

Πλήρεις μετρικοί χώροι

Ορισμός: Ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται πλήρης αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στο X είναι συχθίνουσα:

$$\exists x \in X \text{ ώστε } x_n \xrightarrow{d} x.$$

Παραδείγματα: (α) (X, d) πλήρης, όπου d διακριτή μετρική.

Αν (x_n) είναι βασική στον (X, d) τότε είναι τελικά σταθερή, άρα συχθίνει.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Παίρνουμε } \varepsilon = \frac{1}{2}. \text{ Αφού η } (x_n) \text{ είναι βασική, υπάρχει } n_0 \forall n, m \geq n_0 \\ \delta(x_n, x_m) < \frac{1}{2} \Rightarrow \forall n, m \geq n_0 \quad x_n = x_m \\ \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad x_n = x_{n_0} \end{array} \right]$$

(β) Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι πλήρης.

Ξέρουμε ότι για ακολουθία (x_n) στο $\mathbb{R}$ είναι βασική αν και μόνο αν συχθίνει.

(γ) Ο $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$ είναι πλήρης $(1 \leq p < \infty)$.

Έχουμε (x_n) βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$.

$$x_n = (x_n(1), x_n(2), \dots, x_n(m))$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει n_0 :

$$\forall n, s \geq n_0 \quad \|x_n - x_s\|_p < \varepsilon. \text{ δηλ. } \forall n, s \geq n_0 \quad \left(\sum_{k=1}^m |x_n(k) - x_s(k)|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

$$\text{δηλ. } \forall n, s \geq n_0 \quad \forall k=1, \dots, m \quad |x_n(k) - x_s(k)| \leq \left(\sum_{k=1}^m |x_n(k) - x_s(k)|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Αρα για κάθε $k=1, \dots, m$ η $(x_n(k))_{n=1}^\infty$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$.

Αφού ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης, $\exists x(k) \in \mathbb{R} : x_n(k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x(k)$.

Τότε $x_n \rightarrow x = (x(1), \dots, x(m))$ διότι:

$$\|x_n - x\|_p^p = \sum_{k=1}^m |x_n(k) - x(k)|^p \rightarrow 0.$$

(δ). Έστω $\Gamma \neq \emptyset$, με $\ell_\infty(\Gamma)$ συμβολίζουμε το σύνολο των φραγμένων συναρτήσεων $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$,

(π.χ. $\ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{N})$). Ο $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι διαν. χώρος και γίνεται χώρος με νόρμα, αν θέσουμε: $\|f\|_\infty = \sup \{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ο $(\ell_\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

Απόδειξη: Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $(\ell_\infty(\Gamma))$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_0 : $[\forall n, m \geq n_0 \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.]^*$

Τότε αν $\gamma \in \Gamma$ για κάθε $n, m \geq n_0$

$$|f_n(\gamma) - f_m(\gamma)| \leq \sup \{|f_n(x) - f_m(x)| : x \in \Gamma\} = \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

Άρα για κάθε $\gamma \in \Gamma$ η $(f_n(\gamma))$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \exists y_\gamma \in \mathbb{R} : f_n(\gamma) \rightarrow y_\gamma.$$

$\mathbb{R}$ πλήρης

Ορίζουμε $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\gamma) = y_\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\gamma)$.

Θα δείξουμε ότι: $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ (?).

(Ειδικότερα, $f \in \ell_\infty(\Gamma)$ διότι για μεγάλο n έχουμε:

$$\|f_n - f\|_\infty < 1 \Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty < 1 + \|f_n\|_\infty < \infty)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει n_0 :

$$\forall n, m \geq n_0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad |f_n(\gamma) - f_m(\gamma)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.$$

$$\downarrow m \rightarrow \infty$$

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \quad |f_n(\gamma) - f(\gamma)| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \sup \{|f_n(\gamma) - f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} \leq \varepsilon.$$

$$\|f_n - f\|_\infty.$$

(ε). Ο $(\mathbb{Q}, 1.1)$ είναι πλήρης.

Παίρνουμε α άρρητο και $q_n \in \mathbb{Q} : q_n \xrightarrow{1.1} \alpha$ (δηλ. $|q_n - \alpha| \rightarrow 0$)

Αφού η (q_n) συγκλίνει στο $\mathbb{R}$, η (q_n) είναι βασική στο $\mathbb{R}$:

$$" \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0 \quad |q_n - q_m| < \varepsilon "$$

$\Rightarrow (q_n)$ βασική στον $(\mathbb{Q}, 1.1)$.

Αν ο $(\mathbb{Q}, 1.1)$ ήταν πλήρης, θα υπήρχε $q \in \mathbb{Q} : |q_n - q| \rightarrow 0$.

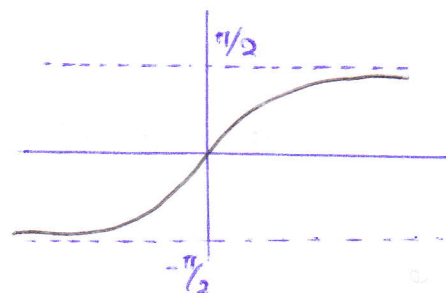
Τότε, στο $\mathbb{R}$ $\left. \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} q_n \rightarrow q \\ \xrightarrow{\quad} q_n \rightarrow \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{μονός} \\ \text{ορισμός} \end{array} q = \alpha$ άτοπο, διότι α άρρητος

(στ.) Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$.

Θετούμε $x_n = n$

• Η (x_n) είναι d-βασική.

$$d(x_n, x_m) = |\arctan n - \arctan m|$$



$$\leq |\arctan n - \frac{\pi}{2}| + |\frac{\pi}{2} - \arctan m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

αν τα n, m είναι αρκετά μεγάλα (διότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$).

• Έστω ότι $x_n = n \xrightarrow{d} x \Rightarrow |\arctan n - \arctan x| \rightarrow 0$

Τότε: $\arctan n \rightarrow \arctan x$

$\downarrow$
 $\pi/2$

$\approx \arctan x = \pi/2$
άτοπο, διότι η $\arctan$ δεν παίρνει
τιμή απώλ. $\pi/2$

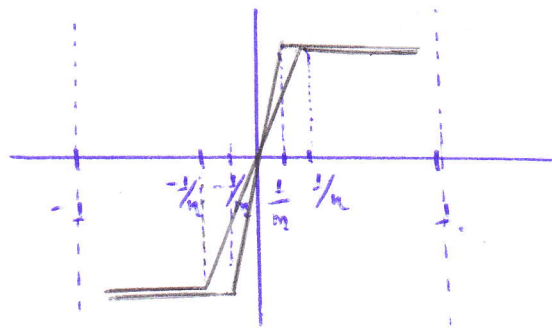
(ς). Ο $(C[-1, 1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης

$C[-1, 1] =$ συνεχής $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$$

Για κάθε $n \geq 2$, ορίζουμε:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ nx, & -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ -1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \end{cases}$$



Ισχυρισμός: Η (f_n) είναι $\|\cdot\|_1$ -βασιική.

Έστω $m > n$. Υπολογίζουμε ενν:

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|_1 &= \int_{-1}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx = \\ &= \int_{-1}^{-1/n} |f_m(x) - f_n(x)| dx + \int_{-1/n}^{1/n} |f_m(x) - f_n(x)| dx + \int_{1/n}^1 |f_m(x) - f_n(x)| dx \\ &\leq \int_{-1/n}^{1/n} (|f_m(x)| + |f_n(x)|) dx \leq \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0: \frac{4}{n_0} < \varepsilon$.

Τότε $\forall m, n \geq n_0$ έχουμε $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{4}{n} \leq \frac{4}{n_0} < \varepsilon$.

Ισχυρισμός: Δεν υπάρχει συνεχής $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$.

Έστω ότι υπάρχει $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ώστε

$$\|f_n - f\|_1 = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Έστω $0 < \delta < 1$. Υπάρχει $n_0: \forall n \geq n_0, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \delta$.

Τότε $\forall n \geq n_0$ έχουμε: $f_n(x) = 1 \quad \forall x \in [\delta, 1]$

(γιατί αν $x \geq \delta$ τότε $x \geq \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) = 1$).

$$\text{Έχουμε: } \int_{\delta}^1 |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0.$$

$$\text{Άρα } \int_{\delta}^1 |1 - f(x)| dx = 0 \Rightarrow |1 - f(x)| = 0 \text{ στο } [\delta, 1] \\ \Rightarrow f(x) = 1 \text{ στο } [\delta, 1]$$

~~Έστω $\delta > 0$ οποιοδήποτε~~

Άρα αυτό ισχύει $\forall \delta \in (0, 1)$ έχουμε ειδικότερα

$$f(\delta) = 1 \quad \forall 0 < \delta < 1.$$

Ομοίως: $f(\delta) = -1, \quad \forall -1 < \delta < 0.$

$$\text{Άρα } 1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(\delta) \neq \lim_{\delta \rightarrow 0^-} f(\delta) = -1.$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο 0. Άρα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Τότε το F είναι κλειστό $\Leftrightarrow$ ο $(F, d|_{F \times F})$ είναι πλήρης.

Απόδειξη: $(\Rightarrow)$. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο F (ως προς d).

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in F : x_n \rightarrow x$. Αφού ο X είναι πλήρης, $\exists x \in X : x_n \rightarrow x$. Αφού το F είναι κλειστό, $x_n \in F$ και $x_n \rightarrow x$ συνεπώς ότι $x \in F$.

$(\Leftarrow)$. (Εδώ δεν θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι X πλήρης).

Έστω ~~(x_n)~~ (x_n) στο F και έστω ότι $x_n \rightarrow x \in X$.

Θα δείξουμε ότι το $x \in F$ ($\Rightarrow F$ κλειστό).

Αφού η (x_n) είναι συχνηνόμενη, είναι βασική (ως προς d).

Αφού $x_n \in F$, η (x_n) είναι βασική στον $(F, d|_{F \times F})$. Αφού ο

$(F, d|_{F \times F})$ είναι πλήρης, $\exists y \in F : d(x_n, y) \rightarrow 0$

Όπως: $d(x_n, x) \rightarrow 0$.

Από το μυστηριώδες του ορίου: $x = \gamma \in F$.

ΕΦΑΡΜΟΤΕΣ

Έστω ότι έχουμε πλήρη μ. χώρο X και υπόχωρο F . Ο F θα είναι πλήρης αν και μόνο αν F κλειστό $\subseteq X$.

(α). π.χ. ο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης, διότι δεν είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$.

(β). Είδαμε ότι ο $\mathcal{C}_0$ είναι πλήρης. Θεωρούμε τον $\mathcal{C}_0 =$ τον χώρο των μηδενικών ακολουθιών, με $\|x\|_\infty = \sup \{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \}$

Ο $(\mathcal{C}_0, \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

Αφού ο $\mathcal{C}_0$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{C}_\infty$ (υποσύνολο και ίδια μετρική), αρκεί να δείξουμε ότι ο $\mathcal{C}_0$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{C}_\infty$.

Έστω (x_m) ακολουθία στον $\mathcal{C}_0$, η οποία συγκλίνει σε κάποια $x \in \mathcal{C}_\infty$.

$$x_m = (x_m(1), x_m(2), \dots, x_m(k), \dots).$$

$$x = (x(1), x(2), \dots, x(k), \dots).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε ένα k_0 : $\forall k \geq k_0$: $|x(k)| < \varepsilon$.

(τότε $x(k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ δηλ. $x \in \mathcal{C}_0$).

Αφού $\|x_m - x\|_\infty \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$, υπάρχει m_0 : $\|x_{m_0} - x\|_\infty < \varepsilon/2$.

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : |x_{m_0}(k) - x(k)| < \varepsilon/2.$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} : |x(k)| \leq |x(k) - x_{m_0}(k) + x_{m_0}(k)| < \varepsilon/2 + |x_{m_0}(k)|.$$

Αφού $x_{m_0} \in \mathcal{C}_0$ έχουμε: $x_{m_0}(k) \rightarrow 0 \Rightarrow \exists k_0$: $\forall k \geq k_0$ $|x_{m_0}(k)| < \varepsilon/2$.

Τότε: $\forall k \geq k_0$ $|x(k)| < \varepsilon/2 + |x_{m_0}(k)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας χώρος $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα, ο οποίος είναι πλήρης ως προς την επαγόμενη μετρική, λέγεται χώρος Banach.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CANTOR: Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος.

Αν (F_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη-κενών κλειστών υποσυνόλων του X , με $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$, τότε:

$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$. Για την ακρίβεια περιέχει ένα μόνο σημείο.

Σημείωση: (F_n) φθίνουσα: $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \dots$

Απόδειξη: • Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in F_n$ ($F_n \neq \emptyset$).

• Η (x_n) είναι βασική: Παρατηρούμε πρώτα ότι

αν $n, m \geq n_0$ τότε $\left. \begin{array}{l} x_n \in F_n \subseteq F_{n_0} \\ x_m \in F_m \subseteq F_{n_0} \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_{n_0})$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$, υπάρχει n_0 : $\text{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$.

Τότε: $\forall n, m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_{n_0}) < \varepsilon$.

Αφού ο X είναι πλήρης, υπάρχει $x \in X$: $x_n \rightarrow x$.

Ζήτος, $\forall n \in \mathbb{N}$: $x \in F_n$: Το εετικό ζήτημα $(x_s)_{s \geq n}$ της (x_n) .

περιέχεται στο F_n (δηλ. $x_n \in F_n$, $x_{n+1} \in F_{n+1} \subseteq F_n, \dots$).

και συγκλίνει στο x . Αφού το F_n είναι κλειστό, $x \in F_n$.

Αφού το n είναι τυχόν, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Αν $x, y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ τότε $\forall n$, $x, y \in F_n \Rightarrow \forall n$ $d(x, y) \leq \text{diam}(F_n) \rightarrow 0$.

$\Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Παράδειγμα :

- Η υπόθεση ότι όλα τα F_n είναι κλειστά είναι αναρρέστη.

π.χ. $A_n = (0, \frac{1}{n})$

$A_n \supseteq A_{n+1}$ και $\text{diam}(A_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Όπως $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$.

(Ου $x \in \bigcap A_n$ τότε : $\sim x > 0$
 $\sim x < \frac{1}{n} \quad \forall n$) αλυστό.
 $(x < 0)$

- Η υπόθεση ότι $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ είναι αναρρέστη.

π.χ. $F_n = [n, +\infty)$ / $F_n \supseteq F_{n+1}$
 $F_n = \text{κλειστό}$

$\text{diam}(F_n) = \infty$ και $\bigcap F_n = \emptyset$ (ου $x \in \bigcap F_n$ τότε $\forall n \quad x \geq n$ αλυστό).

- Η υπόθεση ότι ο X είναι πλήρης είναι αναρρέστη.

π.χ. $X = (\mathbb{R} | \mathbb{Q}, 1.1)$, $F_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \cap (\mathbb{R} | \mathbb{Q})$

F_n κλειστά, $F_n \downarrow$, $\bigcap F_n = \emptyset$. γιατί $\bigcap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = \{0\}$ και $0 \notin \mathbb{R} | \mathbb{Q}$.

Άσκησης (Έχει γίνει η 9).

"Χαρακτηρισμοί του πλήρους χώρου" (: 4, 5, 10, 11).

Άσκηση 4 Έστω (X, d) μ. χώρος και έστω D πεπεσμένο υποσύνολο του X . Υποθέτουμε ότι κάθε βασική ακολουθία (x_n) με όρους στο D συγκλίνει. Δείξτε ότι ο (X, d) είναι πλήρης.

Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X . Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_n \in D$: $d(x_n, z_n) < \frac{1}{n}$ (βρίσκας ε, δει είναι αρκετό).

(το D είναι πεπεσμένο).

Έστω $\varepsilon > 0$.

• Η (z_n) είναι βασική, υπάρχει

$$n_1 : \forall n, m \geq n_1 \quad d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Παίρνουμε $n_0 \geq n_1$ το οποίο επιπλέον

$$\text{ικανοποιεί την } \frac{1}{n_0} < \varepsilon/3.$$

$$\text{Έστω } n, m \geq n_0. \text{ Τότε } d(z_n, z_m) \leq d(z_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_m) + d(x_m, z_m)$$

$$< \frac{1}{n} + d(x_n, x_m) + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} + d(x_n, x_m) + \frac{1}{n_0} < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Αφού η (z_n) είναι βασική και $z_n \in D$ από την υπόθεση :

$$\exists x \in X : d(z_n, x) \rightarrow 0. \text{ Τότε } d(x_n, x) \leq d(z_n, x_n) + d(z_n, x)$$

$$< \frac{1}{n} + d(z_n, x) \rightarrow 0 + 0 = 0 \quad \text{δηλαδή } x_n \rightarrow x.$$

Άσκηση 5

$$(X, d) \text{ πλήρης } (\Leftrightarrow) \forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \text{ ή } \hat{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) \leq \varepsilon\}$$

είναι πλήρης περριτός υπόχωρος του X .

$(\Rightarrow)$. Κάθε $\hat{B}(x, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο, άρα πλήρης υπόχωρος γιατί ο X είναι πλήρης (πρόταση).

$(\Leftarrow)$. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στο X . Τότε, η (x_n) είναι ~~πραγματική~~ φραγμένη $\Rightarrow \exists R > 0 \forall n \ x_n \in \hat{B}(x_0, R)$.
($\exists x_0 \in X$).

• Από την υπόθεση η $\hat{B}(x_0, R)$ είναι πλήρης χώρος (με την d).

και η (x_n) βασική σε αυτόν, άρα $\exists x \in \hat{B}(x_0, R) : x_n \rightarrow x$.

Μια παραλλαγή της άσκησης: -10-

$$(X, d) \text{ πλήρης} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \nexists 0 < \delta < \varepsilon_0, \hat{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

πλήρης με respect to υποχώρου του X .

Έστω (x_n) βασική. Παίρνουμε $\varepsilon < \varepsilon_0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x_{n_0}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad x_n \in \hat{B}(x_{n_0}, \varepsilon) \quad \wedge \quad \text{Από η } (x_n)_{n \geq n_0} \text{ συγκλίνει σε κάποιο } x \in \hat{B}(x_{n_0}, \varepsilon).$$

$$\Rightarrow x_n \rightarrow x.$$