

8. (X, d) μετρικός χώρος, $F \subseteq X$.

Δείξτε ότι το F είναι κλειστό $\Leftrightarrow \forall K$ συμπαγές $\subseteq X$ το $F \cap K$ είναι κλειστό.

($\Rightarrow$) Αν το F είναι κλειστό και αν K συμπαγές, τότε το K είναι κλειστό, άρα το $F \cap K$ είναι κλειστό (επί δύο κλειστών).

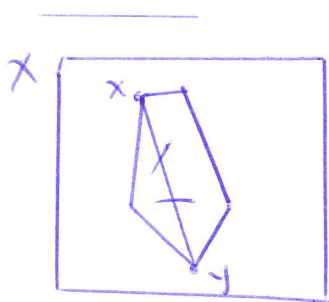
($\Leftarrow$) Έστω (x_n) ακολουθία στο F και έστω ότι $x_n \rightarrow x \in X$.

Θα δείξουμε ότι $x \in F$.

Το σύνολο $K = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές (έχει χίμα).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Τώρα: } x_n \in F \cap K, \\ x_n \rightarrow x \\ F \cap K \text{ κλειστό} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in F \cap K \Rightarrow x \in F.$$

9. Έστω K συμπαγές $\subseteq (X, d)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0, y_0 \in K$:
 $d(x_0, y_0) = \text{diam}(K)$.



Έδώ έχουμε $\text{diam}(K) = \sup \{d(x, y) : x, y \in K\} < \infty$ για το K είναι συμπαγές, άρα φραγμένο.

Θέλουμε να δείξουμε ότι το $\sup$ είναι $\max$.

Α' ερμηνεία: Η $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = d(x, y)$.

Είναι συνεχής (στον $X \times X$ έχουμε οποιαδήποτε μετρική γινόμενο).

Το $K \times K$ είναι συμπαγές $\subseteq X \times X$. Άρα η f παίρνει μέγιστη τιμή.

Αντίστροφα $\exists (x_0, y_0) \in K \times K$ ώστε $\forall (x, y) \in K \times K$.

$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ δηλ. $d(x, y) \leq d(x_0, y_0)$. Άρα:

$$d(x, y) = \max \{d(x, y) : x, y \in K\} = \text{diam}(K).$$

Β' ερμηνεία: Αριθμός χαρακτηριστικό του supremum,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, y_n \in K : \text{diam}(K) - \frac{1}{n} < d(x_n, y_n) \leq \text{diam}(K).$$

$$K \text{ συμπαγής} \Rightarrow \exists x_{k_n} \rightarrow x_0 \in K \Rightarrow x_{k_{n_k}} \rightarrow x_0$$

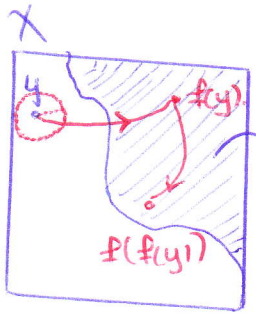
$$\text{Θεωρούμε την } (y_{k_n}) : \exists y_{k_{n_k}} \rightarrow y_0 \in K.$$

$$\text{Τότε: } d(x_{k_{n_k}}, y_{k_{n_k}}) \rightarrow \text{diam}(K).$$

$$\downarrow$$

$$d(x_0, y_0).$$

14.* (α) Έστω (X, d) συμπαγής χώρος και έστω $f: X \rightarrow X$ ισομετρία. Δείξτε ότι η f είναι επί.



Έστω ότι $f(X) \neq X$.

Τότε υπάρχει $y \in X$ και $y \notin f(X)$.

ΠΑΡΑΣΗΡΗΣΗ: Η f είναι συνεχής ως ισομετρία και το X είναι συμπαγές $\Rightarrow$

$f(X)$ συμπαγές $\Rightarrow f(X)$ κλειστό σύνολο.

$$\forall x, y \in X$$

$$d(fx, fy) = d(xy)$$

ισομετρία

Υπάρχει $\varepsilon > 0$: $B(y, \varepsilon) \subseteq X \setminus f(X)$ δηλ. $B(y, \varepsilon) \cap f(X) = \emptyset$ ανοιχτό

Αρα, $\forall x \in X \quad d(y, f(x)) \geq \varepsilon$. Θεωρούμε $x_1 = y, x_2 = f(y), x_3 = f(x_2) = f^2(y)$ και γενικά $x_{n+1} = f(x_n)$.

Εστί ορίζεται μια ακολουθία, για την οποία ισχύει το εξής:

$$(*) \quad \begin{aligned} \forall n \geq 2 \quad d(x_{n+1}, x_n) &= d(f(x_n), f(x_{n-1})) \stackrel{\text{ισομετρία}}{=} d(x_n, x_{n-1}) \\ &= \dots = d(x_2, x_1) = d(f(y), y) \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Η (x_n) είναι στον συμπαγή X , αρα έχει συγκλίνουσα υποακολουθία (x_{k_n}) . Τότε, η (x_{k_n}) είναι βασική. Αρα υπάρχει n_0 :

$$\forall n > m \geq n_0 : d(x_{k_n}, x_{k_m}) < \varepsilon.$$

Απογο, γιατί ισχύει και ισχυρότερο από την (*):

(**) "Αν $r > s$, τότε $d(x_r, x_s) \geq \varepsilon$ ". Προήγαγε, όπως στην (*).

$$\begin{aligned} d(x_r, x_s) &= d(x_{r-1}, x_{s-1}) = d(x_{r-2}, x_{s-2}) = \dots = d(x_{r-s+1}, x_1) = \\ &= d(f(x_{r-s}), y) \geq \varepsilon. \text{ Απογο.} \end{aligned}$$

11. (α). $A_1, \dots, A_m$ ολικά φραγμένα $\Rightarrow A_1 \cup \dots \cup A_m$ ολ. φραγμένο.

(β). A ολικά φραγμένο $\Rightarrow \bar{A}$ ολικά φραγμένο.

(α). Έστω $\varepsilon > 0$.

$$A_1 \text{ ολ. φραγμένο } \Rightarrow \exists x_{11}, \dots, x_{1s_1} \in X, A_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{s_1} B(x_{1j}, \varepsilon)$$

⋮

$$A_m \text{ ολ. φραγμένο } \Rightarrow \exists x_{m1}, \dots, x_{ms_m} \in X, A_m \subseteq \bigcup_{j=1}^{s_m} B(x_{mj}, \varepsilon).$$

$$\text{Τότε } A_1 \cup \dots \cup A_m \subseteq \underbrace{\bigcup_{k=1}^m \bigcup_{j=1}^{s_k} B(x_{kj}, \varepsilon)}_{\text{πεπ. το πλήθος μπάλες}}$$

πεπ. το πλήθος
μπάλες

$$s_1 + \dots + s_m < \infty.$$

A ολικά φραγμένο.
ανν
 $\forall \varepsilon > 0 \exists m, \exists x_1, \dots, x_m \in X$
 $: A \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_m, \varepsilon)$

(β). Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορώ να βρω $x_1, \dots, x_m \in X$:

$$A \subseteq B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup B(x_m, \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\Rightarrow \bar{A} \subseteq \overline{B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup B(x_m, \frac{\varepsilon}{2})}$$

$$= \overline{B(x_1, \frac{\varepsilon}{2})} \cup \dots \cup \overline{B(x_m, \frac{\varepsilon}{2})}$$

$$\subseteq \hat{B}(x_1, \frac{\varepsilon}{2}) \cup \dots \cup \hat{B}(x_m, \frac{\varepsilon}{2})$$

$$\subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_m, \varepsilon)$$

12 (α). $f: X \rightarrow Y$ ομομορφία συνεχής. Αν A ολικά φραγμένο, τότε

το $f(A)$ είναι ολικά φραγμένο.

(β). Ισχύει το ίδιο για ομομορφισμούς;

(α). Έστω ότι $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} & \text{Η } f \text{ είναι ομομορφία συνεχής άρα} \\ (x) \parallel & \exists \delta > 0, \text{ αν } x, y \in X \text{ και } d(x, y) < \delta \\ & \text{τότε } d(f(x), f(y)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

-4-

Το A είναι ολικά φραγμένο, από υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in X$ ώστε

$$A \subseteq B(x_1, \delta) \cup \dots \cup B(x_m, \delta) \Rightarrow f(A) \subseteq f(B(x_1, \delta)) \cup \dots \cup f(B(x_m, \delta)) \\ \subseteq B(f(x_1), \varepsilon) \cup \dots \cup B(f(x_m), \varepsilon).$$

(B). ΟΧΙ. Η $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$

μ. χώρος με
την νόρμα.

Είναι
ομοιομορφισμός.

Αν $x \in X$ και $y \in B(x, \delta)$
τότε $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$
δηλ.
 $\forall x \in X \ f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$

Το $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ είναι ολικά φραγμένο, ενώ το $\mathbb{R}$ όχι.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:

1. Κάθε (a, b) είναι ολικά φραγμένο ως προς την 1.1.

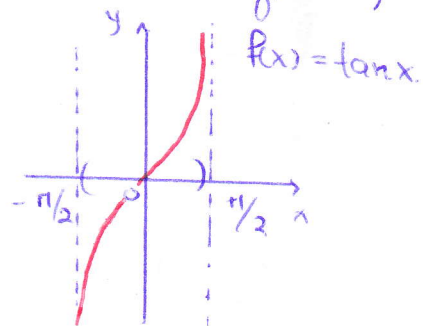
2. Γενικά κάθε ολικά φραγμένο σύνολο είναι φραγμένο.

(για $\varepsilon=1$, $A \subseteq B(x_1, 1) \cup \dots \cup B(x_m, 1)$ = φραγμένο (ως ένωση φραγμένων) -

το $\mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο

13 Έστω (x_n) βασική ακολουθία
στον (X, d) .

Τότε το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.



Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) : \forall n, m \geq n_0 \ d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Ειδικότερα $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \ d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$, δηλ. $\forall n \geq n_0 \ x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon)$

Τότε $A \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_{n_0}, \varepsilon)$.

$\nearrow$
 x_1

$\cup$
όλοι οι x_n ,
 $n \geq n_0$

15 Έστω (X, d) συμπαγής μ. χώρος, (F_n) φθίνουσα ακολουθία

κλειστών υποσυνόλων του X .

(α). Αν $G \subseteq X$ ανοικτό και $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G$, δείξτε ότι $\exists n_0 : F_{n_0} \subseteq G$.

(β). Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, δείξτε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \emptyset$.

(γ). Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ δείξτε ότι $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$.

Το (B) έπεται από το (α). Για $G = \emptyset$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = G$ (αφού $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$)

(α) $\Rightarrow \exists m : F_m \subseteq G = \emptyset$, οπότε $F_m = \emptyset$.

(α). Έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G \Rightarrow \chi \mid G \subseteq \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$

Επομένως: $\chi = G \cup (\chi \mid G) = G \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c \right)$

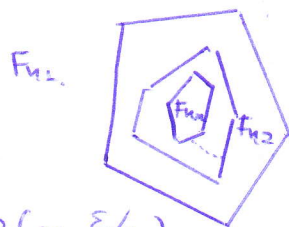
αυτοίχτη κάλυψη
του χ .

Ο χ είναι συμπαγής, άρα $\exists n_1 < n_2 < \dots < n_m$:

$\chi = G \cup F_{n_1}^c \cup \dots \cup F_{n_m}^c = G \cup F_{n_m}^c$. Αφού $\chi = G \cup F_{n_m}^c$

έχουμε $F_{n_m} \subseteq G$

το πιο μεγάλο
είναι το $F_{n_m}^c$
διότι (F_n) φθίνουσα



(γ). Έστω $\varepsilon > 0$. Έχουμε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\} \subseteq B(x, \varepsilon/3)$

G .

Από το (α) υπάρχει n_0 :

$F_{n_0} \subseteq B(x, \varepsilon/3) \Rightarrow \text{diam}(F_{n_0}) \leq \text{diam}(B(x, \varepsilon/3)) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

Αρα $\forall n \geq n_0$ έχουμε: $F_n \subseteq F_{n_0} \Rightarrow (-\varepsilon < 0 \leq) \text{diam}(F_n) \leq \text{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$.

(F_n) φθίνουσα.

Αρα, $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$.

16. $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ συνεχής, και $k_1 \supseteq k_2 \supseteq \dots \supseteq k_n \supseteq k_{n+1} \supseteq \dots$
μη κενά συμπαγή $\subseteq X$. Δείξτε ότι:

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} k_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(k_n)$$

Ξεχωρίστε $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} k_n \neq \emptyset$ ((k_n) είναι φθίνουσα ακολουθία
μη κενών συμπαγών $\subseteq (X, d)$ συμπαγής
και εφαρμόζεται η ιδιότητα πεπ. εσφών).

" $\subseteq$ " $\forall n \quad K \subseteq K_n \Rightarrow \forall n, f(K) \subseteq f(K_n) \Rightarrow f(K) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$.

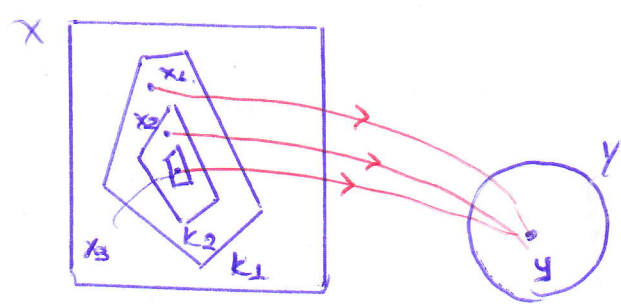
" $\supseteq$ " Πάιρνουμε $\left[y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n) \right]$ και $\exists$ τότε $x \in K (= \bigcap K_n) : y = f(x)$.
(τότε $y \in f(K)$).

$\forall n \quad y \in f(K_n) \Rightarrow \forall n \quad \exists x_n \in K_n : y = f(x_n)$

Αφού η (x_n) είναι στο συμπαγές K_1 , υπάρχει

$x_{k_n} \rightarrow x \in K_1$.

Τότε $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) \Rightarrow \boxed{f(x) = y}$



Μένει να δείξουμε ότι: $x \in K = \bigcap_{s=1}^{\infty} K_s$

Έστω $s \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $n_0 : \forall n \geq n_0 \quad K_n \subseteq K_s$.

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad x_{k_n} \in K_{k_n} \subseteq K_s$. ((k_n) φθίνουσα)

Αφού η $x_{k_n} \rightarrow x$, το K_s είναι κλειστό και ολοι τελικά οι $x_{k_n} \in K_s$.

Πάιρνουμε $x \in K_s$, το s ήταν τυχόν, άρα $x \in \bigcap_{s=1}^{\infty} K_s = K$.

18.* Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f: X \rightarrow X$ με την ιδιότητα: (συμπαγής).

"αν $x \neq y$ στο X τότε $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ ".

Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο $\exists x_0 \in X : f(x_0) = x_0$.

Τότε $x_0 : d(x_0, f(x_0)) = 0$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $G: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$G(x) = d(x, f(x))$.

Η G είναι συνεχής: αν $x_n \rightarrow x$ τότε $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

$\Rightarrow d(x_n, f(x_n)) \rightarrow d(x, f(x))$, δηλ. $G(x_n) \rightarrow G(x)$.

Ο X είναι συμπαγής, άρα η G παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $x_0 \in X$.

$f(x) = \log(1+e^x)$
 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$
αν $x \neq y$
άρα δεν έχει
σταθερό σημείο

Ισχυρισμός: $G(x_0) = d(x_0, f(x_0)) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$.

Έστω ότι $G(x_0) > 0$. Τότε, $x_0 \neq f(x_0)$. Από την υπόθεση,

$$d(f(x_0), f(f(x_0))) < d(x_0, f(x_0))$$

$$\begin{array}{ccc} & & \text{"} \\ & & G(x_0) \\ \text{"} & & \\ G(f(x_0)) & & \end{array}$$

Αποφο, γιατί το $G(x_0)$ ήταν η ελάχιστη τιμή της G .

[19]* (X, d) συμπαγής $\Leftrightarrow \forall$ φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών κλειστών $\subseteq X$ ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

$(\Rightarrow)$ $\forall n_1 < n_2 < \dots < n_m : F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_m} \neq \emptyset$.

$$\begin{array}{c} \Rightarrow \\ \text{ιδιότητα} \\ \text{ΠΕΗ. τερών} \end{array} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

$(\Leftarrow)$ Ο X είναι πλήρης: Θα χρησιμοποιήσουμε το αντίστροφο του Θ. Cantor.

Έστω (F_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών $\neq \emptyset \subseteq X$, με $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$.

$\Rightarrow \exists (F_n)$ φθίνουσα ακολουθία κλειστών $\neq \emptyset \subseteq X \Rightarrow$ ΥΠΟΘΕΣΗ.

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

Από το αντίστροφο του Θ. Cantor, ο X είναι πλήρης.

• Ο X είναι ολικά φραγμένος: Έστω ότι δεν είναι:

Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος βρίσκουμε $\varepsilon > 0$, και ακολουθία,

(x_n) στον X ώστε: " $\forall n \neq m \quad d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ ".

Ορίζουμε: $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ το n -όστο τελικό τμήμα της x_n .

Αν δείξουμε ότι κάθε F_n είναι ελάστω. Θα παίρουμε άτοπο, γιατί

$\exists (F_n)$ είναι φθίνουσα και $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$

Κάθε F_n είναι κλειστό: Δείχνουμε ότι $F_n' = \emptyset \Rightarrow \bar{F}_n = F_n \cup F_n'$

Με ατοπο: Έστω $x \in F_n'$. Στην $B(x, \varepsilon/3)$ υπάρχουν σημεία σημεία του F_n . Από $\exists m \neq s$ (μεγ. ή ισά του n)

ώστε: $x_m, x_s \in B(x, \varepsilon/3) \Rightarrow d(x_m, x_s) \leq d(x_m, x) + d(x_s, x)$

$$< \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \text{ ΑΞΟΠΟ.}$$