Πραγματική

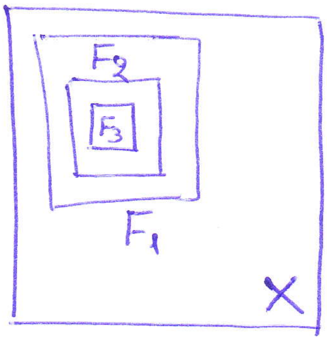
02/12/2014
Μάθημα 17

Θεώρημα (Cantor) (*)

Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Αν $\{F_n\}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ (Ακριβέστερα το $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο)

Απόδειξη

- $\forall n\in\mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n\in F_n$
- Επειδή $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$ [και η (F_n) φθίνουσα], η (x_n) είναι βασική
- Ο X είναι πλήρης $\rightsquigarrow \exists x\in X : x_n \xrightarrow{d} x$
- Επειδή κάθε F_k είναι κλειστό και $x_k, x_{k+1},\dots \in F_k$ και $x_n\to x$ $\Rightarrow x\in F_k$. Άρα $x\in\bigcap_n F_n$



Θεώρημα (Αντίστροφο του Cantor)

Έστω (X,d) μετρικός χώρος ο οποίος ικανοποιεί την (*). Τότε ο (X,d) είναι πλήρης.

Απόδειξη

Έστω (x_n) βασική ακολουθία του X. $\forall n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε $R_n=\{x_k : k\geq n\}$ και $F_n=\overline{R_n}$. Κάθε F_n είναι κλειστό και μη κενό ($x_n\in F_n$). Η (F_n) είναι φθίνουσα: $\underbrace{\{x_k : k\geq n\}}_{R_n} \supseteq \underbrace{\{x_k : k\geq n+1\}}_{R_{n+1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{R_n}\supseteq\overline{R_{n+1}}$ Δηλαδή $F_n\supseteq F_{n+1}$.

- $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$: Έστω $\varepsilon>0$. Η (x_n) είναι βασική άρα υπάρχει $n_0 : \forall k,s\geq n_0$ $d(x_k,x_s)<\varepsilon/2 \Rightarrow \operatorname{diam}(R_{n_0})=\sup\{\underbrace{d(x_k,x_s)}_{\leq\varepsilon/2} : k,s\geq n_0\}$

  $\Rightarrow \operatorname{diam}(F_{n_0})=\operatorname{diam}(\overline{R_{n_0}}) \underset{\text{άσκηση}}{=\!=\!=} \operatorname{diam}(R_{n_0}) \leq \varepsilon/2<\varepsilon$

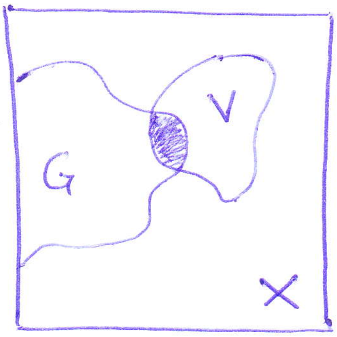
  Τότε $\forall n\geq n_0$ $F_n\subseteq F_{n_0} \Rightarrow \operatorname{diam}(F_n)\leq\operatorname{diam}(F_{n_0})<\varepsilon$.

  Έχουμε υπόθεση την (*) άρα υπάρχει (μοναδικό) $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$

Τέλος $x_n \to x$: $\forall n\in\mathbb{N}$ έχουμε $\left.\begin{array}{l} x_n\in F_n \\ x\in F_n\end{array}\right\} \Rightarrow d(x_n,x)\le \text{διάμ}(F_n)\to 0$.

Θεώρημα (Baire)

Υπενθύμιση: (α) Αν D πυκνό $\subseteq (X,d)$ και G ανοιχτό πυκνό $\subseteq (X,d)$ τότε το $G\cap D$ είναι πυκνό $\subseteq X$.



(β) Αν $G_1, G_2, \dots G_N$ είναι ανοιχτά και πυκνά $\subseteq X$ τότε το $G_1\cap G_2\cap \dots G_N$ είναι ανοιχτό πυκνό σύνολο

(γ) **Παράδειγμα**: Στον $\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$ με τη συνήθη μετρική, το $G_n=\mathbb{Q}\setminus\{q_n\}$ είναι ανοιχτό και πυκνό $(\forall n)$, αλλά $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n=\emptyset$.

Θεώρημα (Baire, πρώτη μορφή)

Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Αν $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ανοιχτών και πυκνών υποσυνόλων του X, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό G_δ-υποσύνολο του X. Ειδικότερα, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\neq\emptyset$.

Απόδειξη

Έστω $V\neq\emptyset$ ανοιχτό υποσύνολο του X. Ζητάμε $x\in V\cap\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right)$

Βήμα 1:

Αφού το G_1 είναι πυκνό, έχουμε $V\cap G_1\neq\emptyset$ και $V\cap G_1$ ανοιχτό ως τομή ανοιχτών συνόλων.
Θεωρούμε $x_1\in V\cap G_1$ και βρίσκουμε $\boxed{r_1\le 1}$ ώστε $\boxed{\hat{B}(x_1,r_1)\subseteq V\cap G_1}$

Βήμα 2:

Η $B(x_1,r_1)$ είναι μη κενό ανοιχτό σύνολο και το G_2 είναι πυκνό και ανοιχτό, άρα $B(x_1,r_1)\cap G_2\neq\emptyset$ και ανοιχτό
Παίρνουμε $x_2\in B(x_1,r_1)\cap G_2$: Μπορούμε να βρούμε $\boxed{r_2\le \frac{1}{2}}$ ώστε
$\hat{B}(x_2,r_2)\subseteq B(x_1,r_1)\cap G_2\subseteq \hat{B}(x_1,r_1)\cap G_2\subseteq (V\cap G_1)\cap G_2 = V\cap(G_1\cap G_2)$

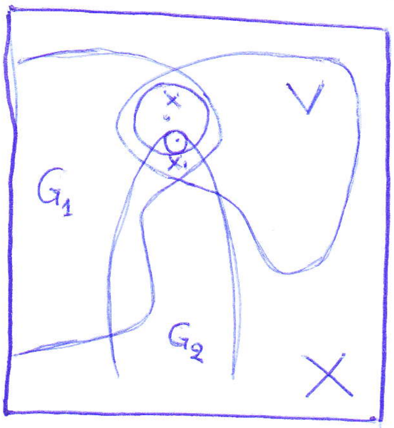
Επαγωγικά ορίζουμε μια ακολουθία $\{x_n\}$ και μια ακολουθία $\{r_n\}$:

- $0<r_n\le \frac{1}{n}$ και • $\hat{B}(x_n,r_n)\subseteq V\cap(G_1\cap G_2\cap\dots G_n)$
- $\hat{B}(x_{n+1},r_{n+1})\subseteq \hat{B}(x_n,r_n)$

Η ακολουθία $\{\hat{B}(x_n,r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ αποτελείται από μη κενά κλειστά σύνολα, είναι φθίνουσα και $diam(\hat{B}(x_n,r_n)) \leq 2r_n \leq \frac{2}{n} \to 0$.

Από το Θεώρημα Cantor, υπάρχει $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n,r_n)$

Έστω $m \in \mathbb{N}$. Τότε $x \in \hat{B}(x_n,r_n) \subseteq V \cap (G_1 \cap G_2 \cap \cdots G_n) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x \in G_n \\ x \in V \end{matrix}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$



Θεώρημα (Baire, δεύτερη μορφή)

Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος. Αν $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία κλειστών $\subseteq X$ και $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $F_n^{\circ} = int(F_n) \neq \emptyset$

Απόδειξη

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \Rightarrow \emptyset = X^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(X \setminus F_n)}_{\text{ανοιχτά}}$. Κάποιο $X \setminus F_{n_0}$ δεν είναι πυκνό (αλλιώς θα είχαμε αριθμήσιμη τομή ανοιχτών πυκνών που θα ήταν κενή - Άτοπο από το 1ο Θεώρημα του Baire).

$X \setminus F_{n_0}$ όχι πυκνό $\Rightarrow \overline{X \setminus F_{n_0}} \subsetneq X \xRightarrow[\text{συνίσμός}]{} X \setminus F_{n_0}^{\circ} \subsetneq X \Rightarrow F_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$.

Ορισμός

1. Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται <u>πουθενά πυκνό</u> (ή αραιό) αν $int(\overline{A}) = \emptyset$.
2. Ένα $B \subseteq (X,d)$ λέγεται <u>α' κατηγορίας</u> αν $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και κάθε A_n είναι αραιό.
3. Ένα $\Gamma \subseteq (X,d)$ λέγεται <u>β' κατηγορίας</u> αν δεν είναι α κατηγορίας

Το Θεώρημα Baire (β' μορφή) λέει ότι κάθε πλήρης μετρικός χώρος (X,d) είναι β' κατηγορίας στον εαυτό του.

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \xRightarrow{\text{Baire}} \exists n_0 : int(\overline{A_{n_0}}) \neq \emptyset \Rightarrow A_{n_0}$ δεν είναι αραιό.

Εφαρμογές :

① Κάθε πυκνό G_δ-υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Απόδειξη

Έστω $A=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ πυκνό, G_n ανοιχτό $\forall n$. Τότε κάθε G_n είναι πυκνό: $\forall n$ $A\subseteq G_n \Rightarrow \mathbb{R}=\overline{A}\subseteq \overline{G_n} \Rightarrow \overline{G_n}=\mathbb{R} \Rightarrow G_n$ πυκνό.

Υποθέτουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο: $A=\{\alpha_m : m\in\mathbb{N}\}$, $\alpha_m\in\mathbb{R}$

Ορίζουμε $V_m=\mathbb{R}\setminus\{\alpha_m\}$. Κάθε V_m είναι ανοιχτό και πυκνό.

Έχουμε $\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m=\mathbb{R}\setminus\{\alpha_m : m\in\mathbb{N}\}=\mathbb{R}\setminus A$.

Τότε $\emptyset=A\cap(\mathbb{R}\setminus A)=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n\right)\cap\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}V_m\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}U_k$ όπου $U_k=\begin{cases} G_n, & k=2n \\ V_n, & k=2n+1\end{cases}$

Βρήκαμε αριθμήσιμη οικογένεια ανοιχτών πυκνών $\subseteq\mathbb{R}$, με κενή τομή. ΑΤΟΠΟ, από το 1ο Θεώρημα Baire. Άρα το A είναι υπεραριθμήσιμο.

② Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία να είναι συνεχής στους ρητούς και ασυνεχής στους άρρητους.

Απόδειξη

Έστω ότι υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\overset{\mathbb{Q}=}{\{x : \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}}=C(f)$

Όμως $C(f)=\mathbb{Q}=\{x:\tau_f(x)=0\}=\bigcap_n\{x:\tau_f(x)<\frac{1}{n}\}$. Τότε το $\mathbb{Q}$ είναι

ανοιχτό

G_δ-σύνολο. Επίσης, το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό

Από το ① το $\mathbb{Q}$ είναι υπεραριθμήσιμο ΑΤΟΠΟ, άρα δεν υπάρχει τέτοια f.

③ Θεώρημα Osgood

Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι $\forall x\in[0,1]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι φραγμένη.

Τότε υπάρχει $[\alpha,\beta]\subseteq[0,1]$ και $M>0$, $\forall x\in[\alpha,\beta]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n(x)|\leq M$.

Απόδειξη

$\forall k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $F_k = \{x \in [0,1] : \forall n \in \mathbb{N} \ |f_n(x)| \leq k\}$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in [0,1] : |f_n(x)| \leq k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-k,k])$$

κλειστό αφού f_n συνεχής

Άρα κάθε F_k είναι κλειστό

Επίσης, $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = [0,1]$: Έστω $x \in [0,1]$. Από υπόθεση, η $\{f_n(x)\}$ είναι φραγμένη $\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall n \ |f_n(x)| \leq k_0 \Rightarrow x \in F_{k_0}$.

Ο $([0,1], |\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος και $[0,1] = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, F_k κλειστά

Από το β' Θεώρημα Baire υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$: $F_k^{\circ} \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists [\alpha,\beta] \subseteq F_{k_0} \Rightarrow \forall x \in [\alpha,\beta]$, $\forall n \in \mathbb{N} \ |f_n(x)| \leq k_0 = M$.

Ασκήσεις

1 και 2 (1) Στον $\mathbb{N}$ θεωρούμε τις μετρικές $d(m,n) = |m-n|$ και $\sigma(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Ο $(\mathbb{N},d)$ είναι πλήρης, ενώ ο $(\mathbb{N},\sigma)$ όχι. Τα μονοσύνολα είναι ανοιχτά και στους δύο χώρους: οι d και σ είναι ισοδύναμες. Οι $(\mathbb{N},d)$ και $(\mathbb{N},\sigma)$ είναι ομοιομορφικοί.

(2) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνήθη μετρική $|\cdot|$ και την $d(x,y)$ με $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Οι $(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι πλήρης, ενώ ο $(\mathbb{R},d)$ όχι. Οι $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $(\mathbb{R},d)$ είναι ομοιομορφικοί διότι $|\cdot| \sim d$.

! Η πληρότητα δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς.

Απόδειξη

(1) (α) Ο $(\mathbb{N},d)$ είναι πλήρης: κάθε d-βασική ακολουθία είναι τελικά σταθερή, άρα συγκλίνει.

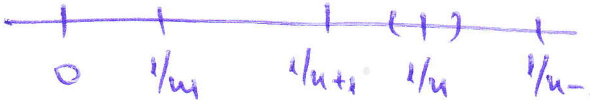
(β) Ο $(\mathbb{N},\sigma)$ δεν είναι πλήρης: θεωρούμε την $x_n = n$. Αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε $\forall n,m \geq n_0$ $\sigma(x_n,x_m) = \sigma(n,m) =$
$= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Όμως αν είχαμε $x_n = n \xrightarrow{\sigma} k \in \mathbb{N}$ τότε θα είχαμε $\sigma(n,k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{k}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \underset{\downarrow 0}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{k}$ ~~\~\~~~

Δηλαδή $\frac{1}{k} = 0$ ΑΤΟΠΟ

είναι ο πιο κοντινός $\frac{1}{m}$ στον $\frac{1}{n}$

(γ) Κάθε $\{n\}$ είναι d-ανοιχτό: $\{n\} = B(n, \frac{1}{2})$

(δ) Κάθε $\{n\}$ είναι σ-ανοιχτό: $\forall m \neq n$ έχουμε $\sigma(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \geq \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n(n+1)} = \varepsilon_n$.



Άρα $B_\sigma(n, \frac{\varepsilon_n}{2}) = \{n\}$

(ε) Οι d και σ είναι ισοδύναμες

$x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow$ τελικά $x_n \in B(x, 1/2) = \{x\} \Rightarrow$ τελικά $x_n = x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\sigma} x$

$x_n \xrightarrow{\sigma} x \Rightarrow$ τελικά $x_n \in B(x, \varepsilon_x/2) = \{x\} \Rightarrow$ τελικά $x_n = x \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x$

(στ) Η $I : (\mathbb{N}, d) \to (\mathbb{N}, \sigma)$ είναι ομοιομορφισμός διότι $d \sim \sigma$.

(2)(α) Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης: Απειροστικός

(β) Ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης: η $x_n = n$ είναι βασική ως προς $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ αλλά δεν συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$

(γ) $|\cdot| \sim d$: $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x \underset{\text{arctan συνεχής}}{\Longrightarrow} \arctan x_n \to \arctan x \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_n, x) = |\arctan x_n - \arctan x| \to 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x$

$x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow$

$\Rightarrow \arctan x_n \to \arctan x. \underset{\text{tan συνεχής}}{\Longrightarrow} \tan(\arctan x_n) \xrightarrow{|\cdot|} \tan(\arctan x)$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$.

(3) Έστω d_1 και d_2 δύο μετρικές στο ίδιο σύνολο X με την ιδιότητα: υπάρχει $\alpha, \beta > 0$ ώστε $\forall x, y \in X$.

$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$

Τότε λέμε ότι d_1, d_2 Lipschitz ισοδύναμες.

Δείξτε ότι:

(α) $d_1 \sim d_2$

(β) $(x_n)-d_1$ βασική $\Leftrightarrow (x_n)-d_2$ βασική

(γ) (X, d_1) πλήρης $\Leftrightarrow (X, d_2)$ πλήρης

Απόδειξη

(α) Αν $x_n \xrightarrow{d_1} x$ τότε $d_1(x_n,x)\to 0$, άρα $0\le d_2(x_n,x)\le \beta d_1(x_n,x)\to 0$
$\Rightarrow x_n \xrightarrow{d_2} x$ (το αντίστροφο ισχύει λόγω της άλλης ανισότητας)

(β) Έστω (x_n)-d_1 βασική. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει n_0: $\forall n,m\ge n_0$
$d_1(x_n,x_m)<\varepsilon/\beta$. Τότε $\forall n,m\ge n_0$ $d_2(x_n,x_m)\le \beta d_1(x_n,x_m)<\beta\frac{\varepsilon}{\beta}=\varepsilon$
Άρα η (x_n) είναι d_2 βασική. (Όμοια το αντίστροφο).

(γ) Άσκηση Έστω (x_n) d_1-βασική. $\xRightarrow[(\beta)]{}$ (x_n) d_2-βασική $\Rightarrow$
$\xRightarrow[\substack{(X,d_2)\\ \text{πλήρης}}]{}$ $\exists x\in X: d_2(x_n,x)\to 0 \xRightarrow[(\alpha)]{} \exists x\in X$ $d_1(x_n,x)\to 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x_n)$ d_1-συγκλίνουσα.

6. Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $D\subseteq X$:
D πυκνό και $X\setminus D$ πυκνό.
Δείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα $D, X\setminus D$ δεν είναι F_σ-σύνολο.

Απόδειξη

- Έστω ότι D-F_σ και $X\setminus D$-F_σ

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$X\setminus D\text{-}G_\delta \qquad D\text{-}G_\delta$$

- Γράφουμε $X\setminus D=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, U_n ανοιχτά

$D=\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$, V_m ανοιχτά

$U_n\supseteq X\setminus D \Rightarrow \overline{U_n}\supseteq \overline{X\setminus D}=X$ (πυκνά)
$\Rightarrow \forall n$ U_n πυκνό

$V_m\supseteq D$ και D πυκνό
$\Rightarrow V_m$ πυκνό

Όμως τότε $\phi=(X\setminus D)\cap D=\underbrace{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}U_n\right)\cap\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}V_m\right)}_{\text{αριθμήσιμη τομή ανοιχτών πυκνών}}\neq\phi$ Baire

ΑΤΟΠΟ

7. Έστω $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ευθειών στον $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι
$\operatorname{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}L_n\right)=\phi$.

Απόδειξη

εξηγήστε το

$\forall n$ το $\mathbb{R}^2 \setminus L_n$ είναι ανοιχτό πυκνό σύνολο. Από το α' Θεώρημα Baire ($\mathbb{R}^2$ πλήρης): $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}^2 \setminus L_n)$ πυκνό

$$\parallel$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n \right) \text{ πυκνό}$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \left(\bigcup_n L_n \right)} = \mathbb{R}^2$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{R}^2 - \operatorname{int}\left(\bigcup_n L_n \right) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \operatorname{int}\left(\bigcup_n L_n \right) = \emptyset .$$