<u>Ισοδύναμες μετρικές</u>

14º ΜΑΘΗΜΑ
28-11-14.

Έστω d και σ δύο μετρικές στο X. Λέμε ότι οι d και σ είναι ισοδύναμες ($d \sim \sigma$) αν: "$x_n \xrightarrow{d} x \iff x_n \xrightarrow{\sigma} x$".

ΠΡΟΤΑΣΗ: Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α). $d \sim \sigma$

(β). $I : (X,d) \to (X,\sigma)$, $I^{-1} : (X,\sigma) \to (X,d)$ συνεχείς ($I(x) = x$).

(γ) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$:

$B_d(x,\delta) \subseteq B_\sigma(X,\varepsilon)$ και $B_\sigma(x,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$.

(δ). $G \subseteq X$ d-ανοιχτό $\iff G$ σ-ανοιχτό.

(ε). $F \subseteq X$ d-κλειστό $\iff F$ σ-~~ανοιχτό~~ κλειστό

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β) Έστω $x \in X$. Θα δείξουμε ότι η I είναι συνεχής στο x. Με την αρχή της μεταφοράς: αν $x_n \xrightarrow{d} x$ τότε (από (*)) $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ δηλ. $\underset{x_n}{\underset{\shortparallel}{I(x_n)}} \xrightarrow{\sigma} \underset{x}{\underset{\shortparallel}{I(x)}}$

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Η I είναι συνεχής στο x, άρα $\exists \delta > 0$: $\cancel{I}(B_d(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(\cancel{I}(x),\varepsilon)$.

$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \\ f(B_d(x,\delta)) \subseteq B_\delta(f(x),\varepsilon) \end{array} \right.$

(γ) $\Rightarrow$ (δ) Έστω G σ-ανοιχτό. Θα πάρουμε $x \in G$ και θα δείξουμε ότι είναι d-εσωτερικό σημείο του $G \Rightarrow G$ d-ανοιχτό.

Αφού G σ-ανοιχτό και $x \in G$, υπάρχει $\varepsilon > 0$: $B_\sigma(x,\varepsilon) \subseteq G$

Από το (γ) υπάρχει $\delta > 0$: $B_d(x,\delta) \subseteq B_\sigma(x,\varepsilon) \subseteq G \Rightarrow x$ d-εσ. σημείο του G

(δ) $\Rightarrow$ (ε). Έστω F d-κλειστό $\Rightarrow X \setminus F$ d-ανοιχτό

$\overset{(\delta)}{\Rightarrow} X \setminus F$ σ-ανοιχτό $\Rightarrow F$ σ-κλειστό.

(ε) $\Rightarrow$ (α). Έστω $x_n \xrightarrow{d} x$. Θα δείξουμε ότι $x_n \xrightarrow{\sigma} x$

Έστω ότι δεν ισχύει : υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε άπειροι $x_n \notin B_\sigma(x,\varepsilon)$.

Δηλ. $\exists (x_{k_n})$ υπακολουθία της (x_n) : $\forall n$ $\sigma(x_{k_n},x)\geq\varepsilon$

Ορίζουμε $F=\{y\in X : \sigma(y,x)\geq\varepsilon\} = X \setminus B_\sigma(x,\varepsilon)$.

- F σ-κλειστό $\underset{(\varepsilon)}{\Longrightarrow}$ F d-κλειστό.

- $x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow x_{k_n} \xrightarrow{d} x \Rightarrow x\in F$

$x_{k_n}\in F$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(x,x)\geq\varepsilon$$

$$\overset{\|}{0} \qquad \text{Άτοπο.}$$

Ομοιομορφισμός

Λέμε ότι μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ είναι ομοιομορφισμός αν είναι 1-1 και επί, και οι f, f^{-1} είναι συνεχείς.

Αν υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ δύο μετρικών χώρων (X,d) και (Y,σ) τότε λέμε ότι είναι ομοιομορφικοί, και γράφουμε:

$X\simeq Y$.

Παραδείγματα (α) Αν d,σ είναι ισοδύναμες μετρικές, σε ένα σύνολο X, τότε $(X,d)\cong(X,\sigma)$. Διότι η $I(x)=x$ είναι ομοιομορφισμός.

(β). Κάθε μετρικός χώρος είναι ομοιομορφικός με έναν φραγμένο μετρικό χώρο : Έστω (X,d) μετρικός χώρος.

Η $\sigma=\dfrac{d}{1+d} \sim d$ και φραγμένη

Από το (α). $(X,d)\cong\underset{(\text{φραγμένος})}{(X,\sigma)}$.

(γ). $\mathbb{R}\simeq\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Ζητώ $f:\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, 1-1 και επί, αμφισυνεχής. Υπάρχει: $f(x)=\arctan x$.

(δ). Άσκηση 19

Εξετάστε αν : (α) $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Z}$; (β) $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}$, (γ). $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}$;

(δ) $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$ (όλα με την συνήθη μετρική).

(α). $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Z}$ / Όχι , διότι : $\mathbb{R}$ υπεραριθμήσιμο, $\mathbb{Z}$ αριθμήσιμο $\Rightarrow \nexists f : \mathbb{Z} \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} \mathbb{R}$

(β) $\mathbb{R} \simeq \mathbb{Q}$ / Όχι , Ομοίως , διότι $\mathbb{Q}$ αριθμήσιμο.

(γ). $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Q}$ / Και τα δυο είναι άπειρα αριθμήσιμα

Έστω ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$.

Τότε · f συνεχής

· f 1-1.

Θεωρούμε την $\frac{1}{n} \to 0 \overset{f \text{ συν.}}{\Longrightarrow} f\left(\frac{1}{n}\right) \to f(0)$ στο $\mathbb{Z}$.

Άρα η $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ είναι τελικά σταθερή και ίση με $f(0)$.

Δηλ. $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) \underset{f \ 1-1}{\Longrightarrow} \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{n} = 0$, άτοπο.

(δ). $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{N}$ / Ναι , Τα δυο σύνολα είναι άπειρα αριθμήσιμα , άρα

$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, 1-1 και επί.

Όμως η f είναι (ομοιομ. συνεχής)

$\left(\text{αν } |m-n| < \underset{1/2}{\delta} \text{ τότε } m = n \Rightarrow |f(m) - \underset{m}{f(n)}| = 0 < \varepsilon\right)$

Ομοίως η $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ είναι (ομ.) συνεχής. ∎

Μια $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ 1-1 και επί

$$f(n) = \begin{cases} k , & n = 2k . \\ 1-k , & n = 2k-1 \end{cases}$$

[Επίσης: $f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right](-1)^n$.

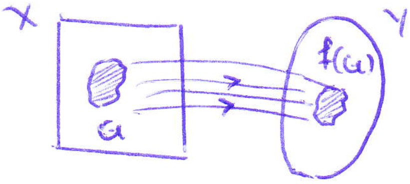
ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω (X,d), (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι και έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ 1-1 και επί.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α). Η f είναι ομοιομορφισμός

(β). Το $G\subseteq X$ είναι ανοιχτό $\Leftrightarrow$ το $f(G)\subseteq Y$ είναι ανοιχτό.

(γ). Το $B\subseteq X$ είναι κλειστό $\Leftrightarrow$ το $f(B)\subseteq Y$ είναι κλειστό.



($\Leftarrow$). Έστω G τω. $f(G)$ είναι ανοιχτό $\subseteq Y$.

Έχουμε: $G = \underset{\text{συνεχής}}{f^{-1}}\big(\underset{\text{ανοιχτό}}{f(G)}\big)$ = ανοιχτό ως αντίστροφη εικόνα ανοιχτού μέσω της f η οποία είναι συνεχής

$f^{-1}(f(G)) = G$

$f(f^{-1}(A)) = A$

($\Rightarrow$). Έστω G ανοιχτό.

Έστω $h=f^{-1}$. Η h είναι συνεχής $\Rightarrow h^{-1}(G)$ ανοιχτό $\subseteq Y$.

$$h^{-1}(G) = (f^{-1})^{-1}(G) = f(G) \quad \text{άσκηση.}$$

Ταλάντωση.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x\notin\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q},\ \text{ΜΚΔ}(p,q)=1. \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στους άρρητους και ασυνεχής στους ρητούς.

Ορισμός: Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Η ταλάντωση της f στο x ορίζεται ως εξής:

$$\tau_f(x) = \inf\{\delta(f(V)) : V \text{ ανοιχτό},\ x\in V\}$$

$(\delta = \text{diam})^*$

ΠΡΟΤΑΣΗ: f συνεχής στο $x \iff \tau_f(x) = 0$.

ΛΗΜΜΑ: $\tau_f(x) = A_x := \lim_{\eta \to 0} \delta(f(B(x,\eta)))$.

Σημ: Το όριο υπάρχει, γιατί:

$$\eta < \zeta \Rightarrow B(x,\eta) \subseteq B(x,\zeta).$$

$$\Rightarrow f(B(x,\eta)) \subseteq f(B(x,\zeta))$$

$$\Rightarrow \delta(f(B(x,\eta))) \leq \delta(f(B(x,\zeta))).$$

Απόδειξη: $\forall \eta > 0 \quad \tau_f(x) \leq \delta(f(B(x,\eta)))$.

$$\Rightarrow \tau_f(x) \leq A_x = \lim_{\eta \to 0} \delta(f(B(x,\eta))).$$

Αντίστροφα, έστω V ανοιχτό με $x \in V$. Υπάρχει $\eta > 0$: $B(x,\eta) \subseteq V$.

$$\Rightarrow A_x \leq \delta(f(B(x,\eta))) \leq \delta(f(V)).$$

Συνεπώς $A_x \leq \inf\{\delta(f(V)) : V \text{ ανοιχτό}, x \in V\} = \tau_f(x)$.

Απόδειξη πρότασης: / $(\Rightarrow)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι

$0 \leq \tau_f(x) = A_x \leq \varepsilon$. $\underset{\varepsilon \text{ τυχόν}}{\rightsquigarrow} \tau_f(x) = 0$.

Υπάρχει $\eta > 0$: αν $y \in B(x,\eta)$ τότε $\sigma(f(y), f(x)) < \varepsilon/2$

(γιατί f συνεχής στο x).

$\Rightarrow \forall y, z \in B(x,\eta)$ ισχύει $\sigma(f(y), f(z)) \leq \sigma(f(y), f(x)) + \sigma(f(x), f(z))$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Άρα $\tau_f(x) = A_x \leq \delta(f(B(x,\eta))) \leq \varepsilon$.

$(\Leftarrow)$. Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x: υπάρχει $\varepsilon > 0$:

$\forall \eta > 0 : \exists y \in B(x, \eta) : \sigma(f(y), f(x)) \geq \varepsilon.$

$\forall \eta > 0 : \delta(f(B(x,\eta))) \geq \varepsilon.$

Άρα: $\tau_f(x) = \lim_{\eta \to 0^+} \delta(f(B(x,\eta))) \geq \varepsilon.$ άτοπο.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>:

Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$. Το <u>σύνολο των σημείων συνέχειας</u> της f, $C(f) = \{x \in X : \eta\ f$ είναι συνεχής στο $x\}$ είναι <u>G_δ-σύνολο</u>.

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$V_n = \{x \in X : \tau_f(x) < \tfrac{1}{n}\}$$

Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{x \in X : \forall n\ \tau_f(x) < \tfrac{1}{n}\} = \{x \in X : \tau_f(x) = 0\}$

$\overset{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}{=} \{x \in X : f$ συνεχής στο $x\} = C(f).$

<u>Ισχυρισμός</u>: κάθε V_n είναι ανοιχτό.

Έστω $x \in V_n \Rightarrow \tau_f(x) = \lim_{\eta \to 0} \delta(f(B(x,\eta))) < \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\exists \eta > 0 : \delta(f(B(x,\eta))) < \frac{1}{n}.$

Θα δείξουμε ότι: $B(x, \frac{\eta}{2}) \subseteq V_n$ [$\Rightarrow x$ εσ. σημείο του V_n και x τυχόν $\Rightarrow V_n$ ανοιχτό]

Έστω $y \in B(x, \frac{\eta}{2})$. Τότε $B(y, \eta/2) \subseteq B(x, \eta)$

$\Rightarrow \tau_f(y) \leq \delta(f(B(y, \eta/2))) \leq \delta(f(B(x,\eta))) < \frac{1}{n} \Rightarrow y \in V_n.$