19ο ΜΑΘΗΜΑ.

11 - 12 - 2014.

Συμπάγεια

Βασικά παραδείγματα στο $\mathbb{R}$: ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$ ή ένα πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$

Ακολουθιακή συμπάγεια: (α) Αν (x_n) είναι μια ακολουθία στο $[a,b]$ τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in [a,b]$.

(β). Έστω (y_s) ακολουθία στο $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Αφού η (y_s) έχει άπειρους όρους, υπάρχει $j \in \{1, \dots, m\}$ και υπάρχουν $k_1 < k_2 < \dots < k_j < k_{j+1} < \dots$ ώστε $y_{k_s} = x_j$ για κάθε s.

Δηλαδή η (y_s) έχει σταθερή υπακολουθία $y_{k_s} = x_j$, και προφανώς $y_{k_s} \to x_j \in \{x_1, \dots, x_m\}$

1ος ορισμός: Ένα $K \subseteq (X,d)$ λέγεται ακολουθιακά συμπαγές αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο K, υπάρχουν (x_{k_n}) και $x \in K$ ώστε $x_{k_n} \to x$.

Ειδικότερα, ο (X,d) λέγεται ακολουθιακά συμπαγής, αν κάθε (x_n) στο X έχει $x_{k_n} \to x \in K$.

· Συμπάγεια (με καλύψεις) (β). Έστω ότι το $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ καλύπτεται από μια οικογένεια ανοιχτών διαστημάτων (a_i, b_i), $i \in I$. Δηλ. $A \subseteq \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$.

Υπάρχει $i_1 \in I$: $x_1 \in (a_{i_1}, b_{i_1})$.

— " — $i_2 \in I$: $x_2 \in (a_{i_2}, b_{i_2})$

⋮

— " — $i_m \in I$: $x_m \in (a_{i_m}, b_{i_m})$.

Δηλ. $\exists$ πεπερασμένοι το πλήθος δείκτες $i_1, \dots, i_m \in I$ ώστε:

$A = \{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq (a_{i_1}, b_{i_1}) \cup \ldots \cup (a_{i_m}, b_{i_m})$.

(Αυτή είναι μια πεπερασμένη υποκάλυψη της αρχικής).

a) Έχει το $[a,b]$ την ίδια ιδιότητα;

Ναι (Άσκηση 1, Θεώρημα Heine-Borel).

Έστω ότι $[a,b] \subseteq \bigcup_{i \in I} (x_i, y_i)$.

Τότε υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε:

$[a,b] \subseteq (x_{i_1}, y_{i_1}) \cup \ldots \cup (x_{i_m}, y_{i_m})$.

Απόδειξη:

Ορίζουμε: $B = \{ s \in (a,b] :$ το $[a,s]$ καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος $(x_i, y_i) \}$.

• $B \neq \emptyset$. Αφού $a \in [a,b]$ υπάρχει $i_1 \in I : a \in (x_{i_1}, y_{i_1})$.

Θεωρούμε $s : a < s < \min\{y_{i_1}, b\}$

Τότε $s \in (a,b]$ και $[a,s] \subseteq (x_{i_1}, y_{i_1}) \Rightarrow s \in B$.

• Το B είναι άνω φραγμένο από του b.

• Άρα, το B έχει ελάχιστο άνω φράγμα, το οποίο συμβολίζουμε με t.

Για κάθε $s < t$ μπορώ να βρω $u \in (s,t]$ ώστε $u \in B$

και $[a,u] \subseteq (x_{i_1}, y_{i_1}) \cup \ldots \cup (x_{i_m}, y_{i_m})$. για κάποιους $i_1, \ldots, i_m \in I$.

<u>Ισχυρισμός</u>: $t = b$. / Έστω ότι $t < b$.

Αφού $t \in [a,b] \Rightarrow \exists\, i_0 \in I : t \in (x_{i_0}, y_{i_0})$. Από την $(*)$ μπορώ να βρω $x_{i_0} < u < t$ με $u \in B$.

Τότε $\exists\, i_1, \ldots, i_m \in I$: $\left.\begin{array}{l} [a,u] \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (x_{i_j}, y_{i_j}) \\ [u, y_{i_0}) \subseteq (x_{i_0}, y_{i_0}) \end{array}\right\} \Rightarrow [a, y_{i_0}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} (x_{i_j}, y_{i_j})$

Παίρνω $t < s < \min\{y_{i_0}, b\}$

Τότε $[a,s] \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} (x_{i_j}, y_{i_j})$

$\Rightarrow s \in B \Rightarrow s \leq \sup B \rightarrow s \leq t$, άτοπο.

Ισχυρισμός: $b \in B$ (δηλ. $b = \max(B)$) $\rightarrow$

$[a,b] \subseteq$ πεπερ. ένωση από (x_i, y_i).

Όμοια με τον προηγούμενο ισχυρισμό.

Ορισμοί: Έστω (X,d) μ.χ. και έστω $K \subseteq X$.

1. Ανοιχτή κάλυψη του K είναι μια οικογένεια $(U_i)_{i\in I}$ ανοιχτών υποσυνόλων του X, η οποία καλύπτει το K.

$K \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.

2. Υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$ λέμε κάθε οικογένεια $(U_i)_{j\in J}$ όπου $J \subseteq I$ που εξακολουθεί να καλύπτει το K:

$K \subseteq \bigcup_{j\in J} U_i$

Η υποκάλυψη λέγεται πεπερασμένη αν το J είναι πεπερασμένο σύνολο. $J = \{i_1, \dots, i_m\}$, $i \in I$.

Ορισμός συμπάγειας: Ένα $K \subseteq (X,d)$ λέγεται συμπαγές, αν για κάθε ανοιχτή κάλυψη $(U_i)_{i\in I}$ του K, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένη υποκάλυψη: υπάρχουν $i_1, \dots, i_m \in I$ ώστε $K \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}$.

Λέμε ότι ο (X,d) είναι συμπαγής αν για κάθε ανοιχτή κάλυψη $(U_i)_{i\in I}$ του X (το οποίο σημαίνει $X=\bigcup_{i\in I} U_i$) υπάρχουν $i_1,\dots,i_m\in I$: $X=U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_m}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Κάθε (X,d) έχει ανοιχτή κάλυψη: η $\{X\}$ είναι ανοιχτή κάλυψη (και μάλιστα πεπερασμένη) του X.

2. Κάθε ανοιχτή κάλυψη $(U_i)_{i\in I}$ του $K\subseteq(X,d)$ έχει υποκαλύψεις: π.χ. $(U_j)_{i\in I}$ $I=I$ (τα κρατάω όλα).

3. Ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ δεν είναι συμπαγής: Θεωρούμε την ανοιχτή κάλυψη $\mathbb{R}=\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n,n)$. Αυτή η κάλυψη δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

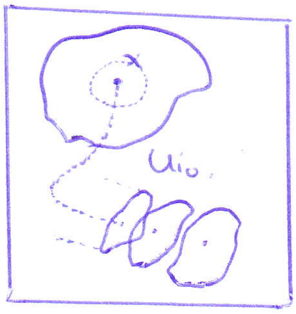
Έστω ότι υπάρχουν $n_1<\dots<n_m\in\mathbb{N}$ ώστε:

$\mathbb{R}=(-n_1,n_1)\cup\dots\cup(-n_m,n_m)=(-n_m,n_m)$, άτοπο.

4. Έστω (x_n) ακολουθία στον (X,d) με $x_n\to x\in X$.

Το $K=\{x\}\cup\{x_k : n\in\mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές:

Έστω $(U_i)_{i\in I}$ μια ανοιχτή κάλυψη του K: τα U_i είναι ανοιχτά και $K\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$



Αφού $x\in\bigcup_{i\in I}U_i$ υπάρχει $i_0\in I$:

$x\in U_{i_0}$

Αφού το U_{i_0} είναι ανοιχτό και $x_n\to x$, όλοι τελικά οι όροι της (x_n) ~~....~~, είναι στο U_{i_0}:

$\exists n_0 : \forall n\geq n_0 \ x_n\in U_{i_0}$.

Για κάθε $j=1,\dots,n_0$ έχουμε $x_j\in K\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i \Rightarrow \exists i_j : x_j\in U_{i_j}$

Τότε $L \subseteq U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_{n_0}}$ (η $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \dots, U_{i_{n_0}}\}$ είναι πεπερασμένη υποκάλυψη της $(U_i)_{i\in I}$).

5. Ο (X,δ) είναι συμπαγής $\Leftrightarrow$ το X είναι πεπερασμένο σύνολο.

$(\Rightarrow)$ (η άλλη κατεύθυνση είναι απλή).

Έστω ότι το X είναι άπειρο σύνολο.

$$X = \bigcup_{x\in X} \underbrace{\{x\}}_{\text{ανοιχτό με την } \delta}$$

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in X$ ώστε:

$$X = \bigcup_{j=1}^{m} \{x_j\} = \{x_1, \dots, x_m\}$$

Τότε το X είναι πεπερασμένο σύνολο, άτοπο.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>. Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Τα εξής είναι ισοδύναμα: (α). Ο X είναι συμπαγής (με καλύψεις).

(β) κάθε άπειρο υποσύνολο του X έχει σ. συσσώρευσης.

(γ). κάθε (x_n) στο X, έχει υπ. (x_{k_n}), $x_{k_n} \to x \in X$.

(δ). Ο (X,d) είναι ολικά φραγμένος και πλήρης.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται ολικά φραγμένο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$:

$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon)$. Ο X λέγεται ολικά φραγμένος αν $\forall \varepsilon>0$ $\exists m$ και $x_1, \dots, x_m$: $X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon)$.

Αποδειξη: (α) → (β).

Εστω $A \subseteq X$ απειρο, το οποιο δεν εχει σημεια συσσωρευσης. Τοτε αν $x \in X$, το x δεν ειναι σ.σ. του A. Τοτε υπαρχει $\varepsilon_x > 0$: $B(x, \varepsilon_x) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$.

$$\Rightarrow B(x, \varepsilon_x) \cap A = \emptyset \text{ αν } x \notin A$$
ή
$$\{x\} \text{ αν } x \in A.$$

Η οικογενεια $\{B(x, \varepsilon_x)\}_{x \in X}$ ειναι ανοιχτή κάλυψη του X.

Ο X είναι συμπαγής, άρα υπαρχουν $x_1, \ldots, x_m \in X$ ωστε:

$X = B(x_1, \varepsilon_{x_1}) \cup \ldots \cup B(x_m, \varepsilon_{x_m})$.

$\Rightarrow A = A \cap X = (A \cap B(x_1, \varepsilon_{x_1})) \cup \ldots \cup (A \cap B(x_m, \varepsilon_{x_m}))$.

$\subseteq \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_m\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

$\Rightarrow A$ πεπερασμενο, άτοπο.

(β) → (γ).

Έστω (x_n) μια ακολουθία στο X

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ορων της (x_n).

- Το A είναι πεπερασμενο. Τότε η (x_n) έχει σταθερή υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει.
- Το A είναι άπειρο. Απο την υπόθεση, υπάρχει $x \in A'$.

Παίρνουμε $\varepsilon = 1$. Υπάρχουν άπειροι x_n στην $B(x, 1)$.

Επιλέγουμε k_1: $x_{k_1} \in B(x, 1)$.

Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Υπαρχουν απειροι x_n στην $B(x, 1/2)$.

$\Rightarrow \exists k_2 > k_1 : x_{k_2} \in B(x, 1/2)$.

Επαγωγικά βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$

ώστε $\forall n$ $\quad d(x_{k_n}, x) < \frac{1}{n}$.

$$\Downarrow$$

$$x_{k_n} \to x.$$

(γ) $\Rightarrow$ (δ).

. Ο X είναι πλήρης.

Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X.

Από την υπόθεση (γ), η (x_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία,

οπότε γνωρίζουμε ότι ~~συγκλ~~ συγκλίνει.

. Ο X είναι ολικά φραγμένος: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

και $\exists x_1, \dots, x_m \in X$: $\quad X = \bigcup_{j=1}^{m} B(x_j, \varepsilon)$.

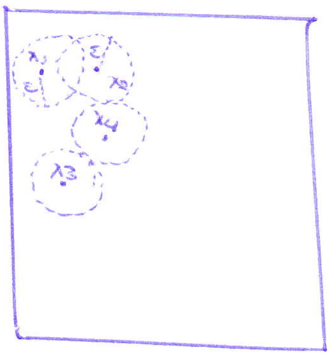
Έστω ότι δεν ισχύει. Υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε ο X δεν καλύπτεται από πεπερασμένες το πλήθος μπάλες, ακτίνας ε.

Παίρνουμε τυχόν $x_1 \in X$. Τότε $B(x_1, \varepsilon) \subsetneq X$.

Άρα υπάρχει $x_2 \notin B(x_1, \varepsilon) \Rightarrow d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$.

Έχουμε $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \subsetneq X$.

$\Rightarrow \exists x_3 \notin B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$.



Επαγωγικά, αν έχω βρει $x_1, \dots, x_n$

με $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ $\forall i \neq j$ στο $\{1, \dots, n\}$ λέω ότι

$B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon) \subsetneq X$ και βρίσκω x_{n+1}, με

$x_{n+1} \notin B(x_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(x_n, \varepsilon) \quad \Rightarrow d(x_{n+1}, x_j) \geq \varepsilon$.

Άρα αυτή η (x_n) δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (άτοπο).

(δ) $\Rightarrow$ (α). Έστω ότι ο X δεν είναι συμπαγής. Τότε, υπάρχει ανοιχτή κάλυψη $(U_i)_{i\in I}$ του X που δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Ο X είναι ολικά φραγμένος.

$\Rightarrow \exists x_{11}, \dots, x_{1N_1} \in X$, $X = \bigcup_{j=1}^{N_1} B(x_{1j}, \frac{1}{2})$.

Επειδή οι μπάλες $B(x_{1j}, 1/2)$ είναι πεπερασμένες το πλήθος (N_1) κάποια από αυτές δεν καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος U_i (αλλιώς θα είχαμε πεπερ. υποκάλυψη)

Ας πούμε $B(x_{1j_0}, 1/2)$ μια τέτοια μπάλα και στο εξής:

$x_1 := x_{1j_0}$.

Η $B(x_1, \frac{1}{2})$ είναι ολικά φραγμένο σύνολο.

(διότι X ολικά φραγμένο). Άρα υπάρχουν $x_{21}, \dots, x_{2N_2}$.

$$B(x_1, \tfrac{1}{2}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_2} B(x_2, \tfrac{1}{2^2})$$

Υπάρχει j_0 ώστε η $B(x_2, \frac{1}{2^2})$ δεν καλύπτεται από πεπ. το πλήθος U_i (αλλιώς το ίδιο θα ίσχυε για την $B(x_1, \frac{1}{2})$).

Στο εξής: $x_2 = x_{2j_0}$. Έχουμε: $d(x_2, x_1) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2}$

Επαγωγικά βρίσκουμε (x_n) με τις εξής ιδιότητες.

(1). Η $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ δεν καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος U_i

(2). $d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{3}{2^{n+1}}$.

Άρα $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_{n+1}, x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^{n+1}}\right) < \infty$, η (x_n) έχει

φραγμένη κύμανση, άρα είναι βασική.

$\underset{X \text{ πλήρης}}{\Longrightarrow} \exists x \in X : x_n \to x$.

Αφού $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ υπάρχει $i_0 \in I$: $x \in U_{i_0}$.

το U_{i_0} είναι ανοιχτό, άρα $\exists \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$.

Βρίσκουμε n αρκετά μεγάλο ώστε: $x_n \in B(x, \varepsilon/2)$ και

$\frac{1}{2^n} < \varepsilon/2$.

Τότε: $B(x_n, \frac{1}{2^n}) \underset{\text{τρ. ανισότητα}}{\subseteq} B\left(x, \frac{1}{2^n} + d(x, x_n)\right) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$.

Άτοπο, διότι η $B(x_n, \frac{1}{2^n})$ δεν μπορεί να καλυφθεί από το

U_{i_0}. ∎