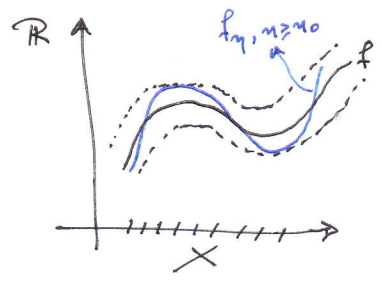


Ομοιόμορφη σύγκλιση: Αν $f, f_n : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ λήμμε ότι $f_n \xrightarrow{op} f$ αν
" $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \forall x \in X \underbrace{|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon}$ "



$$\|f_n - f\|_\infty = \sup \{ |f_n(x) - f(x)| \} \leq \varepsilon$$

Αντλ. $\boxed{f_n \xrightarrow{op} f \iff \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{op} 0}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (κρίτήριο Cauchy)

Έστω $f_n : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε, υπάρχει $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f_n \xrightarrow{op} f$ αν και μόνο αν η $\{f_n\}$ είναι βασισμένη ως προς την $\|\cdot\|_\infty$ (δηλαδή αν $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $(\Rightarrow)$ Έστω ότι $f_n \xrightarrow{op} f$. Έστω $\varepsilon > 0$

Υπάρχει $n_0 : \forall n \geq n_0 \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$

Τότε αν $n, m \geq n_0$ έχουμε $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι η (f_n) είναι $\|\cdot\|_\infty$ -βασισμένη.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 : \boxed{\forall n, m \geq n_0 \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon} \quad (*)$

$$\Rightarrow \forall n, m \geq n_0 \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

Άρα για σταθερό $x \in X$, η $\{f_n(x)\}$ είναι βασισμένη στο $\mathbb{R}$.

Άρα $\exists a_x \in \mathbb{R} : f_n(x) \rightarrow a_x$.

Ορίσουμε $f(x) = a_x = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Επιστρέφουμε στην $(*)$: αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$ τότε $\exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \forall x \in X |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$

$\xRightarrow{\text{αφαιρώντας το } m \rightarrow \infty}$ $\exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$
Άρα $f_n \xrightarrow{op} f$.

$\downarrow$
 $f(x)$

ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Έστω $f_k : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$. Ορίζουμε $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$

$$a_k \in \mathbb{R}$$

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

Αν υπάρχει $s \in \mathbb{R}$

ώστε $s_n \rightarrow s$

τότε λέμε ότι η $\sum a_k$

συγκλίνει σε s και

γράφουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(α) Αν υπάρχει $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\forall x \in X \quad s_n(x) \rightarrow f(x)$
τότε λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει πunctually στην f .

και γράφουμε : $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (δηλ. $\forall x \in X \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$)

(β) Αν υπάρχει $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $s_n \xrightarrow{\text{ολ.}} f$ τότε λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f .

ΠΡΟΤΑΣΗ (Κριτήριο Cauchy): Έχουμε ότι η $\sum f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f \iff$

$$\iff s_n \xrightarrow{\text{ολ.}} f \iff \text{η } (s_n) \text{ είναι βασική ως προς}$$

Πρόταση

$$\text{των } \|\cdot\|_{\infty} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > m \geq n_0 \quad \|s_n - s_m\|_{\infty} \leq \varepsilon \iff$$

$$\iff \boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n > m \geq n_0 \quad \|f_{m+1} + \dots + f_n\|_{\infty} \leq \varepsilon}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κριτήριο Weierstrass): Έστω $f_k : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$.

Έστω ότι $\|f_k\|_{\infty} \leq M_k$, $k=1, 2, \dots$ και $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$.

Τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια f).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Ιδέα:

$$\|f_{m+1} + \dots + f_n\|_{\infty} \leq \|f_{m+1}\|_{\infty} + \dots + \|f_n\|_{\infty} \leq M_{m+1} + \dots + M_n$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$ υπάρχει n_0 : $\forall n > m \geq n_0 \quad |M_{m+1} + \dots + M_n| \leq \varepsilon$.

Τότε $\forall n > m \geq n_0 \quad \|f_{m+1} + \dots + f_n\|_{\infty} \leq \|f_{m+1}\|_{\infty} + \dots + \|f_n\|_{\infty} \leq M_{m+1} + \dots + M_n \leq \varepsilon$

Από την προηγούμενη Πρόταση, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

8 Έστω $a > \frac{1}{2}$. Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^a(1+kx^2)}$ συσχλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

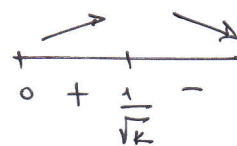
• $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = \frac{x}{k^a(1+kx^2)}$

• Μελετάμε την f_k : Ήπαμε το $\sup \left\{ \frac{|x|}{k^a(1+kx^2)} : x \in \mathbb{R} \right\}$

$\stackrel{\text{||}f_k\text{||}-\text{όρτια}}{=} \sup \left\{ \frac{x}{k^a(1+kx^2)} : x \geq 0 \right\} \stackrel{=}{=}$

Έχουμε $\left(\frac{x}{1+kx^2} \right)' = \frac{1+kx^2 - 2kx^2}{(1+kx^2)^2} = \frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$

μηδανίζεται στο $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$



$= \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{k^a \left(1 + k \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 \right)} = \frac{1}{2\sqrt{k} \cdot k^a}$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$

$1 + kx^2 \geq 2\sqrt{k}x$

$\leadsto \frac{x}{k^a(1+kx^2)} \leq \frac{1}{k^a \cdot 2\sqrt{k} \cdot x}$

Εξετάζουμε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty}$ συσχλίνει.

Έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^{a+\frac{1}{2}}} < \infty$ γιατί είναι p-σειρά με $p = a + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

6 Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συσχλίνει απολύτως (δηλ. $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$)

Δείξτε ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ συσχλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

• $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = a_k \cdot \cos kx$

• $|f_k(x)| = |a_k \cos kx| \leq |a_k|$ (δωτι $|\cos kx| \leq 1$, $\forall k \forall x$)

$\Rightarrow \|f_k\|_{\infty} \leq \underbrace{|a_k|}_{M_k}$

• Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συσχλίνει από την υπόθεση

Από το κριτήριο του Weierstrass η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ συσχλίνει ομοιόμορφα.

Όμοια εργαζόμαστε για την $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$.

7 Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 x^2}$ συζυγίζει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x=0$.

Δείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η σειρά συζυγίζει ομοιόμορφα στο $[a, +\infty)$ και στο $(-\infty, -a]$.

ΛΥΣΗ

• Έστω $x \neq 0$. Ορίζουμε $a_k = \frac{1}{1+k^2 x^2} > 0$ και $\beta_k = \frac{1}{k^2}$

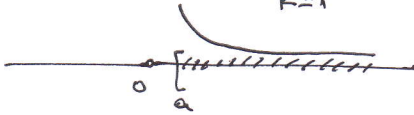
$$\text{Έχουμε } \frac{a_k}{\beta_k} = \frac{k^2}{1+k^2 x^2} = \frac{1}{\frac{1}{k^2} + x^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} > 0$$

Άρα, οι $\sum a_k$ και $\sum \beta_k$ έχουν την ίδια συμπεριφορά

Αφού η $\sum \beta_k = \sum \frac{1}{k^2}$ συζυγίζει, έπεται ότι η $\sum a_k = \sum \frac{1}{1+k^2 x^2}$ συζυγίζει.

Αλλιώς: $0 < \frac{1}{1+k^2 x^2} < \frac{1}{k^2 x^2}$ και η $\sum \frac{1}{k^2 x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \sum \frac{1}{k^2}$ συζυγίζει.

• Για $x=0$ έχουμε την $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ η οποία αποκλίνει ($s_n = n \rightarrow \infty$)



Έστω $a > 0$: • $f_k: [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_k(x) = \frac{1}{1+k^2 x^2}$

• Υπολογίζουμε την $\|f_k\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{1}{1+k^2 x^2} : x \geq a \right\} = f_k(a) = \frac{1}{1+k^2 a^2}$
διότι η f_k είναι φθίνουσα στο $[a, +\infty)$

• Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 a^2}$ συζυγίζει (διότι $a \neq 0$, το είδαμε) M_k

Συμπέρασμα: Τι γίνεται αν θεωρήσουμε την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2 x^2}$ στο $(0, +\infty)$;

Παρατηρούμε (γενικά) ότι αν $\|f_k\|_{\infty} \not\rightarrow 0$ τότε η $\sum f_k$ δεν συζυγίζει ομοιόμορφα

(γιατί: αν συνέχιζε ομοιόμορφα τότε η $\{s_n\}$ θα συνέχιζε ομοιόμορφα σε κάποια $f \Rightarrow$
 $\Rightarrow \underbrace{\|s_n - s_{n-1}\|}_{\|f_n\|_{\infty}} \leq \|s_n - f\|_{\infty} + \|s_{n-1} - f\|_{\infty} \rightarrow 0 + 0 = 0$, δηλ. $\|f_n\|_{\infty} \rightarrow 0$)

Στο παράδειγμά μας, η $f_k(x) = \frac{1}{1+k^2 x^2}$ είναι φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

$$\text{άρα } \|f_k\|_{\infty} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+k^2 x^2} = 1 \not\rightarrow 0.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Dini):

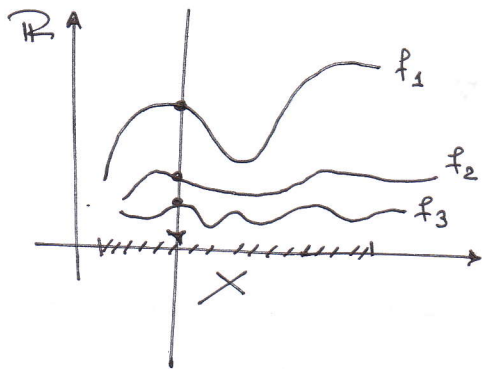
Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω

$f_n: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με

$$\bullet f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n \geq f_{n+1} \geq \dots$$

$$\bullet \forall x \in X \quad f_n(x) \downarrow 0$$

Τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε $V_n = \{x \in X : f_n(x) < \varepsilon\}$

• Κάθε V_n είναι ανοικτό: $V_n = f_n^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ και η f_n είναι συνεχής και το $(-\infty, \varepsilon)$ ανοικτό.

$$\bullet \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n = X$$

Πρώτα, αν πάρουμε $x \in X$ τότε $f_n(x) \rightarrow 0 < \varepsilon$,

άρα για όλα τελικά τα n έχουμε $f_n(x) < \varepsilon$

δηλ. για όλα τελικά τα n έχουμε $x \in V_n$.

Αφού ο X είναι συμπαγής και η $\{V_n\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X ,

υπάρχουν $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ώστε

$$X = V_{n_1} \cup V_{n_2} \cup \dots \cup V_{n_k}$$

Παρατηρούμε ότι: αν $s < t$ τότε $V_s \subseteq V_t$: αν $x \in V_s$ τότε $f_s(x) < \varepsilon \Rightarrow$

$t > s$

$$\Rightarrow f_t(x) \leq f_s(x) < \varepsilon \Rightarrow x \in V_t$$

Επεται ότι: $X = V_{n_k}$

Τότε έχουμε $\forall x \in X \quad f_{n_k}(x) < \varepsilon$ και $\forall x \in X \quad \forall n \geq n_k \quad f_n(x) \leq f_{n_k}(x) < \varepsilon$

$$-\varepsilon < 0 \leq$$

$$\text{Δηλ. } n \geq n_k \quad \|f_n\|_{\infty} \leq \varepsilon.$$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\text{ο.μ.}} 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος

Έστω $f, f_n : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς και $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ ή $f_n \nearrow f$

Τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Απόδειξη: Στην πρώτη περίπτωση
Ορίζουμε $g_n = \underbrace{f_n - f}_{\text{συνεχείς}} \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$

Από το Θεώρημα, $g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0 \Rightarrow f_n - f \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

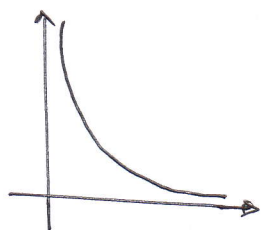
Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε τις $h_n = f - f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$ και

Παραδείγματα: (α) $X = [0, 1]$

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη, παρόλο που το $[0, 1]$ είναι συμπαγής και $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$.

(β) Η συμπαγεια είναι απαραίτητη



$$f_n : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2} \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$$

Όμως $f_n \not\xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$ διότι $\|f_n\|_\infty = 1 \not\xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

[1] $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(t) = n^p t (1-t^2)^n$ (όπου $p > 0$)

• Εξετάστε ως προς την κ.σ. και ομοιόμορφη σύγκλιση για τις διάφορες τιμές του p .

• Για ποια $p > 0$ ισχύει $\int_0^1 f_n \rightarrow \int_0^1 f$;

ΛΥΣΗ

• Για οποιοδήποτε $p > 0$ έχουμε $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$

(α) Αν $t=0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$

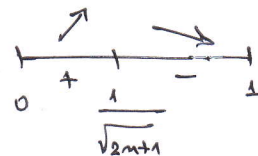
(β) Αν $0 < t \leq 1$ τότε $0 \leq 1-t^2 < 1 \Rightarrow \sqrt[p]{f_n(t)} = \sqrt[p]{n^p} \cdot \sqrt[p]{t} \cdot (1-t^2) \rightarrow 1 \cdot 1 \cdot (1-t^2) < 1$

Από κριτήριο Ρίτας, $f_n(t) \rightarrow 0$.

• Ομοιόμορφη σύγκλιση

$$\begin{aligned} \text{"Υπολογίζουμε" την } \|f_n\|_\infty &= \max \{ |f_n(t)| : 0 \leq t \leq 1 \} \\ &= \max \{ n^p t (1-t^2)^n : 0 \leq t \leq 1 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } f'_n(t) &= n^e \cdot (1-t^2)^n + n^e t \cdot n(1-t^2)^{n-1} \cdot (-2t) \\ &= n^e (1-t^2)^n - 2n^e \cdot n \cdot t^2 (1-t^2)^{n-1} \\ &= n^e (1-t^2)^{n-1} [1-t^2 - 2nt^2] \\ &= n^e (1-t^2)^{n-1} \cdot (1 - (2n+1)t^2) \end{aligned}$$



Αρα, $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) = n^e \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n$

• Αν $p > \frac{1}{2}$ τότε $\|f_n\|_\infty \rightarrow +\infty$, διότι $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow +\infty$

Οπότε: ΟΧΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ

και $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$

• Αν $0 < p < \frac{1}{2}$ τότε $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$ διότι $\frac{n^p}{\sqrt{2n+1}} \rightarrow 0$

Οπότε: ΝΑΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ

και $\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}}$

• Αν $p = \frac{1}{2}$ τότε $\|f_n\|_\infty = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} > 0$

άρα $\|f_n\|_\infty \not\rightarrow 0$, ΟΧΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ

Έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση όταν $0 < p < \frac{1}{2}$

Τέλος, $\int_0^1 n^e t(1-t^2)^n dt \stackrel{y=1-t^2}{=} \int_0^1 \frac{n^e}{2} y^n dy = \frac{n^e}{2(n+1)} \rightarrow 0, \text{ αν } p < 1.$

$dy = -2t dt$

Άλλες παρατηρήσεις για την $\|\cdot\|_\infty$: Αν $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\bullet \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\bullet \|af\|_\infty = a \cdot \|f\|_\infty$$

$$\bullet \boxed{\|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty}$$

$$\begin{aligned} (\forall x \in X \quad |f(x) \cdot g(x)| &= |f(x)| \cdot |g(x)| \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty \\ \Rightarrow \|f \cdot g\|_\infty &= \sup \{ |f(x) \cdot g(x)| : x \in X \} \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty) \end{aligned}$$

$$\bullet \|f \circ g\|_\infty = \sup \{ |f(g(x))| : x \in X \} \leq \sup \{ |f(y)| : y \in \Pi_0(f) \} = \|f\|_\infty$$

$$X \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\boxed{\|f \circ g\|_\infty \leq \|f\|_\infty}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\boxed{11} \quad f_n, g_n, f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_n \xrightarrow{o.k.} f$$

$$g_n \xrightarrow{o.k.} g$$

$$\|f\|_\infty < \infty, \|g\|_\infty < \infty$$

(οι f και g είναι φραγμένες)

$$\Rightarrow f_n \cdot g_n \xrightarrow{o.k.} f \cdot g$$

$$\text{Θα δείξουμε ότι } \|f_n \cdot g_n - f \cdot g\|_\infty \rightarrow 0$$

Έχουμε:

$$\|f_n \cdot g_n - f \cdot g\|_\infty = \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_\infty$$

$$\leq \|(f_n - f)g_n\|_\infty + \|f(g_n - g)\|_\infty$$

$$\leq \|f_n - f\|_\infty \cdot \|g_n\|_\infty + \underbrace{\|f\|_\infty}_{\text{σταθ.} < \infty} \cdot \|g_n - g\|_\infty \quad (*)$$

$\downarrow 0$

$\downarrow 0$

Παρατήρηση (στην αρχή της απόδειξης)

$$\text{Έχουμε } g_n \xrightarrow{o.k.} g \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad \|g_n - g\|_\infty < 1$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \|g_n\|_\infty \leq \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty < 1 + \|g\|_\infty$$

Πηγαίνουμε στην (*) και λάμβαν $\forall n \geq n_0$

$$\|f_n \cdot g_n - f \cdot g\|_\infty \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\downarrow 0} \underbrace{(1 + \|g\|_\infty)}_{\text{σταθ.} < \infty} + \underbrace{\|f\|_\infty}_{\text{σταθ.} < \infty} \underbrace{\|g_n - g\|_\infty}_{\downarrow 0}$$

12 Βρείτε $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n \xrightarrow{o.k.} f$, $g_n \xrightarrow{o.k.} g$ αλλά $f_n \cdot g_n \not\xrightarrow{o.k.} f \cdot g$

ΛΥΣΗ

$$f_n(x) = x \longrightarrow \underline{f(x) = x} \text{ ομοιόμορφα γιατί } \|f_n - f\|_\infty = \|0\|_\infty = 0$$

$\hookrightarrow$ δεν είναι φραγμένη.

$$g_n(x) = \frac{1}{n} \longrightarrow g(x) = 0 \text{ ομοιόμορφα γιατί } \|g_n - g\|_\infty = \sup \left\{ \left| g_n(x) - g(x) \right| : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \sup \left\{ \left| \frac{1}{n} - 0 \right| : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{Όμως, } (f_n g_n)(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow{\text{κ.σ}} 0$$

$$= \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\text{αλλά όχι ομοιόμορφα, διότι } \|f_n \cdot g_n\|_\infty = \sup \left\{ \frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R} \right\} = +\infty \not\rightarrow 0$$

14 Αν $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$, υάθε f_n είναι φραγμένη και $f_n \xrightarrow{o.k.} f$

τότε η (f_n) είναι ομοιόμορφα φραγμένη: δηλ. υπάρχει $M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \|f_n\|_\infty \leq M$

ΛΥΣΗ

Βήμα 1: Η f είναι φραγμένη: Αφού $f_n \xrightarrow{o.k.} f$ υπάρχει $k \in \mathbb{N} : \|f - f_k\|_\infty < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|f - f_k\|_\infty + \|f_k\|_\infty < 1 + \|f_k\|_\infty < \infty$$

Βήμα 2: Αφού $f_n \xrightarrow{o.k.} f$ υπάρχει $n_0 : \forall n \geq n_0 \|f_n - f\|_\infty < 1$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \|f_n\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty < \underbrace{1 + \|f\|_\infty}$$

Αν θέσουμε $M = \max \{ \|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty, \dots, \|f_{n_0}\|_\infty, 1 + \|f\|_\infty \}$

έχουμε το ζητούμενο.