ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ .

11ο ΜΑΘΗΜΑ

13-11-2014.

Ορισμός: Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x\in X$ αν: "για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ ώστε αν $d(x,y)<\delta$, τότε $\sigma(f(y),f(x))<\varepsilon$"

Ισοδύναμα: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon,x)>0 : \quad f(B_d(x,\delta))\subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon)$.

* Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x\in X$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1

Έστω $f:(X,d)\to(Y,\sigma)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι συνεχής (σε κάθε σημείο).

(β) για κάθε ανοιχτό $G\subseteq Y$ έχουμε ότι το $f^{-1}(G)\underset{\text{ορ}}{=}\{x\in X : f(x)\in G\}$ είναι ανοιχτό $\subseteq X$. (η αντίστροφη εικόνα ανοιχτού είναι ανοιχτό).

(γ) Για κάθε κλειστό $F\subseteq Y$ έχουμε ότι το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό $\subseteq X$.

(α) ⇒ (β) Έστω $G\subseteq Y$ ανοιχτό. Θεωρούμε τυχόν $x\in f^{-1}(G)$ και θα δείξουμε ότι το x είναι εσωτερικό σημείο του $f^{-1}(G)$.

($\Rightarrow f^{-1}(G)=$ ανοιχτό).

Έχουμε $x\in f^{-1}(G)\Rightarrow f(x)\in G$.

Αφού το G είναι ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon>0 : B_\sigma(f(x),\varepsilon)\subseteq G$.

Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon,x)>0$:

$$f(B_d(x,\delta))\subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon)\subseteq G$$

$\Rightarrow B_d(x,\delta)\subseteq f^{-1}(G)$. Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του $f^{-1}(G)$.

(β) ⇒ (α). Για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής, παίρνουμε τυχόν $x\in X$ και δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής στο x.

Αρκεί να δείξω ότι: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 : f(B(x,\delta))\subseteq B(f(x),\varepsilon)$.

Αφού η $\underbrace{B(f(x),\varepsilon)}_{G}$ είναι ανοιχτό σύνολο, από το (β) η

$f^{-1}(B(f(x),\varepsilon)) = $ ανοιχτό $\subseteq X$.

Όμως $x \in f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ γιατί $f(x) \in B(f(x),\varepsilon)$.

$\Rightarrow x$ εσ. σημείο του $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$.

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0 : B(x,\delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$.

$\Rightarrow f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$.

(β) $\Rightarrow$ (γ) Έστω $F \subseteq Y$ κλειστό $\Rightarrow Y \setminus F = $ ανοιχτό $\subseteq F$.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{}{\underset{(\beta)}{\Longrightarrow}} f^{-1}(Y\setminus F) = \text{ανοιχτό} \subseteq X \\ \qquad\quad \parallel \\ \qquad X \setminus f^{-1}(F) \end{array}\right\} \Rightarrow f^{-1}(F) = \text{κλειστό} \subseteq X$$

(γ) $\Rightarrow$ (β) Παίρνω $G \subseteq Y$ ανοιχτό. $\rightsquigarrow Y \setminus G$ κλειστό, εφαρμόζω το (γ). οπότε

$$\left.\boxed{\begin{array}{c} f^{-1}(Y\setminus G) \\ \parallel \\ X \setminus f^{-1}(G) \end{array}} \text{κλειστό}\ \right\} \Rightarrow f^{-1}(G) = \text{ανοιχτό}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2

Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α). Η f είναι συνεχής.

(β). Για κάθε $A \subseteq X$, ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

(γ). Για κάθε $B \subseteq Y$, ισχύει $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

(δ) Για κάθε $C \subseteq Y$, ισχύει $f^{-1}(C^\circ) \subseteq [f^{-1}(C)]^\circ$

Απόδειξη: (α) $\Rightarrow$ (β). Έστω $A \subseteq X$.

Έστω $y \in f(\overline{A}) \Rightarrow \exists\, x \in \overline{A} : y = f(x)$.

Αφού $x \in \bar{A}$, υπάρχουν $x_n \in A$, ώστε $x_n \to x$.

Αφού η f είναι συνεχής στο x, $f(x_n) \to f(x)$. (αρχή της μεταφοράς)

Αφού $x_n \in A$, έχουμε $y_n \underset{\text{ορ}}{=} f(x_n) \in f(A)$ και $y_n \to f(x) = y$ $\Big\} \Rightarrow y \in \overline{f(A)}$.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $B \subseteq Y$. Θεωρούμε το $A = f^{-1}(B) \subseteq X$.

Εφαρμόζουμε το (β) για το A:

$$f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subseteq \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subseteq \bar{B}$$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$$

(γ) $\Rightarrow$ (δ). Έστω $C \subseteq Y$. Θεωρούμε το $B = Y \setminus C \subseteq Y$.

Γι' αυτό το B, το (γ) μας δίνει

$$\overline{X \setminus f^{-1}(C)} = \overline{f^{-1}(Y \setminus C)} \subseteq f^{-1}(\overline{Y \setminus C}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \setminus [f^{-1}(C)]^\circ \subseteq f^{-1}(Y \setminus C^\circ) = X \setminus f^{-1}(C^\circ).$$

$$\Rightarrow [f^{-1}(C)]^\circ \supseteq f^{-1}(C^\circ).$$

(δ) $\Rightarrow$ (α). Έστω $G \subseteq Y$ ανοιχτό ($\Rightarrow G^\circ = G$) Εφαρμόζουμε το (δ) με $C = G$, $f^{-1}(G) = f^{-1}(G^\circ) \subseteq [f^{-1}(G)]^\circ$

$$\Rightarrow f^{-1}(G) = [f^{-1}(G)]^\circ \Rightarrow f^{-1}(G) = \text{ανοιχτό}$$

<u>Άσκηση 4.11.</u>

Έστω $f : (X, d) \to (Y, \sigma)$ με την εξής ιδιότητα:

"Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(A') \subseteq [f(A)]'$"

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\forall A \subseteq X$ $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

Βασικό: $\bar{A} = A \cup A' \Rightarrow f(\bar{A}) = f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

Αρκεί να δείξουμε ότι : $f(A)' \subseteq f(\bar{A})$ ✓

και

$f(A') \subseteq \overline{f(A)}$

(όμως, $f(A') \underset{\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}}{\subseteq} [f(A)]' \subseteq \overline{f(A)}$ / γιατί $\overline{f(A)} = f(A) \cup (f(A))'$

Σημ. Στην άσκηση 4.11 το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Θεωρούμε την $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = 4$, $x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής. Αλλά, αν πάρουμε $A = \mathbb{R}$ τότε.

$f(\mathbb{R}') = f(\mathbb{R}) = \{4\} \neq \emptyset$.

ενώ $[f(\mathbb{R})]' = \{4\}' = \emptyset$.

Απόσταση σημείου από σύνολο.

Άσκηση 27 Έστω $\emptyset \neq A \subseteq (X,d)$. Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε

$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a \in A\}$

π.χ. $A = (0,1)$ στο $\mathbb{R}$, τότε $d(2,A) = \inf\{|2-x| : 0 < x < 1\} = 1$.

(αλλά δεν υπάρχει $x \in A$: $|2-x| = 1$.

Επίσης $d(1,A) = 0$ αλλά $1 \notin A$.).

Δείξτε τα εξής:

(1). $d(x,A) = 0 \iff x \in \bar{A}$

(2). Για κάθε $x,y \in X$: $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

(3). Η συνάρτηση $d_A : (X,d) \to \mathbb{R}^+$ με $d_A(x) = d(x,a)$, είναι συνεχής.

Συνεπώς, $\forall \varepsilon > 0$, το $A_\varepsilon = \{x \in X : d_A(x) < \varepsilon\}$ είναι ανοιχτό $\subseteq X$. και το $\{x \in X : d_A(x) \leq \varepsilon\}$ είναι κλειστό.

Απόδειξη: (1). $d(x,A) = 0 \Rightarrow \inf\{d(x,a) : a \in A\} = 0$.

$\Longrightarrow$ για κάθε $\varepsilon>0$ $\exists a\in A$: $d(x,a)<\varepsilon$ $\Rightarrow$ $x\in\bar{A}$.

χαρακτηρισμός ινφιμουμ.

Αντίστροφα: Αν $x\in\bar{A}$ τότε $\exists a_n\in A$: $a_n \to x$

Τότε: $0\le d(x,A)\le d(x,a_n)\to 0$. $\forall n$.

Δηλ. $d(x,A)=0$

(2) Για κάθε $a\in A$ ισχύει:

$$d(x,A)\le d(x,a)\le d(y,a)+d(x,y).$$

Δηλ. για κάθε $a\in A$: $\underbrace{d(x,A)-d(x,y)}_{\gamma}\le d(y,a)$.

Άρα ο γ είναι κάτω φράγμα του $\{\underbrace{d(y,a) : a\in A}_{\Gamma}\}$

$\Longrightarrow$ $\gamma\le \inf\Gamma$.

$\Longrightarrow$ $d(x,A)-d(x,y)\le \inf\{d(y,a):a\in A\} \underset{\text{ορ.}}{=} d(y,A)$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Δηλ. } d(x,A)-d(y,A)\le d(x,y)\\ \text{Όμοια } d(y,A)-d(x,A)\le \overset{''}{d(y,x)}\end{array}\right\}\Rightarrow |d(x,A)-d(y,A)|\le d(x,y).$$

(3). Η $d_A:(X,d)\to\mathbb{R}$ με $d_A(x)=d(x,A)$ είναι συνεχής.

Από το (2): $|d_A(x)-d_A(y)|\le d(x,y)$.

[Αν $d(x,y)<\varepsilon$ τότε $|d_A(x)-d_A(y)|\le d(x,y)<\varepsilon$.]

$\Rightarrow$ $d_A(B(x,\varepsilon))\subseteq (d_A(x)-\varepsilon,\, d_A(x)+\varepsilon)$.

. Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $A_\varepsilon=\{x\in X : \underset{d_A(x).}{\underset{\shortparallel}{d(x,A)}}<\varepsilon\}=d_A^{-1}((-\infty,\varepsilon))$ = ανοιχτό.

Ομοίως: $\{x\in X : d(x,A)\le\varepsilon\}=d_A^{-1}(\underset{\text{κλειστό}}{\underset{\shortparallel}{(-\infty,\varepsilon]}})$ = κλειστό

Άσκηση 3.29

Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε κλειστό $A \subseteq X$ γράφεται ως τομή μιας ακολουθίας ανοιχτών συνόλων.

Αν $f:(X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε $\{x : f(x) < \varepsilon\} = f^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ = ανοιχτό

[και κάθε ανοιχτό $G \subseteq X$ γράφεται ως ένωση μιας ακολουθίας κλειστών συνόλων.]

Απόδειξη: Είδαμε ότι: $\forall \varepsilon > 0$, το $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) < \varepsilon\}$ είναι ανοιχτό. Θεωρούμε τα $G_n = A_{1/n} = \{x : d(x,A) < \frac{1}{n}\}$

κάθε G_n είναι ανοιχτό. (Άσκηση 3.27).

και $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{1/n} = \underset{(*)}{\bar{A}} = A.}$

(*) Αν $x \in A_{1/n}$, για κάθε n τότε $0 \le d(x,A) < \frac{1}{n}$ για κάθε n

$\Rightarrow d(x,A) = 0 \xRightarrow[3.27]{} x \in \bar{A}$.

Αντίστροφα: αν $x \in \bar{A}$ τότε $\forall n$ $d(x,A) = 0 < \frac{1}{n} \Rightarrow \forall n$ $x \in A_{1/n}$.

Για το β' μέρος: Έστω G ανοιχτό.

Το $X \setminus G$ είναι κλειστό.

Από το α' μέρος υπάρχουν V_n ανοιχτά:

$X \setminus G = \cap V_n \Rightarrow G = (\cap V_n)^c = \cup V_n^c$, $V_n^c = X \setminus V_n$ κλειστό.

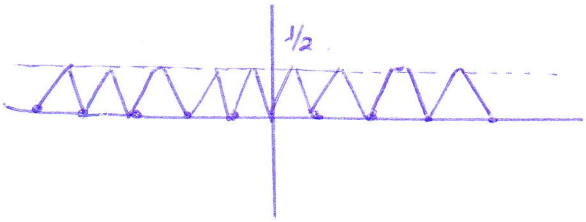
ΟΡΙΣΜΟΣ 1: Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται G_δ-σύνολο αν $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, V_n = ανοιχτά.

Δείξαμε ότι κάθε κλειστό σύνολο είναι G_δ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2: Ένα $A \subseteq (X,d)$ λέγεται F_σ-σύνολο αν $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, F_n - κλειστά.

κάθε ανοιχτό είναι F_σ.

Άσκηση : Σχεδιάστε την $d_{\mathbb{Z}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



Άσκηση: Έστω $A \subseteq (X,d)$. Δείξτε ότι το A είναι πυκνό αν και μόνο αν "για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:(X,d) \to \mathbb{R}$, με $f|_A \equiv 0$, ισχύει $f \equiv 0$".

$(\Rightarrow)$. Ξέρουμε ότι $\bar{A} = X$.

Έστω $f:(X,d) \to \mathbb{R}$ συνεχής με την ιδιότητα $\forall a \in A : f(a) = 0$.

Παίρνουμε τυχόν $x \in X$ και θα δείξουμε ότι $f(x) = 0$.

Έχουμε $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists a_n \in A : a_n \to x$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f(a_n) \to f(x) \\ a_n \in A \Rightarrow f(a_n) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = 0.$$

$(\Leftarrow)$. Έστω A που ικανοποιεί την υπόθεση.

Θεωρούμε την $d_A(x) = d(x,A)$.

Η d_A είναι συνεχής και $\forall a \in A$ $\quad d(a,A) = 0$

$$\rightsquigarrow d_A(a) = 0.$$

Άρα (υπόθεση): $\forall x \in X$ $\; d_A(x) = 0$

$$\overset{3.27}{\Rightarrow} \forall x \in X \quad x \in \bar{A} \Rightarrow X \subseteq \bar{A} \Rightarrow X = \bar{A}.$$

ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ URYSOHN: Έστω A, B ξένα κλειστά υποσύνολα του (X,d). Υπάρχει συνάρτηση $f:(X,d) \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες

(1) Η f είναι συνεχής και $0 \le f(x) \le 1$ για κάθε $x \in X$.

(2). Για κάθε $a \in A$ ισχύει $f(a) = 0$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $f(b) = 1$.

Απόδειξη: Ορίζουμε $f(x) = \dfrac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$.

Ο παρονομαστής δεν μηδενίζεται: αν $d(x,A)+d(x,B)=0$

$\Rightarrow d(x,A)=0$ και $d(x,B)=0 \Rightarrow x\in\bar{A}\underset{\text{κλειστό}}{=}A$ και $x\in\bar{B}\underset{\text{κλειστό}}{=}B$.

$\Rightarrow x\in A\cap B\underset{\text{ξένα}}{=}\emptyset$ Άτοπο.

• Η f είναι συνεχής, γιατί d_A, d_B συνεχείς.

• $0\le f(x)\le 1$: αριθμητής ≤ παρονομαστής και όλα ≥ 0.

• Αν $a\in A$ τότε $d(a,A)=0$ $\Rightarrow f(A)=0$

Αν $\beta\in B$ τότε $\beta\notin A \Rightarrow d(\beta,A)>0$.
και $f(\beta)=\dfrac{d(\beta,A)}{d(\beta,A)+\underbrace{\cancel{d(\beta,B)}}_{=0}}=1$.
(διότι $d(\beta,B)=0$ αφού $\beta\in B$)

Εφαρμογή: (α). Τα A,B διαχωρίζονται αν υπάρχουν U,V: $A\subseteq V$, $B\subseteq U$ και $V\cap U=\emptyset$.

(β). Τα A,B διαχωρίζονται πλήρως αν υπάρχουν ανοιχτά V,U: $A\subseteq V$, $B\subseteq U$ και $\bar{V}\cap\bar{U}=\emptyset$.

(3). Στο $\mathbb{R}$ τα $A=(0,1)$, $B=(1,2)$, διαχωρίζονται αλλά δεν διαχωρίζονται πλήρως. Αν $U=A$, $V=B$ τότε U,V ανοικτά, $A\subseteq U$, $B\subseteq V$, $U\cap V=\emptyset$.

Αν όμως U,V ανοιχτά και
$$\left.\begin{array}{l} V\supseteq(0,1)\Rightarrow \bar{V}\supseteq[0,1] \\ U\supseteq(1,2)\Rightarrow \bar{U}\supseteq[1,2] \end{array}\right\}\Rightarrow 1\in\bar{V}\cap\bar{U}$$

Άρα τα $(0,1)$, $(1,2)$ δεν διαχωρίζονται πλήρως.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Έστω A,B κλειστά ξένα υποσύνολα του (X,d).
Τότε $\exists\, U,V$ ανοιχτά: $A\subseteq V$, $B\subseteq U$, $\bar{V}\cap\bar{U}=\emptyset$.
(Δηλ. τα A,B διαχ. πλήρως).

Απόδειξη: Από λήμμα Urysohn, υπάρχει συνεχής $f:(X,d)\to\mathbb{R}$ με $\underset{\forall a\in A}{f(a)=0}$ και $\underset{\forall \beta\in B}{f(\beta)=1}$

Ορίζουμε: $V = \{x : f(x) < \frac{1}{3}\} = f^{-1}\big((-\infty, \frac{1}{3})\big)$ = ανοιχτό.

ανοιχτό.

και $A \subseteq V$ γιατί $f|_A = 0$

$U = \{x : f(x) > \frac{2}{3}\} = f^{-1}\big((\frac{2}{3}, +\infty)\big)$ = ανοιχτό

ανοιχτό

και $B \subseteq U$ γιατί $f|_B = 1$.

Έχουμε $V \cap U = \emptyset$ (αν $x \in V \cap U \Rightarrow f(x) < 1/3$ και $f(x) > 2/3$ άτοπο).

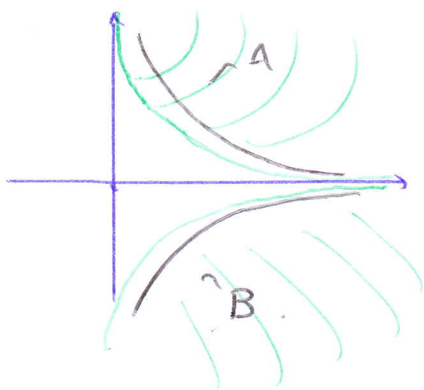
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $x \in \bar{V}$ τότε $\exists\, v_n \in V : v_n \to x$.

$\Rightarrow f(v_n) \to f(x) \Rightarrow f(x) \le 1/3$.

Δηλ. $\bar{V} \subseteq \{x : f(x) \le 1/3\}$

Ομοίως $\bar{U} \subseteq \{x : f(x) \ge 2/3\}$ $\Rightarrow \bar{V} \cap \bar{U} = \emptyset$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΣΤΟ $\mathbb{R}^2$



$A = \{(x, 1/x) : x > 0\}$ $\quad (x, \frac{1}{2x})$.

$B = \{(x, -1/x) : x > 0\}$

$(x, -\frac{1}{2x})$.

$A \cap B = \emptyset$.

Α κλειστό: Παίρνω $(x_n, \frac{1}{x_n}) \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$x_n > 0$. Θέλω $x > 0$ και $y = \frac{1}{x}$, οπότε $(x,y) = (x, \frac{1}{x}) \in A$.

Έχουμε $x_n \to x$, $\frac{1}{x_n} \to y$. Άρα $x > 0$ και τώρα $x_n \to x \neq 0$ $\Rightarrow \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{x}$. Άρα $y = \frac{1}{x}$.

Αφού $x_n > 0$ έχουμε $x \ge 0$. Αν $x = 0$ τότε $x_n \to 0$ και $1/x_n \to +\infty$ άτοπο.