ΟΡΙΣΜΟΣ :- Το $K \subseteq (X,d)$ λέγεται συμπαγές αν για κάθε ανοιχτή κάλυψη $(U_i)_{i\in I}$ του K μπορούμε να βρούμε πεπερασμένη υποκάλυψη δηλ. $i_1, \dots, i_m \in I$ ώστε $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$.

[ΜΑΘΗΜΑ 20ο
16-12-14.]

- Το $A \subseteq (X,d)$ είναι ολικά φραγμένο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Ο X είναι συμπαγής.

(β) Κάθε άπειρο $A \subseteq X$ έχει σημείο συσσώρευσης.

(γ) Κάθε ακολουθία (x_n) στον (X,d) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

(δ) Ο X είναι ολικά φραγμένος και πλήρης.

Δυο παρατηρήσεις.

(α) (ΑΣΚΗΣΗ 1). Το $K \subseteq (X,d)$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν ο μετρικός υπόχωρος (K,d) είναι συμπαγής μ. χώρος.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$). Έστω U_i ανοιχτά σύνολα στην (K,d) ώστε

$K = \bigcup_{i\in I} U_i$. Για κάθε $i \in I$ υπάρχει $V_i \subseteq X$ ανοιχτό (στον X) ώστε $U_i = K \cap V_i \subseteq V_i$

$\Rightarrow K = \bigcup_{i\in I} U_i \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i \Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_m$ ώστε

$K \subseteq V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m} \Rightarrow$

[Το $U \subseteq K$ είναι ανοιχτό στον (K,d)
$\Leftrightarrow$
$\exists\, V \subseteq X$ ανοιχτό, $U = K \cap V$.]

$K = K \cap K \subseteq K \cap (V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}) = (K \cap V_{i_1}) \cup \dots \cup (K \cap V_{i_m}) =$
$= U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$.

($\Leftarrow$). Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ανοιχτή κάλυψη του K.

(1) $K \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$ (2) G_i είναι ανοιχτό στον X

$\Rightarrow V_i \underset{op.}{=} K \cap G_i$ ανοιχτό στον (K, d).

Από (1). $K = K \cap K \subseteq \bigcup_{i \in I} (K \cap G_i) = \underbrace{\bigcup_{i \in I} V_i}_{\text{ανοιχτή κάλυψη.}}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow} \exists\, i_1, \dots, i_m$ ώστε:

$$K = \underbrace{V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_m}}_{} \subseteq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_m}.$$

(*) (K, d) συμπαγής μ. χώρος.

Δηλ. έχουμε βρει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

(B). Ένα $A \subseteq (X, d)$ είναι ολικά φραγμένο $\iff$

$\forall \varepsilon > 0$, υπάρχουν $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_m \in A$

ώστε $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(a_j, \varepsilon)$.

Απόδειξη: $(\Leftarrow)$ Άμεσο.

$(\Rightarrow)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in X$ ώστε

$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon/2)$ (Εφαρμόζουμε τον ορισμό, με $\varepsilon/2$)

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $\forall j = 1, \dots, m$ $B(x_j, \varepsilon/2) \cap A \neq \emptyset$.

Για κάθε $j = 1, \dots, m$ επιλέγουμε $a_j \in B(x_j, \varepsilon/2) \cap A$.

Τότε: $B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B(a_j, \underbrace{d(x_j, a_j)}_{< \varepsilon/2} + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B(a_j, \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}) =$

$= B(a_j, \varepsilon)$.

Τότε (1) $a_j \in A$.

(2) $A \subseteq \bigcup B(x_j, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq \bigcup B(a_j, \varepsilon)$.

Μια μικρή άσκηση:

- Αν A ολικά φραγμένο $\subseteq X$ και $\Gamma \subseteq A$ τότε το Γ είναι ολικά φραγμένο.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in X$ και $A \subseteq \bigcup B(x_j, \varepsilon)$.

Άρα $\Gamma \subseteq \bigcup B(x_j, \varepsilon)$. Επομένως Γ ολικά φραγμένο.

Άλλη άσκηση

$A \subseteq (X, d)$ ολικά φραγμένο $\iff$ ο (A, d) είναι ολικά φραγμένο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.

Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $K \subseteq X$, συμπαγές. Τότε το K είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη: (1^{η}). Έστω $x_n \in K$. και έστω ότι $x_n \to x \in X$.

Θα δείξουμε ότι $x \in K$. Η (x_n) είναι ακολουθία στον συμπαγή χώρο (K, d). Από το ΘΕΩΡΗΜΑ, υπάρχει (x_{k_n}) και $y \in K$, ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{d} y$

Όμως $x_n \to x \Rightarrow x_{k_n} \to x$

$\Rightarrow x = y$ και $y \in K$.

$\Rightarrow x \in K$.

(2^{η}). Θα δείξουμε ότι το $X \setminus K$ είναι ανοιχτό. Έστω $y \in X \setminus K$.

Θα δείξουμε ότι το y είναι εσωτερικό σημείο του $X \setminus K$ δηλ. ότι

$\exists \delta > 0 : B(y, \delta) \subseteq X \setminus K. \iff B(y, \delta) \cap K = \varnothing$.

Έστω $x \in K$. Έχουμε: $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0$.

Άρα για $0 < \delta_x < \frac{d(x,y)}{2}$ έχουμε $B(x, \delta_x) \cap B(y, \delta_x) = \varnothing$.

Έχουμε: $K \subseteq \bigcup_{x \in K} B(x, \delta_x)$ $\xrightarrow{K \text{ συμπ.}}$ $\exists x_1, \dots, x_m \in K$, ώστε

ανοιχτή κάλυψη.

$K \subseteq B(x_1, \delta_{x_1}) \cup \dots \cup B(x_m, \delta_{x_m})$ $(*)$.

Ορίζουμε: $\delta = \min\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_m}\} > 0$.

Τότε $\forall j = 1, \dots, m$ $B(y,\delta) \subseteq B(y, \delta_x)$. $\Rightarrow$

$B(y,\delta) \cap B(x_j, \delta_x) = \emptyset$

Άρα, $B(y,\delta) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \delta_x) \right) = \emptyset \underset{*}{\Rightarrow} B(y,\delta) \cap K = \emptyset$.

(3^{η}). K συμπαγές $\Rightarrow (K,d)$ συμπαγής μ. χώρος $\Rightarrow (K,d)$ πλήρης.

$\xrightarrow{\text{κεφ. 5}}$ K κλειστό $\subseteq X$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο ενός μ.χωρου (X,d) τοτε το K είναι φραγμένο. Ειδικότερα, καθε συμπαγής μ. χωρος είναι φραγμένος

Απόδειξη: (1^{η}). Εστω $x \in K$. Ισχυει $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x,n)$

[Αν $y \in X$, τοτε υπάρχει φυσικός $n_y > d(x,y)$. και τότε $y \in B(x,n_y) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x,n)$] . $\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x,n)$ ανοιχτή καλυψη.

Αφου το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{N}$.

$K \subseteq B(x,n_1) \cup \dots \cup B(x,n_m)$.

Αν θέσουμε $n = \max\{n_1, \dots, n_m\}$ τοτε καθε $B(x,n_j) \subseteq B(x,n)$.

άρα $K \subseteq B(x,n) \Rightarrow K$ φραγμένο.

(2^{η}). Υποθετουμε οτι το K δεν είναι φραγμένο και ορίζουμε ακολουθία (x_n) στο K που δεν έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.

Αυτό ειναι ατοπο, διότι (K,d) συμπαγής μ. χωρος.

Παίρνουμε $x_1 \in K$. Υπάρχει $x_2 \in K$ $d(x_2,x_1) \geq 1$.

(αλλιως θα ειχαμε $K \subseteq B(x_1,1)$ δηλ. K φραγμενο).

Έστω ότι έχουμε βρει $x_1, \dots, x_n \in k$, με την ιδιότητα:

$i \neq j \Rightarrow d(x_i, x_j) \geq 1$.

Το $B(x_1, 1) \cup \dots \cup B(x_n, 1)$ είναι φραγμένο σύνολο. Αφού το k δεν είναι φραγμένο, υπάρχει $x_{n+1} \in k$:

$d(x_{n+1}, x_1) \geq 1, \dots, d(x_{n+1}, x_n) \geq 1$. (δεν ανήκει σε αυτήν την ένωση)

Επαγωγικά ορίζεται (x_n) στο k:

$\forall n \neq m$, $d(x_n, x_m) \geq 1$. Αυτή δεν έχει βασική υπακολουθία άρα δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 3</u>

Έστω (X, d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω k κλειστό υποσύνολο του X. Τότε το k είναι συμπαγές.

Θέλουμε να δείξουμε ότι k συμπαγής. Θεωρούμε (x_n) στον k και θ.δ.ο $\exists (x_{k_n})$ και $x \in k$ ώστε $x_{k_n} \to x$. Η (x_n) είναι στον X (διότι $k \subseteq X$) και ο X είναι συμπαγής άρα υπάρχουν (x_{k_n}) και $x \in X$ ώστε $x_{k_n} \to x$.

Τώρα: $x_{k_n} \in X$ και $x_{k_n} \to x \xRightarrow{\text{κλειστό}} x \in k$.

<u>Άλλη απόδειξη</u>: (με τον ορισμό)

Έστω $(U_i)_{i \in I}$ οικογένεια ανοιχτών $\subseteq X$ ώστε: $k \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

Θεωρούμε την οικογένεια $\{\underbrace{X \setminus k}_{\text{ανοιχτό, διότι } k \text{ κλειστό}}\} \cup \{U_i : i \in I\}$

Έχουμε: $X = k \cup (X \setminus k) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \cup (X \setminus k)$ ανοιχτή κάλυψη του X.

Αφού ο X είναι συμπαγής υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή υπάρχουν $i_1, \dots, i_m \in I$ ώστε

$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \cup (X \setminus k) \Rightarrow k = k \cap X = (k \cap U_{i_1}) \cup \dots \cup (k \cap U_{i_m})$.

Η $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_m}\}$ είναι πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ για το K.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Από την Π.1 και Π.2, κάθε συμπαγές υποσύνολο E του (X,d) είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο.

Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Π.χ. Αν X άπειρο σύνολο τότε ο ίδιος ο (X,δ) (διακριτή μετρική) είναι κλειστό και φραγμένο $\subseteq X$ αλλά δεν είναι συμπαγής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.

Κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος (X,d) είναι διαχωρίσιμος. (δηλ. έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο).

Ειδικότερα κάθε συμπαγής μ. χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Απόδειξη:
Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και βρίσκουμε $x_{11}, \dots, x_{1N_1}$ ώστε

$$X = \bigcup_{j=1}^{N_1} B(x_{1j}, 1)$$ (ο X είναι ολικά φραγμένος).

Ορίζουμε $A_1 = \{x_{11}, \dots, x_{1N_1}\}$. Τότε $X = \bigcup_{x\in A_1} B(x,1)$.

Γενικά, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$ και βρίσκουμε πεπερασμένο σύνολο $A_n \subseteq X$: $X = \bigcup_{x\in A_n} B(x, \frac{1}{n})$ (*).

Η (*) μας λέει ότι: $\forall y\in X$ υπάρχει $x\in A_n$ ώστε $d(x,y) < \frac{1}{n}$ (διότι $\exists x\in A_n : y\in B(x,\frac{1}{n}) \Rightarrow d(y,x) < \frac{1}{n}$). (**)

Ορίζουμε $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Το D είναι πυκνό.

Εστω $y \in X$ και $\varepsilon > 0$. Βρισκουμε $n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Απο την $(\ast\ast)$ υπαρχει $x \in A_n$ ωστε $d(x,y) < \frac{1}{n}$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$x \in D \qquad\qquad d(x,y) < \varepsilon.$$

Αρα $x \in D$, $x \in B(y,\varepsilon)$ $\longrightarrow$ $B(y,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$.

<u>Συνεχεις συναρτησεις και συμπαγεια</u>

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 5</u> Εστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχης συναρτηση και εστω οτι ο X ειναι συμπαγης. Τοτε η f ειναι ομοιομορφα συνεχης.

Αποδειξη: Εστω οτι δεν ειναι. Τοτε μπορουμε να βρουμε $\varepsilon > 0$ και $x_n, y_n \in X$ ωστε: $d(x_n,y_n) \to 0$ και $\forall n$, $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$.

Εχουμε $x_n \in X$ και ο X ειναι συμπαγης. Αρα, $\exists\, x_{k_n} \to x \in X$.

Τοτε: $d(y_{k_n}, x) \leq \underbrace{d(y_{k_n}, x_{k_n})}_{\downarrow (A).\ 0} + \underbrace{d(x_{k_n}, x)}_{\downarrow\ 0.} \longrightarrow 0$.

Δηλ. $y_{k_n} \to x$.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x_{k_n} \to x \xRightarrow{f \text{ συν.}} f(x_{k_n}) \to f(x). \\ \cdot\ y_{k_n} \to x \xRightarrow{f \text{ συν.}} f(y_{k_n}) \to f(x). \end{array}\right\} \quad \sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \to \sigma(f(x), f(x)) = 0.$$

Ατοπο, διοτι $\sigma(f(x_{k_n}), f(y_{k_n})) \geq \varepsilon$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ συνεχής. Αν K είναι συμπαγές $\subseteq X$ τότε το $f(K)$ είναι συμπαγές $\subseteq Y$.

(οι συνεχείς συν. απεικονίζουν συμπαγή σύνολα σε συμπαγή σύνολα).

Απόδειξη:

Έστω (y_n) ακολουθία στο $f(K)$.

Για κάθε n υπάρχει $x_n \in K$: $y_n = f(x_n)$.

Το K είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν $x_{k_n} \in K$ και $x \in K$, ώστε $x_{k_n} \to x$.

Η f είναι συνεχής, άρα $\underset{y_{k_n}}{\overset{\parallel}{f(x_{k_n})}} \to f(x)$ $(\in f(K))$.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος. Αν $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ τότε το $f(X)$ είναι συμπαγές $\subseteq Y$. (f συνεχής).

ΠΡΟΤΑΣΗ 7: Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Απόδειξη: Από Πόρισμα, το $f(X)$ είναι συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}$.

$\xRightarrow[\text{Π. 2}]{\text{Π. 1}}$ το $f(X)$ είναι κλειστό και φραγμένο $\subseteq \mathbb{R}$.

$f(X)$ φραγμένο $\Rightarrow \exists \underset{a}{\underset{\parallel}{\inf(f(X))}}$ και $\underset{\beta}{\underset{\parallel}{\sup(f(X))}}$.

Επειδή το $f(X)$ είναι κλειστό, τα a και β ανήκουν στο $f(X)$.

$a = \min f$, $\beta = \max f$.

ΑΣΚΗΣΗ: Αν A άνω φραγμένο κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$ τότε έχει μέγιστο στοιχείο.

$\forall n, \exists a_n \in A: \beta - \frac{1}{n} < a_n \leq \beta.$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Τότε, } \underset{(\in A)}{a_n} \to \beta \\ \text{κλειστό} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta \in A.$$