

4.15/ Έστω $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$. Τα εσής είναι
ισοδύναμα:

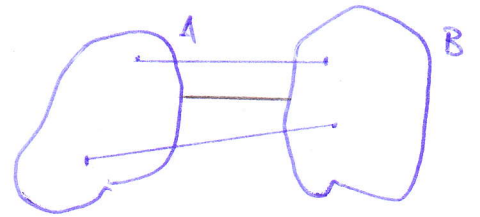
4 - 12 - 14

ΜΑΘΗΜΑ 17ε

(i). Η f είναι ομομορφία συνεχούς

(ii). Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε: αν $A, B \subseteq X$
με $\text{dist}(A, B) < \delta$, τότε $\text{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$.

$$\text{dist}(A, B) = \inf \{ \text{dist}(a, b) : a \in A, b \in B \}$$



(i) $\Rightarrow$ (ii). Έστω $\varepsilon > 0$.

Αφού η f είναι ομομορφία συνεχούς, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

" $\forall x, y \in X$, με $d(x, y) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$."

Έστω $A, B \subseteq X$, μη κενά με $\text{dist}(A, B) < \delta$. Από χαρακτηρισμό
του infimum υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $d(a, b) < \delta$.

από την
 $\Rightarrow$ $\text{dist}(f(A), f(B)) \leq \sigma(f(a), f(b)) < \varepsilon$.
επιλογή δ .

(ii) $\Rightarrow$ (i). Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση (ii), $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

" $\text{dist}(A, B) < \delta \Rightarrow \text{dist}(f(A), f(B)) < \varepsilon$ "

Έστω $x, y \in X$ με $d(x, y) < \delta$. Ορίζουμε $A = \{x\}$, $B = \{y\}$.

Τότε $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(\{x\}, \{y\}) = d(x, y) < \delta \Rightarrow$

$\text{dist}(f(\{x\}), f(\{y\})) < \varepsilon \Rightarrow \text{dist}(\{f(x)\}, \{f(y)\}) < \varepsilon$.

$\Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

ΑΣΚΗΣΗ - ΠΡΟΤΑΣΗ. Έστω (X, d) διαχωριστικός μετρίκος χώρος.

Αν $\emptyset \neq A \subseteq X$, τότε ο $(A, d|_{A \times A})$ είναι επίσης διαχωριστικός.

Υπάρχει αριθμητικό $D \subseteq X$ ώστε $\bar{D} = X$. Θεωρούμε μια αριθμητική
των θετικών ραβδών.

$\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} : q > 0\} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ και όλες τις μηδένες

$B(d, q_n)$, $d \in D$, $n \in \mathbb{N}$. Αυτές είναι αριθμησιμές το πλήθος
(είναι το πολύ όσο είναι το $D \times \mathbb{N}$)

Αν $B(d, q_n) \cap A \neq \emptyset$ επιλέγουμε $a_{d,n} \in B(d, q_n) \cap A$.

Ορίζουμε $Z = \{a_{d,n} : B(d, q_n) \cap A \neq \emptyset\}$ (αριθμησιμότητα).

Θα δείξουμε ότι αν $x \in A$ και $\varepsilon > 0$ τότε υπάρχει κάποιο $a_{d,n} \in B(x, \varepsilon)$.
τότε το Z είναι πυκνό στο A .

Παίρνουμε πρώτο $0 < q_n < \varepsilon/2$. Στην $B(x, q_n)$ υπάρχει κάποιο
 $d \in D$ (γιατί $\bar{D} = X$). Τότε $d(x, d) < q_n \Rightarrow x \in B(d, q_n)$
($^{\circ}A$).

Αρα $A \cap B(d, q_n) \neq \emptyset$. Τότε το $a_{d,n} \in Z$ και

$$d(a_{d,n}, x) \leq d(a_{d,n}, d) + d(d, x) < q_n + q_n < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ανλ. $a_{d,n} \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap Z \neq \emptyset$. Αρα Z πυκνό στο A .

Άσκηση 2.1.

$f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ συνεχής

(α). $g: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sigma(f(x), y)$ είναι συνεχής.

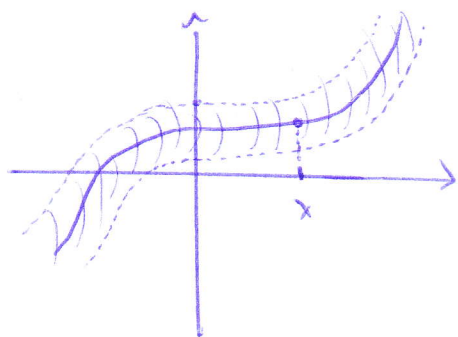
(β). Το $A = \{(x, y) \in X \times Y : f(x) \in B_\sigma(y, 1)\}$ είναι ανοικτό $\subseteq X \times Y$.

Αφού, f συν. $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$ ($x_n \in X$, $y_n \in Y$).

Αρα $f(x_n) \rightarrow f(x)$ και $y_n \rightarrow y$.

Εντάξει $\sigma(f(x_n), y_n) \rightarrow \sigma(f(x), y)$ το οποίο ισχύει, αφού αν

$y_n \rightarrow y$ και αν $f(x_n) \rightarrow f(x)$, τότε $\sigma(y_n, f(x_n)) \rightarrow \sigma(y, f(x))$.



$$\begin{aligned}
 A &= \{(x, y) \in X \times Y : \sigma(f(x), y) < 1\} \\
 &= \{(x, y) \in X \times Y : y(x, y) < 1\} \\
 &= g^{-1}((-\infty, 1)) = \text{ανοιχτό},
 \end{aligned}$$

συνεχής
(α).

ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}$.

$$A = \{(x, y) : |f(x) - y| < 1\}$$

$$X = Y = \mathbb{R}.$$

Λογισμ 2.2

Έστω $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι:

"Η f είναι συνεχής $\Leftrightarrow$ για κάθε a, b στο $\mathbb{R}$ τα
 $\{x \in X : f(x) > a\}$ και $\{x \in X : f(x) < b\}$ είναι ανοιχτά
 σύνολα.

($\Rightarrow$). Αν f συνεχής, τότε:

$$\{x \in X : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) = \text{ανοιχτό}$$

$$\{x \in X : f(x) < b\} = f^{-1}((-\infty, b)) = \text{ανοιχτό}.$$

($\Leftarrow$). Η υπόθεση που δίνει το εφ'ής: αν $a < b$ στο $\mathbb{R}$, τότε:

$$\begin{aligned}
 \{x \in X : a < f(x) < b\} &= \underbrace{\{x \in X : f(x) > a\}}_{\text{ανοιχτό}} \cap \underbrace{\{x \in X : f(x) < b\}}_{\text{ανοιχτό}} = \text{ανοιχτό} \\
 &\quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{f^{-1}((a, b))}
 \end{aligned}$$

Θα θέλαμε να δείξουμε ότι: αν $G \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό, τότε το

$f^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό $\subseteq X$. Ξεπούμε ότι κάθε ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$

γράφεται στη μορφή $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ όπου τα (a_n, b_n) είναι φερό
 και ενδεχομένως $a_n = -\infty$, $b_n = +\infty$.

$$\Rightarrow f^{-1}(G) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}((a_n, b_n)) = \text{ανοιχτό}.$$

($\Leftarrow$). Άλλος τρόπος: Παιχνίδι με $x \in X$ και θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x .

Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $\delta > 0 : f(B(x, \delta)) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$.

Οπως το $f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))$ είναι ανοιχτό. $\downarrow$

(αντίστροφα ανοικτών διαστημάτων). $\nearrow \exists \delta > 0 : B(x, \delta) \subseteq f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))$
και περιέχει το x , διότι $f(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$.

$\Rightarrow$ το x είναι εσωτερικό σημείο του $\Rightarrow$

$$\exists \delta > 0 : f(B(x, \delta)) \subseteq (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon).$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.9

Έστω (X, d) μετρίκος χώρος, A ανοιχτό $\subseteq X$.

Αν $x \in A$, $x_n \in X$, $x_n \rightarrow x$ αποδείξτε ότι:

"υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq A$ "

Αφού $x \in A$, A ανοιχτό $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

$x_n \rightarrow x : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Επίσης υπάρχει

$$n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \varepsilon/2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Άρα $\forall n \geq n_0 : B(x_n, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \varepsilon)$ ~~γιατί~~ ^{$B(x, \varepsilon)$}
αν $y \in B(x_n, \frac{1}{n}) \Rightarrow d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \varepsilon/2 = \varepsilon$
 $\Rightarrow d(y, x) < \varepsilon \Rightarrow y \in B(x, \varepsilon)$.

1.3 Εξετάστε αν υπάρχει $E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset, E \neq \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α). E άπειρο, χωρίς σημεία συσσώρευσης.

Ναι, το $\mathbb{Z}$.

(β). E έχει άπειρα σημεία συσσώρευσης και δεν είναι έσωτερικό

Ναι, το $\mathbb{Q}$ / $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, το $\mathbb{Q}$ δεν περιέχει διάστημα, άρα δεν έχει έσωτερικά σημεία

(γ). E άνωτομο χωρίς σημεία συσσώρευσης.

Αν υπάρχει τότε υπάρχει $(a, b) \subseteq E$. Τότε κάθε $y \in (a, b)$ είναι σημείο συσσώρευσης του E .

(δ). E άνωτομο και πεντο

Ναι, $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ για οποδήποτε $x_0 \in \mathbb{R}$

διότι $\{x_0\} = \text{εξάτομο}$

$\overline{\mathbb{R} \setminus \{x_0\}} \supseteq \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ και $\nexists y_n \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\} : y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{x_0\}}$ / $\Rightarrow \mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus \{x_0\}}$

$$\text{π.χ. } y_n = x_0 + \frac{1}{n}$$

(ε). E φραγμένο, με άπειρα περσώμενα σημεία.

$$E = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) \cap E = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

Άσκηση 1.4.

$$\left. \begin{array}{l} A \text{ πυκνό} \subseteq \mathbb{R} \\ \neq \text{ πετ.} \subseteq \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow A \nsubseteq \text{ πυκνό} \subseteq \mathbb{R}. \quad (\text{ζεστο}).$$

Αρκεί να δείξω το εξής : αν $A \text{ πυκνό} \subseteq \mathbb{R}$ και $a \in A$ τότε το $A \setminus \{a\}$ παραμένει πυκνό στο $\mathbb{R}$ (με επαγωγή).

Έστω $x \in \mathbb{R}$. Τότε στο $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A .
Εάν $\varepsilon > 0$. Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος, τα $x-\varepsilon < a_1 < a_2 < \dots < a_n < x+\varepsilon$.

Επειδή το A είναι πυκνό στο $(x-\varepsilon, a_1)$ υπάρχει κι άλλο $a_0 \in A$.
Απογο, διότι $a_0 \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

$$- D_1, D_2 \text{ πυκνά} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow D_1 \cap D_2 \text{ πυκνό} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\text{Λάθος, διότι } D_1 = \mathbb{Q}, D_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

Άσκηση 1.4.

(α). Αν x_0 κλειστό σημείο του X τότε κάθε πυκνό υποσύνολο D του X περιέχει το x_0 .

(ζεστο): Έστω ότι υπάρχει πυκνό

$$D \subseteq X \setminus \{x_0\} \Rightarrow \overline{D} \subseteq \overline{X \setminus \{x_0\}} = X \setminus \{x_0\}$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{κλειστό}} \Rightarrow \overline{D} \neq X \text{ άπογο.}$$

(β). Έστω (x_n) ακολουθία στον (X, d) .

$$\forall n, m \quad d(x_n, x_m) \geq 1.$$

$$\text{Τότε το } A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ είναι ελεστό}$$

$$\text{ζεστο: } \Xi \epsilon \rho \alpha \upsilon \rho \epsilon \text{ ότι } \bar{A} = A \cup A'$$

Αν δείξουμε ότι $A' = \emptyset$ τότε ...

x_0 κλειστό σημείο του X



x_0 όχι σ.σ. του X



$$\nexists \varepsilon > 0 \quad B(x_0, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x_0\}) = \emptyset.$$



$$\nexists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) = \{x_0\}$$

$$\Leftrightarrow (\{x_0\} \text{ ανοικτό})$$

... $\bar{A} = A \Rightarrow A$ κλειστό

Έστω $x \in X$. Θα βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε στην $B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία του A .

Παίρνω $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Αν υπάρχουν $n \neq m$ ώστε $x_n, x_m \in B(x, \frac{1}{3})$, τότε θα έχουμε $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1$.

Αρα στην $B(x, \frac{1}{3})$ έχω το πολύ ένα σημείο του A . αζονο.

Άσκηση 2.6.

$$(X, d) \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

(α). Αν οι f, g είναι op. συνεχείς, τότε η $g \circ f$ είναι op. συνεχής.

Δώσω ε λάθος;

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\eta > 0$, $|u - v| < \eta \Rightarrow |g(u) - g(v)| < \varepsilon$ (g op. συνεχής)

Υπάρχει $\delta > 0$, $d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta$ (f op. συνεχής).

Έστω $d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \eta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(y))| \overset{u}{\overset{v}{\leq}} \varepsilon.$$

$$\text{" } |g \circ f(x) - g \circ f(y)| < \varepsilon.$$

(β). Αν η f είναι ορισμοφύρα συνεχής και φραγμένη και η g συνεχής, τότε η $g \circ f$ είναι op. συνεχής.

Έστω: $f(x) \in [-u, u]$ για κάποιο $u > 0$ (f φραγμένη).

Σύστω. $g: [-u, u] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow$ op. συνεχής στο $[-u, u]$

Η απόδειξη είναι παρόμοια με του (α).

(γ). Αν u, f είναι συνεχής και προχρηστική και u, g είναι op. συνεχής τότε $u \circ g \circ f$ είναι op. συνεχής

Λάθος: Παίρνουμε την $g(x) = x$. Αυτή είναι op. συνεχής

Αν ισχύει το (γ) τότε $\forall f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και προχρηστική

θα είχαμε $g \circ f = \text{id}$ op. συνεχής

(Αυτό δεν είναι π.χ. $f(x) = \cos(x^2)$ op. συνεχής & προχρηστική αλλά όχι ομοιόμορφα συνεχής)

Άσκηση 2.10.

Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής και 1-1 συνάρτηση

$$f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

α' τρόπος: Η διαγωνίος του τετραγώνου $[0,1] \times [0,1]$ απεικονίζεται σε κάποιο $[a,b]$

Έστω $y \in (a,b)$. και $\varepsilon > 0$, $(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \subset (a,b)$.

Έχω $y = f(x)$, $x \in (\text{διαγωνίος})$.

Υπάρχει $\delta > 0$, $f(B(x,\delta)) \subset (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, αίτιο.

β' τρόπος: $\forall t \in [0,1]$. Θεωρούμε την $f_t: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_t(x) = f(x,t).$$

$f_t([0,1]) = I_t$ - γινόμενο κλειστού διαστήματος γιατί f_t 1-1 και συνεχής

$$\forall s \neq t \quad I_t \cap I_s = \emptyset$$

Προσέχουμε υπερπριθμότητα. Γεγονός: διαστήματα που είναι ακερά ~~διαστήματα~~