

ορισμός: Μια συνάρτηση $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ λέγεται

ομοιομορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

ώστε: "για κάθε $x, y \in X$, με $d(x, y) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$ ".

Παράδειγμα 1: (i) Ασκήση 8: Υπάρχει φραγμένη συνεχής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δεν είναι ομοιομορφα συνεχής.

"Αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στο $\mathbb{R}$ με $|y_n - x_n| \rightarrow 0$, αλλά $|f(x_n) - f(y_n)| \not\rightarrow 0$ ".

$f(x) = \cos(x^2)$, $|f'(x)| = |-2x \cdot \sin(x^2)|$ "μεγάλη" αν x "μεγάλο" και $|\sin(x^2)| = 1$.

Παίρνουμε $x_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}$ $\left(x = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right)$.

$$y_n = \sqrt{n\pi}$$

$$x_n - y_n = \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{n\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{n\pi}} \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &= |\cos(x_n^2) - \cos(y_n^2)| = \left| \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(n\pi) \right| = \\ &= |\cos(n\pi)| = 1 \not\rightarrow 0. \end{aligned}$$

(ii). Έστω $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$. Τότε, η f είναι ομοιομορφα συνεχής.

Παίρνουμε " δ " = $\frac{1}{2}$ (ανεξάρτητα από το ε). Έστω $\varepsilon > 0$.

Αν $x, y \in X$ και $d(x, y) < \frac{1}{2} \Rightarrow x = y \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) = 0 < \varepsilon$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 : (χαρακτηρισμός μέσω ακολουθιών) :

Η $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ είναι ομοιομορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ζεύγος ακολουθιών $(x_n), (y_n)$ στον X , με $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, ισχύει $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow 0$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$). Έστω $x_n, y_n \in X$, με $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. (Ήτάρει $n_0 : \forall n \geq n_0 \sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$).

Αρα η f είναι ομοιομορφα συνεχής υπάρχει $\delta > 0$:

" $d(x, y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$ "

Αρα $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$, υπάρχει $n_0 : \forall n \geq n_0 d(x_n, y_n) < \delta$.

Έτσι $\forall n \geq n_0, d(x_n, y_n) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$.

($\Leftarrow$). Έστω ότι η f δεν είναι ομοιομορφα συνεχής.

Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: $\forall \delta > 0$ υπάρχουν $x_\delta, y_\delta \in X$:

$d(x_\delta, y_\delta) < \delta$ αλλά $\sigma(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon$.

Το εφαρμόζουμε αυτό με $\delta = \frac{1}{n}$:

"Υπάρχουν $x_n, y_n \in X : d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ αλλά $\sigma(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ "

$\Downarrow$

$d(x_n, y_n) \rightarrow 0$.

$\Downarrow$

$\sigma(f(x_n), f(y_n)) \not\rightarrow 0$.

Αυτό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (α). Αν η $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ είναι ομοιομορφα συνεχής τότε αντιστοιχεί βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες.

(β). Αν η $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ αντιστοιχεί βασικές σε βασικές, τότε είναι συνεχής.

-3-

Απόδειξη: (α). Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X .

Θα δείξουμε ότι η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία στον Y .

Παίρνουμε ετο: Ζητάμε $\forall \varepsilon > 0 : \exists n, m \geq n_0$ $\delta(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$.

Αφού η f είναι ομομορφισμός συνεχούς, υπάρχει $\delta > 0$:

$$"d(x, y) < \delta \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon" (*).$$

Αφού η x_n είναι βασική, υπάρχει n_0 :

$$\forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < \delta \xRightarrow{(*)} \delta(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Σημείωση: Το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα η

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$ δεν είναι ομομορφισμός συνεχούς.

Όπως αν (x_n) βασική στο $\mathbb{R} \rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x_n \rightarrow x$.

Συνεχής $f(x_n) \rightarrow f(x) \Rightarrow$ η $(f(x_n))$ είναι βασική.

(β) Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.

Θεωρούμε x_n στο X , με $x_n \xrightarrow{d} x$ και θα δείξουμε ότι

$$f(x_n) \xrightarrow{\delta} f(x).$$

Ορίζουμε την ακολουθία $(x_1, x, x_2, x, x_3, x, \dots)$.

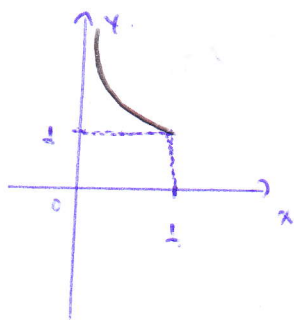
$$\text{Έχουμε: } \left. \begin{array}{l} y_{2k-1} = x_k \rightarrow x \\ y_{2k} = x \rightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow y_n = \begin{cases} x_k, & n=2k-1 \\ x, & n=2k \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_n \rightarrow x \Rightarrow (y_n) \text{ βασική.}$$

$$\Rightarrow (f(y_n)) \text{ βασική στον } Y.$$

Επίσης $f(y_{2k}) = f(x) \rightarrow f(x)$. Άρα $f(y_n) \rightarrow f(x)$ (λεφ. II).
 $\Rightarrow \underbrace{f(y_{2k-1})}_{f(x_k)} \rightarrow f(x)$

Σημείωση: Το αντίστροφο δεν ισχύει. ⁴ Ήταν f συνεχή και δεν ανήκουμε κάθε βασική ακολουθία σε βασική ακολουθία.



Η $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

Θεωρούμε την $x_n = \frac{1}{n}$. Έχουμε $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (x_n)$ βασική στο $\mathbb{R}$.

Όπως $f(x_n) = \frac{1}{x_n} = n \rightarrow +\infty$. Άρα η $(f(x_n))$ δεν είναι βασική.

Ερώτηση: Έστω $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ op. συνεχής. Είναι σωστό ότι;
 "αν $A \subseteq X$ φραγμένο, τότε το $f(A)$ είναι φραγμένο $\subseteq Y$ "

ΟΧΙ. $I: (\mathbb{R}, \delta) \mapsto (\mathbb{R}, 1.1)$, $I(x) = x$.

- Το $\mathbb{R}$ είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}, \delta)$ ($\text{diam}(\mathbb{R}, \delta) = 1$).
- Η I είναι op. συνεχής (είδαμε ότι κάθε $f: (X, \delta) \rightarrow (Y, \sigma)$ είναι op. συνεχής).
- Όπως το $I(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ δεν είναι φραγμένο ως προς την 1.1.

Ασκήσεις

Έστω $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ συνεχής συνάρτηση και έστω D ποικύ $\subseteq X$

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.

(α) Αν η $f|_D$ είναι φραγμένη, τότε η f είναι φραγμένη.

(β) Αν η $f|_D$ είναι op. συνεχής, τότε η f είναι op. συνεχής

(γ) Αν η $f|_D$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.

(α). Λέμε ότι η $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ είναι φραγμένη αν το $f(X)$ είναι φραγμένο υποσύνολο του Y , δηλ. αν υπάρχουν $y_0 \in Y$ και $R > 0$

ώστε: $f(X) \subseteq \hat{B}(y_0, R)$.

$\Leftrightarrow$

$\forall x \in X \quad d(y_0, f(x)) \leq R.$

Η υπόθεση $f|_D$ = φραγμένη σημαίνει ότι το $f(D)$ είναι φραγμένο,

δηλ. $\exists y_0 \in Y \exists R > 0 : \forall z \in D, d(y_0, f(z)) \leq R$.

Έστω $x \in X$. Αφού το D είναι πυκνό, υπάρχουν $z_n \in D : z_n \rightarrow x$.

$\implies f(z_n) \rightarrow f(x)$. $\implies \sigma(y_0, f(z_n)) \rightarrow \sigma(y_0, f(x))$.
φωτισ $\nearrow$

Τότε $\sigma(y_0, f(x)) \leq R$, δηλ. $f(x) \in \hat{B}(y_0, R)$

(B). Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0 : "d(x, y) < \delta, \text{ τότε } \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon"$.

Αφού $f|_D$ είναι op. συνεχούς ομαρτημένη, $\exists \delta > 0$:

(*) "Αν $z, w \in D$ και $d(z, w) < \delta$, τότε $\sigma(f(z), f(w)) < \varepsilon/2$ ".

Έστω $x, y \in X$, με $d(x, y) < \delta$. Αφού το D είναι πυκνό,

υπάρχουν $z_n, w_n \in D : z_n \rightarrow x$ και $w_n \rightarrow y$.

Τότε $d(z_n, w_n) \rightarrow d(x, y) < \delta \implies \exists n_0 : \forall n \geq n_0, d(z_n, w_n) < \delta$.

$\implies \forall n \geq n_0, \sigma(f(z_n), f(w_n)) < \varepsilon/2$

$\downarrow$ φωτ. $\downarrow$

$\implies \sigma(f(x), f(y)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

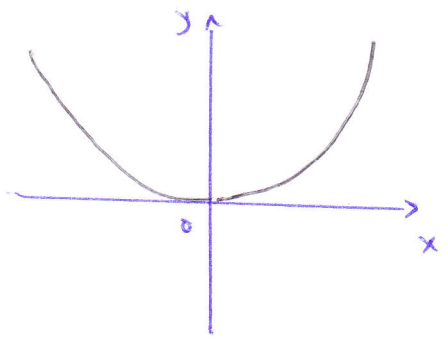
(γ). Όχι. Θεωρούμε την $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$

Είναι συνεχής αλλά δεν είναι 1-1.

$f(x) = f(y) \iff x^2 = y^2 \iff x = \pm y$.

Θα ορίσουμε πυκνό $D \subseteq \mathbb{R}$ ώστε

$f|_D$ 1-1.



Ορίσουμε: $D = (\mathbb{Q} \cap (0, +\infty)) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap (-\infty, 0))$.

Το D είναι πυκνό: κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ είναι όριο ακολουθίας
 θετικών ρημών, και κάθε $x \in \mathbb{R}$, $x < 0$ είναι όριο ακολουθίας
 αρνητικών απημένων.

Έστω $x, y \in D$ ώστε $f(x) = f(y) \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x = \pm y$.

Έστω ότι $x = -y$ και χωρίς περιορισμούς της γενικότητας έστω ότι $x > 0$ και $y < 0$.

Αφού $x > 0$ και $x \in D \leadsto x \in \mathbb{Q}$.

Αφού $y < 0$ και $y \in D \leadsto y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow x = -y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, Αντίφαση.

18. Έστω (X, d) μετρικός χώρος $\emptyset \neq A \subseteq X$.

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι οποιοδήποτε συνεχής συνάρτηση τότε η f επεκτείνεται σε οποιοδήποτε συνεχή $\hat{f}: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$.

- Θέλουμε να ορίσουμε το $\hat{f}(x)$ στο τόχου $x \in \bar{A}$, με τέτοιο τρόπο ώστε (i) αν $x \in A$ τότε $\hat{f}(x) = f(x)$.
- (ii) $\hat{f}$ ομ. συνεχής.

Έστω $x \in \bar{A}$. Υπάρχει (a_n) στο A , με $a_n \rightarrow x$.

Τότε η $(f(a_n))$ συχθίνει: η (a_n) είναι συχθινούσα στον $X \Rightarrow$ η (a_n) είναι βασική $\Rightarrow$ η $(f(a_n))$ είναι βασική.

$\uparrow$
f ομ. συνεχής

$\Rightarrow (f(a_n))$ συχθίνει σε πραγματικό αριθμό. (l_a) .

• Έστω (b_n) μια άλλη ακολουθία στο A : $b_n \rightarrow x$.

Όπως πριν, δείχνουμε ότι η $(f(b_n))$ συχθίνει σε κάποιο l_b .

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow x \\ b_n \rightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow d(a_n, b_n) \rightarrow d(x, x) = 0$$

$\Downarrow$ f ομ. συνεχής στο A .

$$\underbrace{|f(a_n) - f(b_n)|}_{\hat{l}_a \quad \hat{l}_b} \rightarrow 0 \Rightarrow l_a = l_b$$

Ορίζουμε $\hat{f}: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\hat{f}(x) = \lim f(a_n)$, για οποιαδήποτε a_n στο A με $a_n \rightarrow x$.

Η f είναι καλά ορισμένη.

• Αν $x \in A$, τότε η $a_n = x$ είναι ακολουθία του A και $a_n \rightarrow x$.
 άρα $\tilde{f}(x) = \lim f(a_n) = f(x)$.

Αρα η $\tilde{f}$ επεκτείνει την f .

Η $\tilde{f}|_A$ είναι ορ. συνεχής και το A είναι πυκνό $\subseteq \bar{A}$.

απόδειξη άνω
 συνεπ. (B) $\hat{f}$ ορ. συνεχής.

Σημείωση: Το ίδιο το εγώ γενικότερο: αν $\emptyset \neq A \subseteq (X, d)$ και
 $f: (A, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ ορ. συνεχής και αν ο (Y, σ) είναι πλήρης,
 τότε η f επεκτείνεται σε ορ. συνεχή $\hat{f}: (\bar{A}, d) \rightarrow (Y, \sigma)$.

1. Lipschitz συναρτήσεις

Η $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ λέγεται Lipschitz αν υπάρχει $\mu > 0$:

$$\forall x, y \in X \quad \sigma(f(x), f(y)) \leq \mu d(x, y).$$

• Μια τέτοια f είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$,
 επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{\mu}$ και έχουμε:

" $d(x, y) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(y)) \leq \mu d(x, y) < \mu \delta = \mu \cdot \frac{\varepsilon}{\mu} = \varepsilon$."

• Αν $A \subseteq (X, d)$ φραγμένο και η $f: X \rightarrow Y$ είναι Lipschitz, τότε
 το $f(A)$ είναι φραγμένο.

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\text{diam}(f(A)) < \infty$.

• Έσθ A είναι φραγμένο: υπάρχει $L > 0$:

$\forall x, y \in A : d(x, y) \leq L \Rightarrow \forall x, y \in A \quad \sigma(f(x), f(y)) \leq \mu d(x, y) \leq \mu L$
 (συμβαίνει στο A).

Άρα $\sup \{ \sigma(f(x), f(y)) : x, y \in A \} \leq \mu L$

"
 $\text{diam}(f(A))$.

$(\text{diam} f(A) \leq \mu \cdot \text{diam}(A))$.

2. Ισομετρία: Η $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ λέγεται ισομετρία αν διατηρεί τις αποστάσεις.

$$" \forall x, y \in X \quad \sigma(f(x), f(y)) = d(x, y) " \quad (*)$$

- Κάθε ισομετρία είναι Lipschitz με σταθερά 1.
- Κάθε ισομετρία είναι 1-1. $f(x) = f(y) \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.
- Αν υπάρχει ισομετρία $f: X \rightarrow Y$, τότε λέμε ότι ο X εμμετρώνεται ισομετρικά στο Y . Αν υπάρχει ισομετρία επί $f: X \rightarrow Y$ τότε λέμε ότι οι X, Y είναι ισομετρικά ισομόρφους.
- Δύο ισομετρικοί ισομόρφους μετρικοί χώροι "ταυτίζονται".

3. Ισοδύναμες μετρικές.

Δύο μετρικές d και σ στο ίδιο σύνολο X λέγονται ισοδύναμες αν στους (X, d) και (X, σ) έχουμε τις ίδιες συγκεντρώσεις ακολουθιών: $x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\sigma} x$.

Παράδειγμα: Κάθε μετρική είναι ισοδύναμη με μια φραγμένη μετρική.

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ορίζουμε:

$$\sigma(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Η σ είναι μετρική. Οι d και σ είναι ισοδύναμες. $(d \sim \sigma)$.

Πρέπει να δείξουμε ότι: $x_n \xrightarrow{d} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{\sigma} x$, δηλ.

$$\frac{d(x_n, x)}{1 + d(x_n, x)} \rightarrow 0 \quad (\Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0).$$

Λόγισμα: Αν $a_n \geq 0$ τότε $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{1+a_n} \rightarrow 0$.

$$(\Rightarrow) 1+a_n \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{a_n}{1+a_n} \rightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

$$(\Leftarrow) \text{ Αν } \beta_n = \frac{a_n}{1+a_n} \Leftrightarrow \beta_n + \beta_n \cdot a_n = a_n$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{\beta_n}{1-\beta_n} \text{ και } \beta_n \rightarrow 0, \text{ άρα } a_n \rightarrow \frac{0}{1-0} = 0.$$

(Επιπλέον, $\forall x, y \in X, \sigma(x, y) \leq 1 \Rightarrow \text{diam}((X, \sigma)) \leq 1$).

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω d και σ δυο μετρικές στο X .

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α). $d \sim \sigma$

(β). Οι $I: (X, d) \rightarrow (X, \sigma)$ και $I^{-1}: (X, \sigma) \rightarrow (X, d)$ είναι συνεχείς.

(γ). $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X$: υπάρχει $\delta_1 > 0: B_\sigma(x, \delta_1) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$.
 ή υπάρχει $\delta_2 > 0: B_d(x, \delta_2) \subseteq B_\sigma(x, \varepsilon)$.

(δ). A ανοικτό $\subseteq (X, d) \Leftrightarrow A$ ανοικτό $\subseteq (X, \sigma)$.

(ε). B κλειστό $\subseteq (X, d) \Leftrightarrow B$ κλειστό $\subseteq (X, \sigma)$.

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β). Έστω ότι $x_n \xrightarrow{d} x \xRightarrow{(α)} x_n \xrightarrow{\sigma} x$

$$\Rightarrow I(x_n) \xrightarrow{\sigma} I(x).$$

Άρα η I είναι συνεχής (ομοία I^{-1}).

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η I είναι συνεχής στο x , υπάρχει $\delta > 0: I(B_d(x, \delta)) \subseteq B_\sigma(I(x), \varepsilon)$.

(γ) $\Rightarrow$ (δ). Έστω A ανοικτό στον (X, σ) . Θέλω να δείξω ότι το A είναι ανοικτό στον (X, d) . Παίρνω $x \in A$ και δείχνω ότι το x είναι d εσωτερικό σημείο του A .

Αφού το A είναι δ -ανοιχτό, και $x \in A$,

$\exists \varepsilon > 0 : B_\delta(x, \varepsilon) \subseteq A$. $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B_\delta(x, \delta) \subseteq B_\delta(x, \varepsilon) \subseteq A$.