsilon} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X$
 $0 \leq f_n(x) \leq f_{n_0}(x) < \varepsilon$
 δηλ. $\forall n \geq n_0 \quad \|f_n\|_\infty < \varepsilon$

Ο X είναι ομοιά φραγμένος, άρα υπάρχουν $y_1, \dots, y_k \in X$:

$$X = B(y_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup B(y_k, \frac{\varepsilon}{2})$$



Αφού το D είναι πυκνό, για κάθε $j=1, \dots, k$ υπάρχει $s_j \in \mathbb{N}$: $x_{s_j} \in B(y_j, \frac{\varepsilon}{2})$

Ορίζουμε $n_0 = \max \{s_1, \dots, s_k\}$

Έστω $x \in X$. Υπάρχει $j \leq k$: $x \in B(y_j, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(x, y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$

Έχουμε $x_{s_j} \in B(y_j, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d(y_j, x_{s_j}) < \frac{\varepsilon}{2}$

Από τριγωνική ανισότητα: $d(x, x_{s_j}) < \varepsilon$.

Όμως $x_{s_j} \in \{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\} = F_{n_0}$
 $s_j \leq n_0 \rightarrow$

Άρα $f_{n_0}(x) = \text{dist}(x, F_{n_0}) \leq d(x, x_{s_j}) < \varepsilon$