(*) Η μετρική εδώ συμβολίζεται $^{\text{τυχαία}}$ με f αντί για το συνηθισμένο d.

Μάθημα 12ο

3.19 Δ.ο. το $\mathbb{R}$ δεν έχει μη-τετριμμένα υποσύνολα (διαφορετικά του $\emptyset$ και $\mathbb{R}$) που να είναι ανοικτά και κλειστά.

Έστω $A \subsetneq \mathbb{R}$ και $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ x \in \mathbb{R} \setminus A,\ \exists\ y \in A$
Υποθέτουμε ότι $y > x$
Ορίζουμε $B = \{t \in A : t > x\}$

$\Rightarrow \exists\ s = \inf B \qquad s \geq x$
$s \in \bar{B} \subseteq \bar{A} = A$

$s \in A,\ x \notin A \Rightarrow s > x$
Το A είναι ανοικτό
$\Rightarrow \exists\ \delta > 0$ τω $(s-\delta, s+\delta) \subseteq A$

Μπορούμε τότε να βρούμε $s_0 \in (s-\delta, s)$ τω $s_0 > x$
[$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (s-\delta, s) \qquad s_n \to s$
$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n_0 \in \mathbb{N} : s - s_n < \varepsilon$
$\varepsilon = s - x > 0 \Rightarrow \exists\ n_0 \quad s - s_n < s - x \quad \forall\ n \geq n_0$
Θέτω $s_0 = s_{n_0+1}$ $\qquad \Leftrightarrow s_n > x$]

Ισχύει ότι $s_0 \in B$ όμως $s_0 < s = \inf B$ άτοπο

3.36 Έστω (X_1, d_1), (X_2, d_2) μετρικοί χώροι
Θέτουμε $X = X_1 \times X_2$, $d = \max\{d_1, d_2\}$
Δ.ο.
α) Αν $G_1 \subseteq X_1$, $G_2 \subseteq X_2$ ανοικτά, τότε το

$G_1 \times G_2 \subseteq X$ είναι ανοιχτό

β) Αν $F_1 \subseteq X_1$, $F_2 \subseteq X_2$, κλειστά, τότε $F_1 \times F_2$ κλειστό στον X.

γ) Αν $D_1 \subseteq X_1$, $D_2 \subseteq X_2$ πυκνά, τότε $D_1 \times D_2$ πυκνό στον X.

α) Έστω $(x,y) \in G_1 \times G_2$

το G_1 είναι d_1-ανοιχτό, άρα $\exists\ \delta_1 > 0$ τ.ω $B_{d_1}(x,\delta_1) \subseteq G_1$

το G_2 είναι d_2-ανοιχτό, άρα $\exists\ \delta_2 > 0$ τ.ω $B_{d_2}(y,\delta_2) \subseteq G_2$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Ισχύει $B_d((x,y),\delta) \subseteq G_1 \times G_2$

Πράγματι έστω $(t,s) \in B_d((x,y),\delta)$

$d((x,y),(t,s)) < \delta \Rightarrow \max\{d_1(x,t), d_2(y,s)\} < \delta$

$\Rightarrow d_1(x,t) < \delta \leq \delta_1$ και $d_2(y,s) < \delta \leq \delta_2$

$(t,s) \in B_{d_1}(x,\delta_1) \times B_{\delta_2}(y,\delta_2) \subseteq G_1 \times G_2$

β) $F_1 \subseteq X_1$ κλειστό, $F_2 \subseteq X_2$ κλειστό

Θ.δ.ο $F_1 \times F_2 \subseteq X$ κλειστό.

Έστω $((x_n,y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F_1 \times F_2$: $(x_n,y_n) \to (x,y) \in X$

Θ.δ.ο $(x,y) \in F_1 \times F_2$

$(x_n)_n \subseteq F_1$ κλειστό, $x_n \xrightarrow{d_1} x \Rightarrow x \in F_1$

$(y_n)_n \subseteq F_2$ κλειστό, $y_n \xrightarrow{d_2} y \Rightarrow y \in F_2$

[Γιατί ξέρω ότι $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$
$\max\{d_1(x_n,x), d_2(y_n,y)\} < \varepsilon$]

$\Rightarrow (x,y) \in F_1 \times F_2$, άρα $F_1 \times F_2$ d κλειστό.

γ) $D_1 \subseteq X_1$, $D_2 \subseteq X_2$ πυκνά Θ.δ.ο $D_1 \times D_2$ πυκνό
Έστω $(x_1, x_2) \in X$ και $\varepsilon > 0$
Το D_1 είναι πυκνό, άρα $\exists\ y_1 \in D_1$ τω $d_1(y_1, x_1) < \varepsilon$
Το D_2 είναι πυκνό, άρα $\exists\ y_2 \in D_2$ τω $d_2(y_2, x_2) < \varepsilon$

$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\} < \varepsilon$

$\to$ Αν D_1, D_2 αριθμήσιμα, το ίδιο ισχύει για το $D_1 \times D_2$
Άρα αν $(X_1,d_1), (X_2,d_2)$ διαχωρίσιμο, τότε (X,d) διαχωρίσιμος.

4.1 Έστω $f,g : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνεχείς και $D \subseteq (X,\rho)$ πυκνό. Δ.Ο:

α) Το σύνολο $E = \{x \in X \ f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό

β) Αν $f(x) = g(x)\ \forall x \in D$, τότε $f \equiv g$

α) Έστω $(x_n)_n \subseteq E$ με $x_n \to x$ για κάποιο $x \in X$
Αρκεί ν.δ.ο $f(x) = g(x)$
$x_n \to x \xRightarrow{A.M} f(x_n) \to f(x)$
και $g(x_n) \to g(x)$

Όμως $(x_n) \subseteq E$ άρα $f(x_n) = g(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$

Άρα $x \in E \Rightarrow E$ κλειστό.

β) $D \subseteq E \Rightarrow X = \bar{D} \subseteq \bar{E} \overset{(a)}{=} E \Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

4.2 Έστω $f:(X,d) \to (Y,\sigma)$ και $x_0 \in X$
Δ.ο η f είναι συνεχής στο x_0 ανν
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τω αν $x, y \in X$ με $d(x, x_0) < \delta$
$d(y, x_0) < \delta$ ισχύει $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$

"$\Rightarrow$" $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τω $d(x, x_0) < \delta$
$\Rightarrow \sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2$

Αν $x, y \in X$ με $d(x, x_0) < \delta$ και $d(y, x_0) < \delta$
τότε $\sigma(f(x), f(y)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{τριγωνική}}}{\leq} \sigma(f(x), f(x_0)) + \underbrace{\sigma(f(x_0), f(y))}_{< \varepsilon}$

"$\Leftarrow$" Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $\exists \delta > 0$ τω αν $x \in X$,
με $d(x, x_0) < \delta$ (επίσης $d(x_0, x_0) = 0 < \delta$) έχουμε
$\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \Rightarrow f$ συνεχής

43) Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $G \subseteq X$.
Δ.ο το G είναι ανοιχτό ανν $\exists$ συνεχής
$f:(X,d) \to \mathbb{R}$ και $V \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό τ.ω
$f^{-1}(V) = G$

"$\Leftarrow$" Αν $f:(X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχής και $V \subseteq \mathbb{R}$
ανοιχτό τότε το σύνολο $G = f^{-1}(V)$ είναι
ανοιχτό $\subseteq X$

"$\Rightarrow$" $G \subseteq X$ ανοιχτό

1η περίπτ. $G = X$
Παρτε $f:(X,d) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
τότε $f^{-1}(\mathbb{R}) = X = G$ άρα ισχύει (για $V = \mathbb{R}$)

$* = \inf\{ \rho(x,y) : y \in X \setminus G \}$

$2^{η}$ περίπτωση

$G \subsetneq X \Rightarrow \exists\, x \in X \setminus G$

Ορίζουμε $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \rho(x, X \setminus G) = *$

Η f είναι μη-αρνητική, συνεχής.

Παρατηρούμε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in X \setminus G$

Αν $V = (0, \infty)$ τότε $f^{-1}(V) = G$

4.4 α) Έστω $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση και $Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$

Δ.Ο αν f συνεχής, τότε το $Z(f)$ είναι κλειστό στον X.

β) Έστω $F \subseteq X$. Δ.Ο το F είναι κλειστό αν $\exists$ συνεχής $f(X, \rho) \to \mathbb{R}$ τω $Z(f) = F$

α) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Z(f)$ με $x_n \to x$ για κάποιο $x \in \mathbb{R}$

f συνεχής οπότε από Α.Μ, $f(x_n) \to f(x)$

$x_n \in Z(f) \Leftrightarrow f(x_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $f(x) = \lim f(x_n) = 0 \Rightarrow x \in Z(f)$

β) "$\Leftarrow$" Αν $f : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε το σύνολο $F = Z(f)$ είναι κλειστό (από το (α))

"$\Rightarrow$" Αν $F \subsetneq X$ βρίσκουμε $x \in X \setminus F$ και ορίζουμε $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = d(x, F)$ ισχύει ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$

Άρα $F = Z(f)$. Αν $F = X$ θέτω $f(x) = 0$ $\forall x \in X$

4.5) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$.

Συμβολίζουμε με χ_A τη χαρακτηριστική συνάρτ. του A.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

Δ.Ο το σύνολο των σημείων συνέχειας της χ_A είναι το $A^{o} \cup (X \setminus A)^{o}$, το σύνολο των σημ. ασυνέχειας είναι το bd(A) και ότι η χ_A είναι συνεχής ανν το A είναι ανοικτό και κλειστό.

Ορίζουμε $C = \{ x \in X :$ η χ_A είναι συνεχής στο $x \}$

Θ.δ.ο $C = A^o \cup (X \setminus A)^o$

"$\subseteq$" Έστω $x_0 \in C$ τότε για $\varepsilon = 1/2$ $\exists\, \delta > 0$ τω αν $d(x, x_0) < \delta$ ισχύει $|\chi_A(x) - \chi_A(x_0)| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \chi_A(x) = \chi_A(x_0) \Rightarrow$ είτε $\chi_A(x) = \chi_A(x_0) = 1$
$\iff x, x_0 \in A$

είτε $\chi_A(x) = \chi_A(x_0) = 0 \iff$
$x, x_0 \notin A$

Αν $x_0 \in A$ τότε έχουμε δείξει ότι για το τυχαίο $x \in B(x_0, \delta)$ ισχύει $x \in A$ δηλ. $B(x_0, \delta) \subseteq A \Rightarrow x_0 \in A^o$

Αντίστοιχα αν $x_0 \in X \setminus A$ τότε έχουμε ότι $B(x_0, \delta) \subseteq X \setminus A \Rightarrow x_0 \in (X \setminus A)^o$

Σε κάθε περίπτωση $C \subseteq A^o \cup (X \setminus A)^o$

"$\supseteq$" Έστω $x_0 \in A^o \cup (X \setminus A)^o$

Αν $x \in A^o$ τότε $\exists\, \delta > 0$ τω $B(x, \delta) \subseteq A$ οπότε $\forall x$ με $d(x, x_0) < \delta$ ισχύει
$|\chi_A(x) - \chi_A(x_0)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Αν $x_0 \in (X \setminus A)^o$ $\exists\, \delta > 0$ τω $B(x_0, \delta) \subseteq X \setminus A$ οπότε $\forall x \in X$ με $d(x, x_0) < \delta$ ισχύει $|\chi_A(x) - \chi_A(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Άρα $x_0 \in C$

Δείξαμε ότι $C = A^o \cup (X \setminus A)^o$

Τότε $C^c = (A^o \cup (X \setminus A)^o)^c = (A^o)^c \cap ((X \setminus A)^o)^c$

$= \overline{A^c} \cap \overline{\underbrace{(X \setminus A)^c}_{A}} = bd(A)$

Αν χ_A είναι συνεχής τότε $C = X$, άρα $C^c = \emptyset$

Όμως δείξαμε ότι $C^c = bd(A)$ Άρα $bd(A) = \emptyset$
Έτσι $\bar{A} = A^o \cup bd(A) = A^o \Rightarrow$ το A είναι clopen.

Αν $\bar{A} = A^o$ τότε $A^o \cup bd(A) = A^o \Rightarrow bd(A) = \emptyset$
$\Rightarrow C^c = \emptyset \Rightarrow C = X$ δηλ. χ_A συνεχής.

4.6) Έστω $f(X,d) \to (Y,\sigma)$ Ορίζουμε $Gr(f) = \{(x, f(x)) : x = X\} \subseteq X \times Y$
Δ.Ο αν f συνεχής, τότε το Grf είναι κλειστό στον $X \times Y$. Ισχύει το αντίστροφο;
↳ (ως προς κάθε μετρική γινόμενο)

Έστω $((x_n, f(x_n)))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq G_r(f)$ με $(x_n, f(x_n)) \to$
$\to (x,y) \in X \times Y$
έχουμε ότι $x_n \to x$ και $f(x_n) \to y$
Όμως f συνεχής άρα από την Α.Μ $f(x_n) \to f(x)$
Από τη μοναδικότητα του ορίου έπεται ότι
$f(x) = y$ Άρα $(x,y) : (x, f(x)) \in Grf$

Για το αντίστροφο, θεωρείστε την $f : X \to \mathbb{R}^+$
με $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$

Η f είναι ασυνεχής στο 0
Όμως $Gr(f) = \{(0,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{x}), x \in (0,\infty)\}$

Αν $(x_n, \frac{1}{x_n}) \in \{(x, \frac{1}{x}) \cdot x \in (0,\infty)\}$ και

$(x_n, \frac{1}{x_n}) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2$ τότε $x_n \to x$

και $\frac{1}{x_n} \to y$

Όμως η $\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0,\infty)$,
άρα $\frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x} \Rightarrow (x,y) = (x, \frac{1}{x}) \in \{(x, \frac{1}{x}), x \in (0,\infty)\}$

4.7) Έστω $f:(X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση και έστω A διαχωρίσιμο $\subseteq X$ (δηλ. ο (A,ρ_A) είναι διαχωρίσιμος μ.χ.)
Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι διαχωρίσιμο $\subseteq Y$
Αρκεί να βρούμε αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $f(A)$
Έστω λοιπόν $y \in f(A)$ και $\varepsilon > 0$ Αφού $y \in f(A) \Rightarrow \exists\, x \in A$ τ.ω $y = f(x)$ A ρ-διαχωρίσιμο, άρα $\exists\, D \subseteq A$ αριθμήσιμο και πυκνό
Παρατηρούμε ότι $|f(D)| \leq |D| \Rightarrow f(D)$ αριθμήσιμο.
Η f είναι συνεχής στο x, άρα $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ τ.ω $\rho(x,d) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(d)) < \varepsilon$
Επειδή το D είναι πυκνό στο A, υπάρχει $d \in D$ τ.ω $\rho(x,d) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(d)) < \varepsilon$
$\Rightarrow f(D)$ πυκνό υποσύνολο του $f(A)$

4.10) Έστω $f:(X,\rho) \to (Y,\sigma)$ ομοιομορφισμός.
Δ.ο ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος ανν ο (Y,σ) είναι διαχωρίσιμος.

f ομοιομορφισμός $\Leftrightarrow$ f 1-1, επί και αμφισυνεχής (δηλ. f, f^{-1} συνεχείς)

Επειδή η f είναι επί, έχουμε $f(X) = Y$
Από την 4.7 αν X διαχωρίσιμος, τότε $f(X) = Y$ είναι διαχωρίσιμος.

Αν Y διαχωρ., επειδή η f^{-1} είναι συνεχής και $f^{-1}(Y) = X$ έχουμε πάλι από την 4.7 ότι $f^{-1}(Y) = X$ είναι διαχωρίσιμος

4.12) Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to (X, \delta)$ όπου δ η διακριτή μετρική στον X ($\delta(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = y \\ 1 & \text{αν } x \neq y \end{cases}$)

Δ.ο η f είναι συνεχής ανν είναι σταθερή.

"$\Leftarrow$" Αν f είναι σταθερή, τότε η f είναι και συνεχής.

"$\Rightarrow$" Έστω $f: \mathbb{R} \to (X, \delta)$ συνεχής. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $y = f(x)$

Το $\{y\}$ είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο (X, δ). Είναι κλειστό γιατί κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό.
Το $\{y\}$ είναι και ανοιχτό γιατί π.χ $\{y\} = B_\delta(y, 1/2)$. Το $x \in f^{-1}(\{y\})$

Η f είναι συνεχής άρα $f^{-1}(\{y\})$ είναι ανοιχτό και κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$
Από 3.19 ξέρουμε ότι αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι αν. και κλ. τότε $A = \emptyset$ ή $\mathbb{R}$

Ξέρουμε ότι $x \in f^{-1}(\{y\})$, άρα $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$
$\Rightarrow f^{-1}(\{y\}) = \mathbb{R}$
$\Rightarrow f(x) = y \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ σταθερή

4.13
Μια συνάρτηση $f(X, \rho) \to (Y, \sigma)$ λέγεται τοπικά φραγμένη αν $x \in X \ \exists \ U_x$, περιοχή του x ώστε η $f|_{U_x}$ να είναι φραγμένη.
α) Έστω $f: (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής. Τότε η f είναι τοπ. φραγμένη. Ισχύει το αντίστροφο;
β) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δ.ο τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.
i) η f είναι συνεχής

ii) Η f είναι τοπ. φραγμ. και έχει κλειστό γράφημα.

Έστω $x \in X$

α) f συνεχής $\Rightarrow$ για $\varepsilon = 1$ $\exists\, \delta > 0$ τ.ω. $f(B_\rho(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),1)$ θέτουμε $U_x = B_\rho(x,\delta)$ και έχουμε δ.ο. $f|_{U_x}$ είναι φραγμ.

Για το αντίστροφο
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x = 0 \\ 1 & \text{αν } x \neq 0 \end{cases}$

Η f είναι φραγμένη, όμως είναι ασυνεχής στο 0.

β) (i) $\Rightarrow$ (ii) Αν η f συν., τότε από το (α) είναι και τοπ. φραγμ. Επίσης στην 4.6 δείξαμε ότι f συνεχής $\Rightarrow$ $Gr(f)$ κλειστό.

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Έστω $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}$ με $x_n \to x$. Υποθ. ότι $f(x_n) \not\to f(x)$ $\exists\, \varepsilon > 0$ τ.ω. $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$ $\exists\, n \geq n_0$ $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$
$\Rightarrow \exists\, (x_{k_n})_n \subseteq (x_n)_n$ τ.ω. $|f(x_{k_n}) - f(x)| \geq \varepsilon$ (*) $\forall\, n \in \mathbb{N}$
f τοπικά φραγμένη $\Rightarrow \exists\, U_x$ περιοχή του x και $M > 0$ τ.ω. $|f(y)| \leq M$ $\forall\, y \in U_x$

Αφού $x_{k_n} \to x$ $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x_{k_n} \in U_x$ $\forall\, n \geq n_1$

Αφού $|f(x_{k_n})| \leq M$ $\forall\, n \geq n_1$ η $(f(x_{k_n}))_n$ είναι φραγμ.
$\overset{B-W}{\Rightarrow} \exists\, (f(x_{\ell_{k_n}}))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (f(x_{k_n}))_n$ τ.ω. $f(x_{\ell_{k_n}}) \to y \in \mathbb{R}$

$((x_{\ell_{k_n}}, f(x_{\ell_{k_n}})))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Gr(f)$

$(x_{\ell_{k_n}}, f(x_{\ell_{k_n}})) \to (x,y)$

Όμως Grf είναι κλειστό άρα $f(x_{\ell_{k_n}}) \to f(x)$

$\Rightarrow$ άτοπο από την $(*)$

Μάθημα 13°

Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$ λέγεται ομοιόμ. συνεχής αν $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)$ ώστε:
"για κάθε $x,y\in X$ με $d(x,y)<\delta$ ισχύει $\sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$"

Παραδείγματα

(i) άσκηση 8
Υπάρχει φραγμένη συνεχής $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

$f(x)=\cos(x^2)$

"Αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $(x_n),(y_n)$ στο $\mathbb{R}$ με $|y_n-x_n|\to 0$ αλλά $|f(x_n)-f(y_n)|\not\to 0$"

$|f'(x)| = |-2x\sin(x^2)|$ "μεγάλη" αν x "μεγάλο" και $|\sin(x^2)|=1$

$x=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$

Παίρνουμε $x_n=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}$

$y_n = ; = \sqrt{n\pi}$

$$x_n-y_n=\sqrt{n\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{n\pi}=\frac{\pi/2}{\sqrt{n\pi+\pi/2}+\sqrt{n\pi}}\to 0$$

$$|f(x_n)-f(y_n)| = |\cos(x_n^2)-\cos(y_n^2)|$$
$$= |\cos(n\pi+\frac{\pi}{2})-\cos(n\pi)|$$
$$= |\cos(n\pi)| = 1 \not\to 0$$