Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω $f_n : (X,d) \to (Y,\sigma)$, $n = 1, 2, \dots$

και έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$

(α) **Κατά σημείο σύγκλιση**: Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην f (και γράφουμε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$) αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $f_n(x) \xrightarrow{\sigma} f(x)$

(β) **Ομοιόμορφη σύγκλιση**: Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f (και γράφουμε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad \sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Σύγκριση:

$$f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f \underset{o\rho}{\iff} \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \underbrace{\exists \overset{n_0(\varepsilon, x)}{n_0} \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon}_{f_n(x) \xrightarrow{\sigma} f(x)}$$

$$f_n \xrightarrow{o\mu} f \underset{o\rho}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \underset{\substack{\| \\ n_0(\varepsilon)}}{n_0} \in \mathbb{N} : \forall x \in X \quad \forall n \geq n_0 \quad \sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ τότε $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $x_0 \in X$ και έστω $\varepsilon > 0$.

Ξεχνάω ποιο είναι το x_0 και αφού $f_n \xrightarrow{o\mu} f$ βρίσκω $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad \sigma(f(x), f_n(x)) < \varepsilon$$

$$\underset{\text{ειδικότερα για το } x_0}{\Longrightarrow} \quad \forall n \geq n_0 \quad \sigma(f(x_0), f_n(x_0)) < \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Η περίπτωση } Y = \mathbb{R}}$ Τι σημαίνει

$$f_n \xrightarrow{o\mu} f \underset{o\rho}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :$$

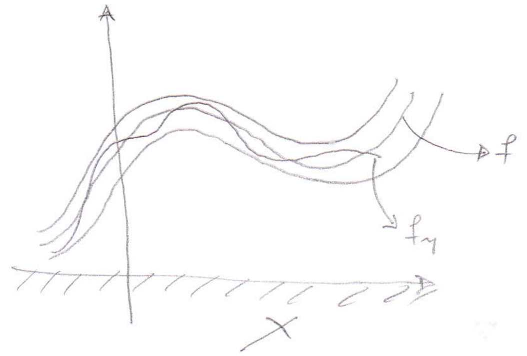
$$\forall n \geq n_0 \quad \boxed{\forall x \in X \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon}$$

$$\underset{o\rho}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \forall n \geq n_0$$

$$\sup\{|f(x) - f_n(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon$$

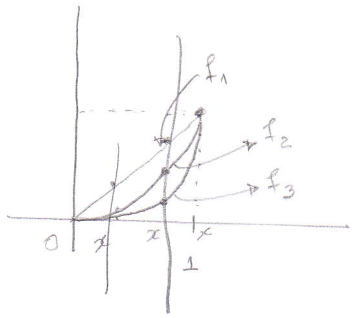
$\underset{\text{ορ}}{\iff} \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \ \|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$

$\underset{\text{ορ}}{\iff} \|f - f_n\|_\infty \longrightarrow 0$



Παραδείγματα:

① $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = x^n$

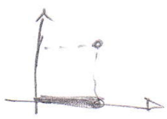


$f_1(x) = x$

$f_2(x) = x^2$

$f_3(x) = x^3$

$\vdots$



Θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{κ.σ} f$

όπου $f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$

Απόδειξη: • Για $x=0$: $f_n(x) = 0^n = 0 \to 0$

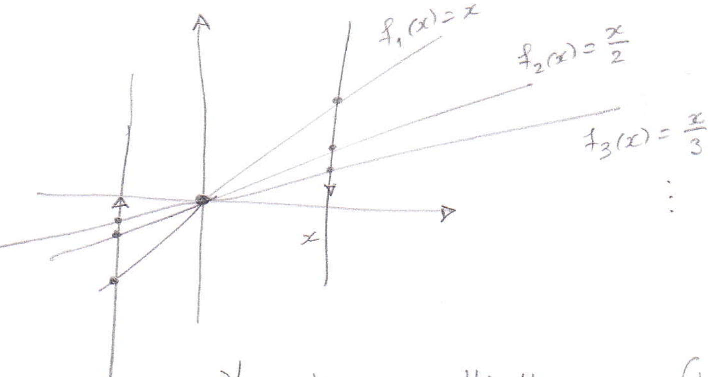
• Για $0<x<1$: $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \dfrac{x^{n+1}}{x^n} = x \to x < 1$

Από το Κριτήριο του Λόγου, $f_n(x) \to 0$

• Για $x=1$: $f_n(x) = 1^n = 1 \to 1$

Σημείωση: Ενώ όλες οι f_n είναι συνεχείς συναρτήσεις η f είναι ασυνεχής στο σημείο 1

② $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Θα δείξουμε ότι $f_n \xrightarrow{κ.σ} f \equiv 0$

Απόδειξη: Έστω $x \in \mathbb{R}$

Τότε $f_n(x) = x \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to 0$

Είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη;

Έχω $f_n \xrightarrow{ομ} 0 \iff \|f_n - \cancel{0}\|_\infty \to 0$ όταν $n \to \infty$

Υπολογίζω την $\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\}$

$= \sup\left\{\dfrac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\}$

$= +\infty$

όποιο κι αν είναι το n.

(Σημ: Εδώ το n είναι σταθερό και κάνω μελέτη ως προς x)

$\|f_1\|_\infty = \sup\{|x| : x \in \mathbb{R}\}$

$\|f_2\|_\infty = \sup\{\frac{|x|}{2} : x \in \mathbb{R}\}$

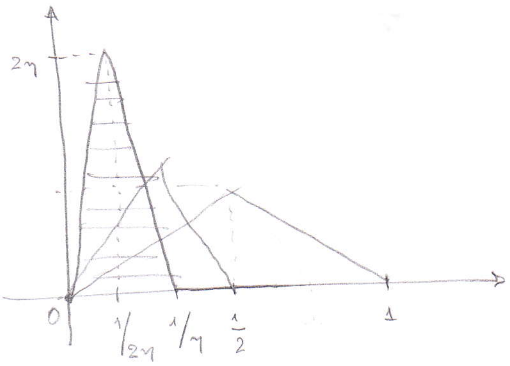
$\vdots$

Άρα, $\underset{\displaystyle +\infty}{\underset{\shortparallel}{\|f_n\|_\infty}} \not\to 0$ όταν $n \to \infty$

Άρα, $f_n \overset{\text{ομ}}{\not\to} 0$.

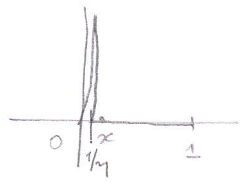
(3) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ -4n^2\left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$



• Κατα σημείο σύγκλιση

(α) $0 < x \le 1$:



Για μεγάλα n, $\frac{1}{n} < x$

Βρίσκουμε $n_0 = n_0(x)$: $\frac{1}{n_0} < x$

Τότε για κάθε $n \ge n_0$ έχουμε $\frac{1}{n} < x \le 1$

$\Downarrow$

$\forall n \ge n_0 \quad f_n(x) = 0$

Δηλ. η $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με 0.

Άρα $f_n(x) \to 0$.

(β) $x = 0$: Τότε $\forall n \quad f_n(0) = 0 \to f_n(0) \to 0$

Δείξαμε ότι $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f \equiv 0$

• Ομοιόμορφη σύγκλιση: Υπολογίζουμε (για σταθερό n) την $\|f_n - \cancel{f}\|_\infty =$

$= \max\{|f_n(x)| : 0 \le x \le 1\}$

$\underset{f_n \ge 0}{=} \max\{f_n(x) : 0 \le x \le 1\} = 2n \longrightarrow +\infty$

Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

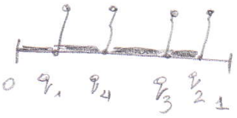
Σημείωση: Σε αυτό το παράδειγμα, όλες οι f_n (και η f) είναι ολοκληρώσιμες (διότι είναι συνεχείς). Όμως

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{\frac{1}{n}\cdot 2n}{2} = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 = \underset{\displaystyle 0}{\underset{\shortparallel}{\int_0^1 f(x)\,dx}}$$

(4) Θεωρούμε μια αρίθμηση $\underbrace{\{q_n : n\in\mathbb{N}\}}_{}$ του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$

↳ άπειρο αριθμήσιμο σύνολο

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x=q_1 \text{ ή } x=q_2 \text{ ή } \dots \text{ ή } x=q_n\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$



Η f_n είναι ολοκληρώσιμη γιατί έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, τα $q_1,q_2,\dots,q_n$.

Σύγκλιση κατά σημείο: $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$, όπου $f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & \text{αλλιώς}\end{cases}$

Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

Γιατί $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} f$: Έστω $x\in[0,1]$

(α) Αν $x\notin\mathbb{Q}$ τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ έχω $x\notin\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ \ f_n(x)=0 \Rightarrow f_n(x)=0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(β) Αν $x\in\mathbb{Q}$ τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$: $x=q_{n_0}$

Τότε, $\forall n\geq n_0\ \ x=q_{n_0}\in\{q_1,\dots,q_n\}$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0\ \ f_n(x)=1$

$\Rightarrow$ η $\{f_n(x)\}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με 1

$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

(5) $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=n^2x(1-x)^n$

- Κατά σημείο σύγκλιση: $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} 0$

(α) $x=0$: $f_n(0)=n^2\cdot 0\cdot(1-0)^n=0 \longrightarrow 0$

(β) $0<x\leq 1$: Τότε $\boxed{0\leq 1-x<1}$

Κριτήριο Ρίζας: $\sqrt[n]{f_n(x)}=\sqrt[n]{n^2}\cdot\sqrt[n]{x}\cdot(1-x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\cdot 1\cdot(1-x)<1$

Άρα, $f_n(x)\longrightarrow 0$.

- Ομοιόμορφη σύγκλιση: Υπολογίζουμε την $\|f_n-\cancel{0}\|_\infty=\max\{|f_n(x)| : 0\leq x\leq 1\}$

$=\max\{n^2x(1-x)^n : 0\leq x\leq 1\}$

$=f_n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\underbrace{n^2\cdot\frac{1}{n+1}}_{\sim n}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n}_{\downarrow\ 1/e}\longrightarrow +\infty$

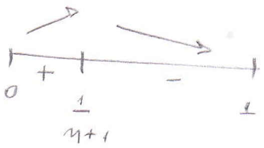
Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

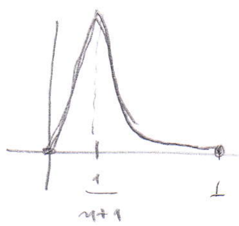
$$f_n'(x) = n^2(1-x)^n - n^3 x\,(1-x)^{n-1}$$

$$= n^2(1-x)^{n-1}\left[1-x-nx\right]$$

$$= n^2(1-x)^{n-1}\left(1-(n+1)x\right)$$

$\ominus \quad \ominus$





(6) $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx}$

(α) $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma} 0$

→ $x=0$, $f_n(0) = 0 \to 0$

→ $x>0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx} = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{x}{\frac{1}{n}+x} \to 0\cdot\dfrac{x}{0+x} = 0\cdot 1 \to 0$

(β) Ομοιόμορφη σύγκλιση: Υπολογίζουμε την $\|f_n - \cancel{0}\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \geq 0\} =$

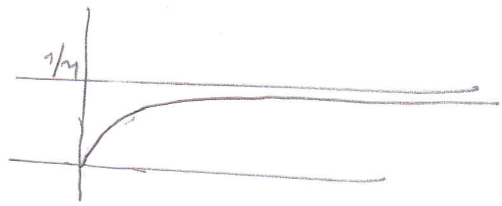
$$= \sup\left\{\frac{x}{1+nx} : x \geq 0\right\}$$

Παραγωγίζουμε: $\left(\dfrac{x}{1+nx}\right)' = \dfrac{1+\cancel{nx}-\cancel{nx}}{(1+nx)^2} > 0$ στο $[0,+\infty)$

Άρα η f_n είναι αύξουσα, άρα $\sup\left\{\dfrac{x}{1+nx} : x\geq 0\right\} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+nx} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x}+n} = \dfrac{1}{n}$

Άρα, $\|f_n - \cancel{0}\|_\infty = \dfrac{1}{n} \to 0$

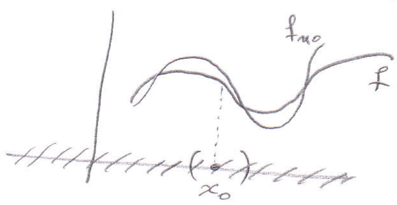
Άρα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.



ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Έστω $f_n : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχείς συναρτήσεις και έστω $f : (X,d)\to(Y,\sigma)$

Αν $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$ τότε η f είναι συνεχής

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $x_0 \in X$. Θα δ.ο η f είναι συνεχής στο x_0.



Έστω ε>0. Ζητάμε δ>0:

"αν $d(x,x_0)<\delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$"

Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq n_0 \quad \boxed{\forall x \in X \quad \sigma(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}} \quad (1)$$

Θεωρούμε την f_{n_0}

Η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει $\delta > 0$:

$$\boxed{\forall x \in X \text{ με } d(x, x_0) < \delta \text{ ισχύει } \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}} \quad (2)$$

Τότε για κάθε $x \in X$ με $d(x, x_0) < \delta$ έχουμε

$$\sigma(f(x), f(x_0)) \leq \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + \sigma(f_{n_0}(x_0), f(x_0)) <$$

$$\overset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{3} + \overset{(2)}{\frac{\varepsilon}{3}} + \overset{(1)}{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

φυλ. **13** Εστω $f, f_n : (X, d) \to (Y, \sigma)$ με $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$

Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΛΥΣΗ

Εστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε

"αν $x, y \in X$ και $d(x,y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$"

Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad \sigma(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}} \quad (1)$$

Θεωρούμε την f_{n_0} : Αφού η f_{n_0} είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$:

$$\boxed{\text{"αν } x, y \in X \text{ και } d(x,y) < \delta \text{ τότε } \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) < \frac{\varepsilon}{3}\text{"}} \quad (2)$$

Εστω $x, y \in X$ με $d(x,y) < \delta$. Τότε $\sigma(f(x), f(y)) \leq \sigma(f(x), f_{n_0}(x)) + \sigma(f_{n_0}(x), f_{n_0}(y)) +$

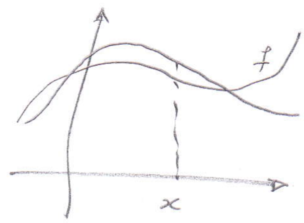
$$+ \sigma(f_{n_0}(y), f(y)) < \overset{(1)}{\frac{\varepsilon}{3}} + \overset{(2)}{\frac{\varepsilon}{3}} + \overset{(1)}{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon$$

$\boxed{5}$ Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) \underset{\text{ορ}}{=} f(x+\frac{1}{n})$

Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$

$$\boxed{\text{Ζητάμε } |f_n(x)-f(x)| = \underbrace{|f(x+\tfrac{1}{n})-f(x)|}_{\substack{\text{ομοιόμορφα μικρό}\\ \text{όταν } n\to+\infty}} < \varepsilon}$$



<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $\varepsilon > 0$.

• Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$:

$$\boxed{\text{"αν } x,y \in \mathbb{R} \text{ και } |x-y| < \delta \text{ τότε } |f(x)-f(y)| < \varepsilon\text{"}} \quad (*)$$

• <u>Υπάρχει</u> n_0 : $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$

Έστω $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|(x+\tfrac{1}{n})-x\right| = \frac{1}{n} < \delta \underset{(*)}{\Longrightarrow} \forall x \in \mathbb{R} \ \left|f(\underbrace{x+\tfrac{1}{n}}_{y}) - f(x)\right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

$\boxed{15}$ $\left.\begin{array}{l} f, f_n : (X,d) \to [a,\beta] \text{ και } f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \\ \underbrace{g : [a,\beta] \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}}_{\text{ομ. συνεχής}} \end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g\circ f$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$|(g\circ f_n)(x) - (g\circ f)(x)| = |g(\underbrace{f_n(x)}_{u}) - g(\underbrace{f(x)}_{v})|$$

Είναι το $\underbrace{f_n(x)}_{\substack{\shortparallel \\ u}}$ "κοντά" στο $\underbrace{f(x)}_{\substack{\shortparallel \\ v}}$

Έστω $\varepsilon > 0$.

Η g είναι ομοιόμορφα συνεχής (γιατί είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα) άρα υπάρχει $\delta > 0$: "αν $u, v \in [a,\beta]$ και $|u-v| < \delta$ τότε $|g(u)-g(v)| < \varepsilon$" (1)

Αφού $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ υπάρχει n_0 :

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \delta \qquad (2)$$

Τότε $\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X$ έχουμε :

$$|\underbrace{f_n(x)}_{= u} - \underbrace{f(x)}_{= v}| < \delta \quad \text{και} \quad f_n(x), f(x) \in [a, \beta]$$

$$\underset{(1)}{\Longrightarrow} \left| g\big(\underbrace{f_n(x)}_{= u}\big) - g\big(\underbrace{f(x)}_{= v}\big) \right| < \varepsilon$$

δηλ. $\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad |(g \circ f_n)(x) - (g \circ f)(x)| < \varepsilon$, δηλ. $g \circ f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} g \circ f$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 2 :</u> Έστω $f_n : [a, \beta] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

και έστω $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$

Αν $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη <u>και</u> $\displaystyle\int_a^\beta f_n(x)\,dx \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_a^\beta f(x)\,dx$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>

Η ολοκληρωσιμότητα της f αποδεικνύεται με το κριτήριο του Riemann. (δες στις σημειώσεις)

Τότε $$\left| \int_a^\beta f(x)\,dx - \int_a^\beta f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^\beta (f(x) - f_n(x))\,dx \right| \leq \int_a^\beta \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}\,dx \leq$$

$$\overset{\boxed{}}{\leq} \int_a^\beta \|f_n - f\|_\infty\,dx = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\downarrow \ 0 \ \text{διότι } f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f} \cdot (\beta - a) \to 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in [a, \beta] \\ |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \end{array}}$$

$\boxed{21}$ Αν $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς , $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ δείξτε ότι

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε: $$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx + \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x)\,dx - \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{1-\frac{1}{n}}^1 f(x)\,dx \right| + \left| \int_0^{1-\frac{1}{n}} (f(x) - f_n(x))\,dx \right| \leq \int_{1-\frac{1}{n}}^1 |f(x)|\,dx + \int_0^{1-\frac{1}{n}} |f(x) - f_n(x)|\,dx$$

$$\leq \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} \|f\|_\infty\,dx + \int_0^{1-\frac{1}{n}} \|f - f_n\|_\infty\,dx = \|f\|_\infty \cdot \underset{\downarrow\ 0}{\frac{1}{n}} + \underset{\downarrow\ 0}{\|f - f_n\|_\infty} \cdot \underset{\downarrow\ 1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \to 0$$