

ΠληρωμήΟρισμός

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Λέμε ότι ο μετρικός χώρος (Y, σ) είναι μια πληρωμή του (X, d) αν είναι πλήρης και υπάρχει ισομετρία $T: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ και $\overline{T(X)} = Y$.

Τυπικό παράδειγμα: Το $\mathbb{R}$ είναι πληρωμή του $\mathbb{Q}$.

Η ταυτότική απεικόνιση $I: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ισομετρία και $I(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Θεώρημα

Κάθε μετρικός χώρος (X, d) έχει πληρωμή.

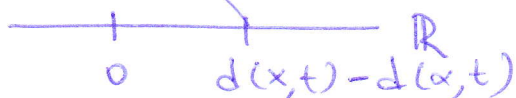
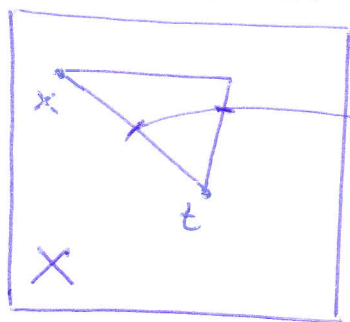
Απόδειξη

Θεωρούμε τον $(\ell_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$. Αποτελείται από τις φραγμένες συναρτήσεις $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Είναι γραμμικός χώρος, γίνεται χώρος με νόρμα αν ορίσουμε $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Δείξαμε ότι είναι πλήρης με την επαχόμενη μετρική.

Ορίζουμε $T: X \rightarrow \underbrace{\ell_\infty(X)}_Y$ ως εξής: $\forall x \in X$ θεωρούμε τη

συνάρτηση $f_x: X \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_x(t) = d(x, t) - d(\alpha, t)$

όπου έχουμε διαθεροποιήσει κάποιο $\alpha \in X$



Τότε $\forall t \in X$ ισχύει $|f_x(t)| = |d(t, x) - d(\alpha, t)| \leq d(x, \alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_x\|_\infty = \sup\{|f_x(t)| : t \in X\} \leq d(x, \alpha) < +\infty$

Ορίζουμε $T: X \rightarrow \ell_\infty(X)$ με $T(x) = f_x$

① Η T είναι ισομετρία: Ορίζουμε $\forall x, y \in X$

$\|f_x - f_y\|_\infty = \|T(x) - T(y)\|_\infty = d(x, y) \quad (*)$

$$\text{Έστω } t \in X. \text{ Τότε } |f_x(t) - f_y(t)| = |d(x, t) - d(\cancel{x}, t) - d(y, t) + d(\cancel{x}, t)| \\ \leq d(x, y). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f_x - f_y\|_\infty = \sup \{ |f_x(t) - f_y(t)| : t \in X \} \leq d(x, y)$$

$$\text{Για να δείξω ότι έχω ισομετρία. Θα βρω } t_0 \in X : |f_x(t_0) - f_y(t_0)| = \\ = |d(x, t_0) - d(y, t_0)| = d(x, y).$$

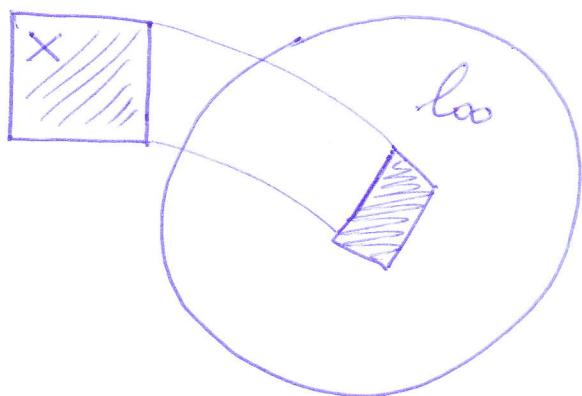
$$\text{Αν πάρω } t_0 = x \text{ έχω } |f_x(x) - f_y(x)| = |d(\cancel{x}, x) - d(x, x)| = d(x, y)$$

$$\text{Άρα } \|f_x - f_y\|_\infty = |f_x(x) - f_y(x)| = d(x, y)$$

$$\stackrel{!}{=} |f_x(y) - f_y(y)| \text{ το οποίο αποδεικνύει την (*)}$$

$$\text{Μέχρι στιγμής βρήκαμε ισομετρία } T : (X, d) \rightarrow \underbrace{(l_\infty(X), \|\cdot\|_\infty)}_{\text{πλήρης}}$$

Θεώρημα $Y = \overline{T(X)}$. Η $T : (X, d) \rightarrow Y$ εξακολουθεί να είναι ισομετρία. Ο Y είναι πλήρης ως κλειστό υποσύνολο του πλήρους $l_\infty(X)$ και $T(X) = Y$.



Συμπέρασμα

Αποδεικνύεται ότι αν Y_1 και Y_2 είναι δύο πλήρεις του μετρικού χώρου (X, d) τότε υπάρχει ισομετρία $f : Y_1 \xrightarrow[\text{επ.}]{1-1} Y_2$ (ισομετρικός ισομορφισμός). Άρα η πλήρωση του (X, d) είναι "μοναδική".

Θεώρημα Σταθερού Σημείου (Banach)

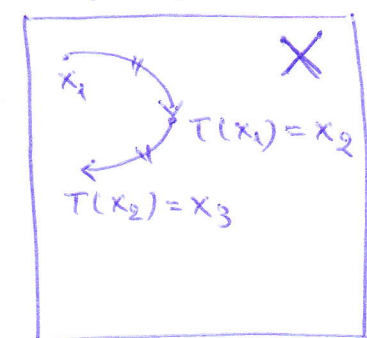
Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $T: X \rightarrow X$ συνήθως συνεπής: υπάρχει $0 \leq \alpha < 1$ ώστε $\forall x, y \in X$

$d(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in X$ ώστε $T(x_0) = x_0$. Το x_0 λέγεται σταθερό σημείο της T .

► Μπορεί να έχω: $d(T(x), T(y)) < d(x, y) \forall x, y$ και να μην έχω σταθερό σημείο για την T .

Απόδειξη

Παίρνουμε τυχόν $x_1 \in X$ και ορίζουμε $x_2 = T(x_1)$
 $x_3 = T(x_2)$
 $\vdots$
 $x_{n+1} = T(x_n)$



Ισχυρισμός: Η (x_n) είναι βασική. Αφού ο (X, d) είναι πλήρης, υπάρχει $x_0 \in X: x_n \rightarrow x_0$. Η T είναι Lipschitz συνεπής με σταθερά α άρα $T(x_n) \rightarrow T(x_0)$. Από την αναδρομική σχέση $x_{n+1} = T(x_n)$ έπεται ότι $T(x_0) = x_0$.

Αν υπήρχε $x_0' \neq x_0: T(x_0') = x_0'$ θα είχαμε $0 < d(x_0', x_0) = d(T(x_0), T(x_0')) \leq \alpha \cdot d(x_0, x_0')$ ΑΤΟΠΟ $\leadsto \alpha \geq 1$.

Παράδειγμα

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(1+e^x)$

• Η f δεν έχει σταθερό σημείο: $f(x) = x \Rightarrow \ln(1+e^x) = x \Rightarrow 1+e^x = e^x \Rightarrow 1=0$.

• Όμως $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} < 1$

Άρα αν $x \neq y$ στο $\mathbb{R}$ τότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και $y: |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| = |f'(\xi)| |x-y| = \frac{e^\xi}{1+e^\xi} |x-y| < |x-y|$.

Απόδειξη Ισχυρισμού

Έστω $m > n$. Γράφουμε $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n)$

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } k \text{ έχουμε } d(x_{k+1}, x_k) &= d(T(x_k), T(x_{k-1})) \leq \alpha \cdot d(x_k, x_{k-1}) \\ &= \alpha \cdot d(T(x_{k-1}), T(x_{k-2})) \leq \alpha^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\leq \alpha^{k-1} d(x_2, x_1)$$

$$\text{Άρα } d(x_m, x_n) \leq \alpha^{m-2} d(x_2, x_1) + \dots + \alpha^n d(x_2, x_1) + \alpha^{n-1} d(x_2, x_1) =$$

$$= \alpha^{n-1} d(x_2, x_1) [\alpha^{m-n-1} + \dots + \alpha + 1] =$$

$$= \alpha^{n-1} \frac{1 - \alpha^{m-n}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1) \leq \frac{\alpha^{n-1}}{1 - \alpha} d(x_2, x_1) =$$

$$= \alpha^n \left(\frac{d(x_2, x_1)}{\alpha(1 - \alpha)} \right)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $0 \leq \alpha < 1$ έχουμε $\alpha^n \rightarrow 0$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall n > n_0 \quad \alpha^n \frac{d(x_2, x_1)}{\alpha(1 - \alpha)} < \varepsilon$. Τότε αν $m > n > n_0$ έχουμε

$$d(x_n, x_m) \leq \alpha^n \frac{d(x_2, x_1)}{\alpha(1 - \alpha)} < \varepsilon. \text{ Άρα } (x_n) \text{ είναι βασική.}$$

Ασκήσεις

Έχουν δίνει: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9

Θα δίνουν: 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21

(20) Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $f, g: X \rightarrow X$

α) Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $g \circ f^k = f \circ f \circ \dots \circ f$ να είναι ανήλια
συστολή. Δηλαδή ότι υπάρχει k -φορές
μοναδικό $x \in X: f(x) = x$.

Αφού γ f^k είναι συνεχής συντομή έχει σταθερό σημείο x_0
 Δηλαδή $f^k(x_0) = x_0 \Rightarrow f(f^k(x_0)) = f(x_0)$
 $f^k(f(x_0))$

Άρα $pf(x_0)$ είναι επίσης σταθερό σημείο της f^k
 Όμως γ f^k είναι συνεχής συντομή άρα έχει μοναδικό σταθερό
 σημείο. Συνεπώς, $x_0 = f(x_0)$, δηλαδή γ f έχει σταθερό σημείο.
 Έστω $x_1 \in X$ άλλο σταθερό σημείο της f .

$f(x_1) = x_1 \Rightarrow f^2(x_1) = f(x_1) = x_1 \Rightarrow f^3(x_1) = f(x_1) = x_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow$
 $\Rightarrow f^k(x_1) = x_1 \Rightarrow x_1 = x_0$
 Διότι γ f^k έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

(β) Αν γ f είναι συνεχής συντομή και $f \circ g = g \circ f$ τότε υπάρχει
 μοναδικό $x \in X : f(x) = g(x) = x$

• Η f είναι συνεχής συντομή άρα υπάρχει μοναδικό $x \in X : f(x) = x$
 Μένει να δείξουμε ότι $g(x) = x$.

Έχουμε $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$
 Άρα το $g(x)$ είναι σταθερό σημείο της f

$\Downarrow$ μοναδικότητα

$$g(x) = x$$

21 Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος, και E πυκνό $G_\delta \subseteq X$
 Αν $f : X \rightarrow X$ ομοιομορφικός δείξτε ότι $E \cap f(E) \neq \emptyset$.

το E είναι G_δ , άρα $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, G_n ανοιχτό
 το E είναι πυκνό, άρα $\forall n \ G_n \supseteq E \Rightarrow \overline{G_n} \supseteq \overline{E} = X$
 $\Rightarrow$ καιθε G_n είναι πυκνό.

Αφού f είναι ομοιομορφικός, έχουμε:

$$(i) f(E) = f\left(\bigcap_n G_n\right) = \bigcap_n f(G_n)$$

$$(ii) G_n \text{ ανοιχτό} \Rightarrow f(G_n) \text{ ανοιχτό}$$

$$(iii) f(G_n) \text{ πυκνό} \Leftrightarrow G_n \text{ πυκνό}$$

Υποθέτουμε

Αν $f: X \rightarrow Y$ συνεχής και επί και αν D πυκνό $\subseteq X$ τότε το $f(D)$ είναι πυκνό $\subseteq Y$.

Έστω $y \in Y$. Αφού f είναι επί $\exists x \in X: y = f(x)$. Υπάρχει

$$d_n \in D: d_n \rightarrow x \xrightarrow[\text{συνεχής}]{f} f(d_n) \rightarrow f(x) = y$$

$f(D)$

$$\text{Τότε } E \cap f(E) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} f(G_n)\right) \neq \emptyset. \text{ από Θ. Baire.}$$

ανοιχτό πυκνό

(για την ακρίβεια, το $E \cap f(E)$ είναι πυκνό G_δ).

(13) Έστω d μετρική στο $\mathbb{R}$ με την ιδιότητα:

(α) ο $(\mathbb{R}, d)$ είναι πλήρης

(β) $d \sim 1.1$ (ισοδυναμία)

$$\text{Δείξτε ότι υπάρχει } \delta > 0: \forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{\text{diam}_d([n, \infty))}_{\gamma_n} \geq \delta.$$

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει. Τότε, $\forall \delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\gamma_{n_0} = \text{diam}_d([n_0, \infty)) < \delta \quad (*) \quad \text{Όμως } [n, \infty) \supseteq [n+1, \infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_{n+1} = \text{diam}_d([n+1, \infty)) \leq \text{diam}_d([n, \infty)) = \gamma_n \text{ δηλαδή } (\gamma_n) \text{ φθίνουσα.}$$

Άρα από (*) $\forall n \geq n_0 \quad \gamma_n < \delta$.

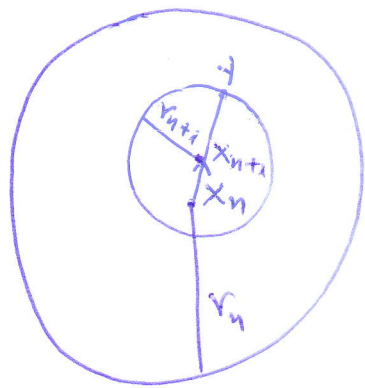
$$\text{Δηλαδή } \gamma_n = \text{diam}_d([n, \infty)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Επίσης τα $[n, \infty)$ είναι l_1 -εληβία $\Rightarrow d$ -εληβία
 $d \sim l_1$

και ο $(\mathbb{R}, d)$ είναι πλήρης.

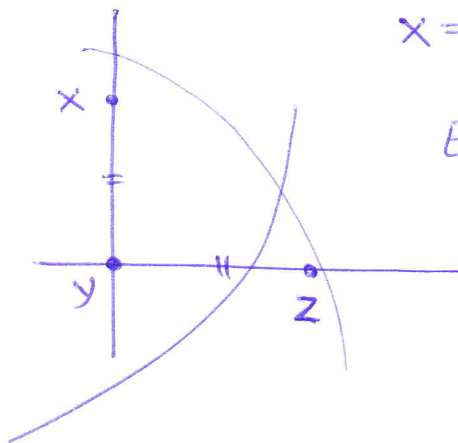
Από Lemma 6 του $(\mathbb{R}, d) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty) \neq \emptyset$ ΑΤΟΠΟ

(14) Έστω X πλήρης χώρος με νόρμα, και έστω $(\hat{B}(x_n, r_n))$ φθίνουσα, ακολουθία από εληβίες μηδέν. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n) \neq \emptyset$.



Παράδειγμα

Υπάρχει μετρικός χώρος (X, d) στον οποίο υπάρχουν $\hat{B}(x, r) \not\subseteq \hat{B}(y, s)$ και $r > s$.



$X = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ με την

Ευκλείδεια μετρική

$$\hat{B}(y, 1.1) = \{x, y, z\}$$

$$\hat{B}(x, 1.2) = \{x, y\}$$

Ισχυρισμός

$0 \leq \|x_n - x_{n+1}\| \leq r_n - r_{n+1}$. Ειδικότερα η (r_n) είναι φθίνουσα, και κάτω φραγμένη από το 0, άρα $\exists r \geq 0 : r_n \rightarrow r \Rightarrow (r_n)$ βασική $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)$ βασική διότι αν μην έχουμε $\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m-1}\| + \dots$

$$+ \|x_{n+1} - x_n\| \leq (r_{m-1} - r_m) + (r_{m-2} - r_{m-1}) + \dots + (r_n - r_{n+1}) =$$

$$= r_n - r_m < \varepsilon \text{ αν μην μεταβάλλω.}$$

Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X : x_n \rightarrow x$. Τότε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$

Γιατί αν πάρω $k \in \mathbb{N}$ έχω $x_k \in \hat{B}(x_k, r_k)$ ελθόντως
 $x_{k+1} \in \hat{B}(x_{k+1}, r_{k+1}) \in \hat{B}(x_k, r_k)$
 $x_{k+2} \xrightarrow{\quad\quad\quad}$
 $x_{k+3} \xrightarrow{\quad\quad\quad}$
 $\downarrow$
 x

Άρα $x \in \hat{B}(x_k, r_k)$

Για τον λοχυρισμό:

Ορίζουμε $y = x_{n+1} + r_{n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|}$.

Τότε $\|y - x_{n+1}\| = \left\| r_{n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|} \right\| = r_{n+1} \frac{\|x_{n+1} - x_n\|}{\|x_{n+1} - x_n\|} = r_{n+1}$

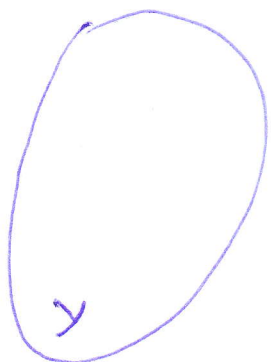
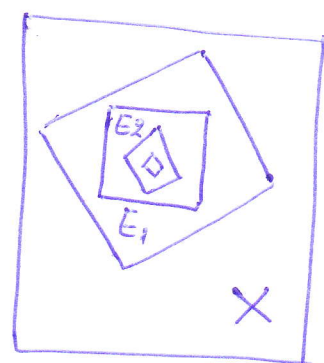
$\Rightarrow y \in \hat{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq \hat{B}(x_n, r_n) \Rightarrow \|y - x_n\| \leq r_n$.

Όμως $\|y - x_n\| = \|x_{n+1} - x_n + r_{n+1} \frac{x_{n+1} - x_n}{\|x_{n+1} - x_n\|}\| = \left(1 + \frac{r_{n+1}}{\|x_{n+1} - x_n\|}\right) \|x_{n+1} - x_n\| =$
 $= \|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1}$

Δηλαδή $\|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} = \|y - x_n\| \leq r_n$.

(15) (X, d) πλήρης, $f: X \rightarrow Y$ συνεχής, (E_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών $\subseteq X$. με $\text{diam}(E_n) \rightarrow 0$

Δείξτε ότι $f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$



Από Cantor $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{x\}$. Άρα ζητάμε

$\{f(x)\} = f(\{x\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$

$x \in E_n \forall n \Rightarrow f(x) \in f(E_n) \forall n \Rightarrow$

$f(x) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n) \Rightarrow \{f(x)\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} f(E_n)$

Μένει το εξής: Αν $y \in f(E_n) \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $y = f(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in E_n : y = f(x_n)$. Έχουμε $x_n, x \in E_n \Rightarrow$

$d(x_n, x) \leq \text{diam}(E_n) \rightarrow 0$. Άρα $x_n \rightarrow x \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x)$

Άρα $f(x) = y$