

Προτάσεις Για συμπαχείς Μετρικούς Χώρους1 και 2

Κάθε συμπαχής $K \subseteq (X, d)$ είναι κλειστό και φραχμένο σύνολο (το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά)

3

Αν ο X είναι συμπαχής και το K είναι κλειστό $\subseteq X$, τότε το K είναι συμπαχές.

4

Κάθε ολικά φραχμένο (X, d) , άρα και κάθε συμπαχής (X, d) , είναι διαχωρίσιμος.

5

Αν ο X είναι συμπαχής, τότε κάθε συνεχής $f: X \rightarrow Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

6

Έστω $f: X \rightarrow Y$ συνεχής. Αν $K \subseteq X$ συμπαχής, τότε το $f(K)$ είναι συμπαχές $\subseteq Y$.

7

Αν ο X είναι συμπαχής και η $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τότε παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Δεύτερη Απόδειξη της 6

Έστω $(V_i)_{i \in I}$ μια ανοιχτή κάλυψη του $f(K)$. Ορίζουμε $U_i = f^{-1}(V_i)$ με $i \in I$. Αφού κάθε V_i είναι ανοιχτό $\subseteq Y$ και η f είναι συνεχής έχουμε ότι κάθε U_i είναι ανοιχτό $\subseteq X$. Έχουμε $f(K) \subseteq \bigcup_{i \in I} V_i \Rightarrow$
 $\Rightarrow K \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i$

Άρα η $(U_i)_{i \in I}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του K .

Το K είναι συμπαχές, άρα $\exists i_1, i_2, \dots, i_m \in I$ ώστε

$$K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \Rightarrow f(K) \subseteq f(U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}) = f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_m}) \\ \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}$$

Άρα βρήκαμε πεπερασμένη υποκάλυψη της $(V_i)_{i \in I}$ για το $f(K)$.

Πρόταση 8

Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ συνεχής, 1-1 και επί. Τότε γ & f είναι ομοιομορφισμός.

Απόδειξη

Ας γράψουμε $g = f^{-1}: Y \rightarrow X$. Αρκεί να δείξουμε ότι γ & g είναι συνεχής.

Έστω K κλειστό υποσύνολο του X . Θα δείξουμε ότι το $g^{-1}(K)$ είναι κλειστό $\subseteq Y$.

- $g^{-1}(K) = (f^{-1})^{-1}(K) = f(K)$
- K κλειστό $\subseteq X$ και ο X συμπαγής $\Rightarrow K$ συμπαγής $\Rightarrow f(K)$ κλειστό, f συνεχής

Πρόταση 9 (Ιδιότητα Πηληραβμένων Τομών)

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (α) Ο (X, d) είναι συμπαγής
- (β) Αν $(F_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια ^{μη κενών} κλειστών υποσυνόλων του X , τέτοια ώστε $\forall J \subseteq I$ πηληραβμένο $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$. Τότε $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

Απόδειξη

(α) $\Rightarrow$ (β)

Έστω $(F_i)_{i \in I}$ κλειστά με ^{συν}ιδιότητα $\forall J \subseteq I$ πηληραβμένο $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$.

Έστω ότι $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} F_i)^c = X \Rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i^c = X$

Δηλαδή γ $(G_i)_{i \in I}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του X .
 $G_i = \text{ανοιχτό}$

Ο X είναι συμπαγής, άρα υπάρχει $J \subseteq I$ πηληραβμένο ώστε

$$X = \bigcup_{i \in J} G_i \Rightarrow \emptyset = \left(\bigcup_{i \in J} G_i \right)^c = \bigcap_{i \in J} G_i^c = \bigcap_{i \in J} F_i \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

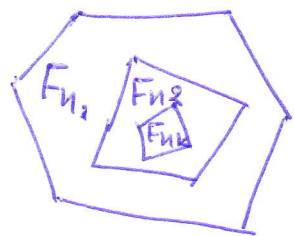
(β) $\Rightarrow$ (α) ΟΜΟΙΑ

Παρατήρηση (Σχέση με Θεώρημα Cantor)

Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών $\subseteq X$.

(Δεν υποθέτουμε ότι $d(F_n) \rightarrow 0$).

Αν $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ στο $\mathbb{N}$ τότε $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \dots \cap F_{n_k} = F_{n_k} \neq \emptyset$



Αφού ο X είναι συμπαγής, η πρόταση 9 μας δίνει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

Πρόταση 10

Έστω $K \subseteq (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$. Τότε το K είναι συμπαγές αν και μόνο αν το K είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη (Χρησιμοποιώ απόδειξη μόνο $\Leftarrow$)

Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^m$ κλειστό και φραγμένο.

Παίρνουμε (x_n) στο K και δείχνουμε ότι υπάρχουν (x_{k_n}) και $x \in K$ ώστε $x_{k_n} \rightarrow x$.

• Το K είναι φραγμένο, άρα η (x_n) είναι φραγμένη.

• Έχουμε δείξει ότι στον $\mathbb{R}^m$ κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συχρινούσα υποακολουθία.

Άρα υπάρχουν (x_{k_n}) και $x \in \mathbb{R}^m$ ώστε $x_{k_n} \rightarrow x$.

• Όμως $\left. \begin{array}{l} x_{k_n} \in K \\ x_{k_n} \rightarrow x \\ x \text{ κλειστό} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in K$

Πρόταση 11

Έστω $X_1, X_2, \dots, X_m$ συμπαγείς μετρικοί χώροι. Αν d μια μετρική χιρόμερο στον $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$, έχουμε ότι ο

$(X_1 \times \dots \times X_m, d)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη

Θα το κάνουμε για $X \times Y \times Z$.

• Έστω $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ μια ακολουθία στον $X \times Y \times Z$.

• $\alpha_n \in X$ και X συμπαγής $\Rightarrow \exists \alpha_{k_n} \rightarrow \alpha \in X$.

• $\beta_{k_n} \in Y$ και Y συμπαγής $\Rightarrow \exists \beta_{k_{\lambda_n}} \rightarrow \beta \in Y$.

Επίσης $\alpha_{k_n} \rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha_{k_{\lambda_n}} \rightarrow \alpha$.

• $\gamma_{k_{\lambda_n}} \in Z$ και Z συμπαγής $\Rightarrow \exists \gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \rightarrow \gamma \in Z$

και αφού $\left. \begin{array}{l} \alpha_{k_{\lambda_n}} \rightarrow \alpha \\ \beta_{k_{\lambda_n}} \rightarrow \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \rightarrow \alpha \\ \beta_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \rightarrow \beta \end{array} \right\}$

Έχουμε $\alpha_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \rightarrow \alpha$

$\beta_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \rightarrow \beta$

$\gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}} \rightarrow \gamma$

d μετρική

$\Rightarrow$

συνόριο

$(\alpha_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, \beta_{k_{\lambda_{\mu_n}}}, \gamma_{k_{\lambda_{\mu_n}}}) \xrightarrow{d} (\alpha, \beta, \gamma)$

$\downarrow$
ακολουθία της

$(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$

Άρα ο $X \times Y \times Z$ είναι ακολουθιακά συμπαγής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

③ Αν A, B συμπαγή υποχώροι του (X, d) τότε το $(A \cup B)$ είναι συμπαγές (επαγωγικά ισχύει και για πετρεαβμένη ένωση συμπαγών συνόλων).

Α' τρόπος

Έστω $(U_i)_{i \in I}$ ανοιχτή κάλυψη του $A \cup B$. Τότε

$A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \xrightarrow{A} A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ $\xRightarrow{A \text{ συμπαγής}} \exists I_1 \subseteq I$ πετρεαβμένο ώστε $A \subseteq \bigcup_{i \in I_1} U_i$
και $B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \xrightarrow{B} B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ $\xRightarrow{B \text{ συμπαγής}} \exists I_2 \subseteq I$ πετρεαβμένο ώστε $B \subseteq \bigcup_{i \in I_2} U_i$

τότε $A \cup B \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ Άρα βρέκαμε πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i \in I}$.

πεπερασμένο χέρι I_1, I_2 πεπερασμένα.

B' τρόπος

Έστω (x_n) ακολουθία στο $A \cup B$.

Είτε υπάρχει (x_{k_n}) στο A ή υπάρχει (x_{λ_n}) στο B

$A \Downarrow$ συμπαγές

$B \Downarrow$ συμπαγές

$\exists x_{k_{\mu_n}} \rightarrow x \in A$
 $\Downarrow$
 $x \in A \cup B$

$\exists x_{\lambda_{\mu_n}} \rightarrow x \in B$
 $\Downarrow$
 $x \in A \cup B$

Άρα βρέκαμε υποακολουθία της (x_n) που συγκλίνει σε σύμμετρο του $A \cup B$.

(4) Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $E, F \subseteq X$ με E συμπαγές, F κλειστό, $E \cap F = \emptyset$.

Αποδείξτε ότι $\text{dist}(E, F) = \inf \{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$

Απόδειξη

Ορίζουμε $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \text{dist}(x, F)$

Η f είναι Lipschitz με σταθερά 1,

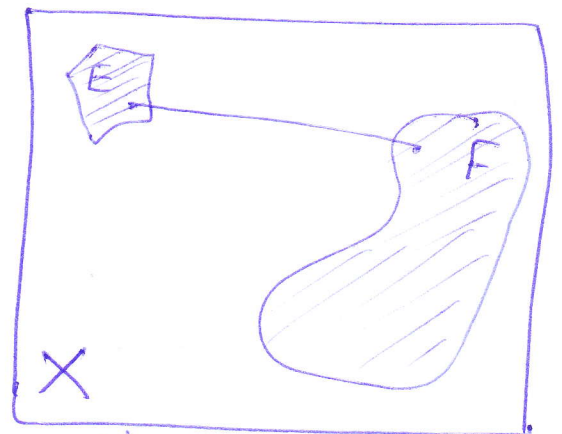
άρα συνεχής. Επίσης, $\forall x \in E$ έχουμε

$x \notin F$ και F κλειστό $\Rightarrow f(x) = \text{dist}(x, F) > 0$

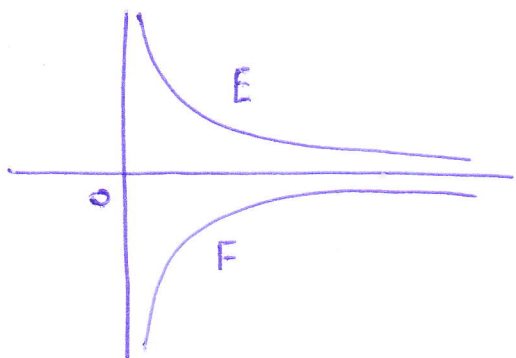
Αφού το E είναι συμπαγές, η f παίρνει ελάχιστη τιμή:
υπάρχει $x_0 \in E : \forall x \in E \quad f(x) \geq f(x_0) > 0$

Έστω $x \in E$ και $y \in F$. Τότε $d(x, y) \geq \text{dist}(x, F) = f(x) \geq f(x_0)$

Άρα $\text{dist}(E, F) = \inf \{d(x, y) : x \in E, y \in F\} \geq f(x_0) > 0$.



Παράδειγμα



$$E = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right), x > 0 \right\}$$

$$F = \left\{ \left(x, -\frac{1}{x} \right), x > 0 \right\}$$

ελάχιστο - είναι

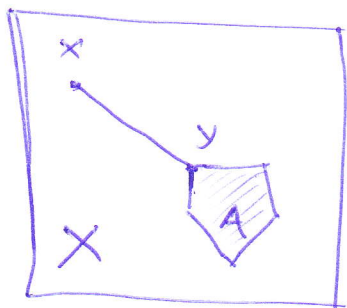
$$\begin{aligned} \text{dist}(E, F) &\leq \left\| \left(x, \frac{1}{x} \right) - \left(x, -\frac{1}{x} \right) \right\|_2 = \\ &= \left\| \left(0, \frac{2}{x} \right) \right\|_2 = \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

⑤ Έστω (X, d) μετρικός χώρος

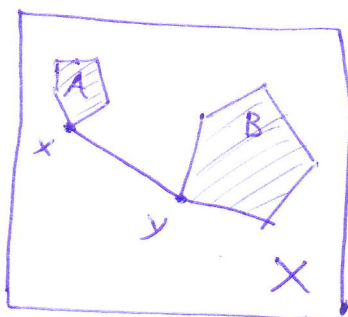
(α) Αν $x \in X$ και $A \subseteq X$ συμπαγής, τότε $\exists y \in A : d(x, A) = d(x, y)$

(β) Αν $A, B \subseteq X$ συμπαγής, τότε $\exists x \in A \exists y \in B : \text{dist}(A, B) = d(x, y)$

(α)



(β)



(α) Ορίσουμε $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(y) = d(x, y)$. Η f είναι συνεχής άρα παίρνει ελάχιστη τιμή στο συμπαγές A :

$$\exists y_0 \in A : \forall y \in A \quad f(y) \geq f(y_0)$$

$$\Rightarrow \forall y \in A \quad d(x, y) \geq d(x, y_0)$$

$$\Rightarrow d(x, y_0) = \min \{ d(x, y) : y \in A \} = \text{dist}(x, A)$$

Additōs

Έχουμε $d(x, A) = \inf \{ d(x, y), y \in A \}$

$$\forall n \quad \exists y_n \in A : d(x, A) \leq d(x, y_n) < d(x, A) + \frac{1}{n}$$

Η y_n έχει υποσειρά $y_{k_n} \rightarrow y_0 \in A$ (Α συμπαγής)

$$\text{Τότε } d(x, A) \leq d(x, y_{k_n}) < d(x, A) + \frac{1}{k_n}$$

$$\downarrow$$

$$d(x, y_0)$$

$$\downarrow$$

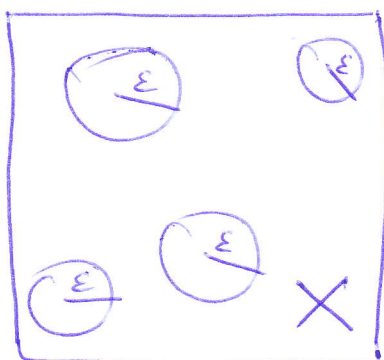
$$d(x, A)$$

$$\text{Άρα } d(x, y_0) = d(x, A)$$

(B) Θεωρούμε το $\text{dist}(A, B) = \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ να είναι minimum.
 Ορίζουμε $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = d(x, y)$
 Η f είναι συνεχής και το $A \times B$ συμπαγές υποσύνολο του $X \times X$.
 Άρα η f παίρνει ελάχιστη τιμή.

- Έστω X έχουμε τη μετρική d , έστω $X \times X$ μια μετρική δινόμενο τ
- Η f είναι συνεχής: $(x_n, y_n) \xrightarrow{\tau} (x, y) \xRightarrow[\text{μετρ. διν. } y_n \xrightarrow{\tau} y]{x_n \xrightarrow{\tau} x} d(x_n, y_n) \xrightarrow{\tau} d(x, y)$
- Δηλαδή $f(x_n, y_n) \rightarrow f(x, y)$
- $A \times B$ συμπαγές $\subseteq (X \times X, \tau)$ διότι A, B συμπαγή $\subseteq (X, d)$ Πρόταση 11
- Η f παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $(x_0, y_0) \in A \times B$
- Δηλαδή $\forall x \in A \forall y \in B \quad d(x, y) \geq d(x_0, y_0)$
 $\Rightarrow d(x_0, y_0) = \min \{d(x, y) : x \in A, y \in B\} = \text{dist}(A, B)$.

(6) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι Ξεχω ώστε $\forall x \in X$
 η $B(x, \varepsilon)$ είναι συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι ο X είναι
 πλήρης.



Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X .

Άρα για το συγκεκριμένο ε , υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Ειδικότερα $\forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$.

Δηλαδή το τελικό υψήμα $\{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots\}$

της (x_n) περιέχεται στην $B(x_{n_0}, \varepsilon) \subseteq B(x_{n_0}, \varepsilon)$.

Αφού η $B(x_{n_0}, \varepsilon)$ είναι συμπαγές σύνολο (υπόθεση) έχουμε
 υποακολουθία (x_{k_n}) της $(x_n)_{n \geq n_0}$ η οποία συγκλίνει σε ένα
 $x \in X$. Η (x_{k_n}) είναι υποακολουθία της (x_n) και συγκλίνει,
 η (x_n) είναι βασική άρα η (x_n) συγκλίνει.

Σωστό ή Λάθος?

Υποθέτουμε ότι $\forall x \in X \exists \varepsilon_x > 0$ ώστε η $\overline{B(x, \varepsilon_x)}$ να είναι συμπαγής σύνολο. Είναι ο X πλήρης;

Οχι το $(0, 1)$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι πλήρες
(δεν είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$).

Έστω $x \in (0, 1)$. Έχουμε $0 < x < 1 \Rightarrow \exists$ μικρό $\varepsilon_x > 0 : 0 < x - \varepsilon_x < x < x + \varepsilon_x < 1$
τότε $\overline{B(x, \varepsilon_x)} = [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x] \subseteq (0, 1)$.

(10) Έστω $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:
_{συμπαγής}

(α) Η f συνεχής

(β) Το γραφικό $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ είναι κλειστό $\subseteq (X \times Y, \tau)$
 $= \{(x, y) : y = f(x)\}$ μετρική χιρόμετρο

(α) $\Rightarrow$ (β) (Δν χρειάζεται η συμπαγής του Y)

Έστω $(x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y) \in X \times Y$, θα δείξουμε ότι $(x, y) \in \Gamma(f)$.

$\cdot (x_n, f(x_n)) \rightarrow (x, y) \xLeftrightarrow[\text{μετρική χιρόμετρο}]{\text{μετρική χιρόμετρο}} \left\{ \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \\ f(x_n) \rightarrow f(x) \end{array} \right\} \xRightarrow[\text{Δηλαδή}]{\text{συνεχής}} \left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \\ (x, y) \in \Gamma(f) \end{array} \right.$

(β) $\Rightarrow$ (α)

Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής σε κάποιο $x \in X$.
Τότε υπάρχουν (x_n) και $\varepsilon > 0$ ώστε:

$x_n \rightarrow x$ αλλά $\forall n \sigma(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$.

$\cdot$ Η $(f(x_n))$ είναι στον συμπαγή μετρικό χώρο Y .

Άρα υπάρχει $f(x_{k_n}) \rightarrow y \in Y$

$\cdot$ Αφού $x_n \rightarrow x$ έχουμε και $x_{k_n} \rightarrow x$

Άρα (έχω μετρική χιρόμετρο στον $X \times Y$) $(x_{k_n}, f(x_{k_n})) \rightarrow (x, y)$
 $\uparrow$
 $\Gamma(f)$

• Αφού το $\Gamma(f)$ είναι κλειστό, έχουμε $(x, y) \in \Gamma(f)$ Δηλαδή $y = f(x)$. Τότε $f(x_{k_n}) \rightarrow y = f(x)$ Δηλαδή $\sigma(f(x_{k_n}), f(x)) \rightarrow 0$ Αποπο $\forall n \sigma(f(x_{k_n}), f(x)) \geq \varepsilon$.