

-1-

# Πυκνά υποσύνολα - Διαχωρισμοί μετρικοί χώροι

10<sup>ο</sup> ΜΑΘΗΜΑ

11 - 11 - 2014

Ορισμός: (Πυκνό υποσύνολο), Ένα υποσύνολο  $D$  του

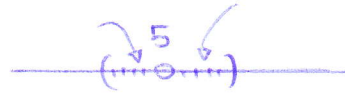
p.x.  $(X, d)$  λέγεται πυκνό αν:  $\bar{D} = X$ .

Παραδείγματα (α) Στο  $\mathbb{R}$  τυπικά πυκνά υποσύνολα είναι:

(1). το  $\mathbb{Q}$  ( $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ).

(2). το  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ( $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ).

(3). το  $\mathbb{R} \setminus \{5\}$  είναι πυκνό



- (i)  $\mathbb{R} \setminus \{5\} \subseteq \overline{\mathbb{R} \setminus \{5\}}$

- (ii)  $5 \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{5\}}$

(β). Έστω  $(X, d)$  p.x. χώρος και έστω  $x_0$  μεμονωμένο σημείο του χώρου. Τότε το  $\{x_0\}$  του  $(X, d)$ .

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x_0\}) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) = \{x_0\}$$

$$\Leftrightarrow \{x_0\} \text{ - ανοικτό σύνολο.}$$

Έστω  $D$  πυκνό υποσύνολο του  $(X, d)$ . Τότε  $x_0 \in D$  αναγκαστικά.

$$\text{Αν } x_0 \notin D \text{ τότε } D \subseteq X \setminus \{x_0\} \Rightarrow \bar{D} \subseteq X \setminus \{x_0\}$$

$$\text{κλειστό} \Rightarrow x_0 \notin \bar{D}$$

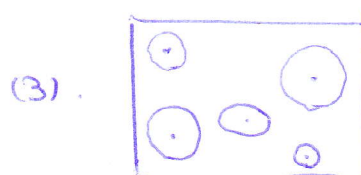
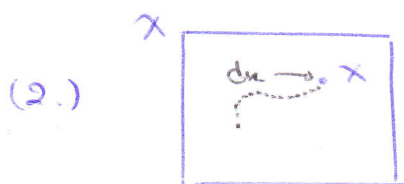
$$\Rightarrow \bar{D} \neq X$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω  $D \subseteq (X, d)$ . Το  $D$  είναι πυκνό αν ισοδύναμα:

(1). Το  $D$  είναι πυκνό:  $\bar{D} = X$ .  $\underbrace{x \in \bar{D}}_{\text{...}}$

(2). Για κάθε  $x \in X$ , υπάρχει ακολουθία  $(d_n)$  στο  $D$ , ώστε  $d_n \rightarrow x$

(3). Για κάθε  $x \in X$  και για κάθε  $\varepsilon > 0$ ,  $\underbrace{B(x, \varepsilon) \cap D}_{x \in \bar{D}} \neq \emptyset$ .



## Άλλες περιγραφές

-2-

(4).  $(X \setminus D)^{\circ} = X \setminus \bar{D} = \emptyset$  αν  $D$  είναι πυκνό.

(5) Για κάθε μη κενό ανοιχτό  $G \subseteq X$  ισχύει  $G \cap D \neq \emptyset$ .

Απόδειξη: (3)  $\Rightarrow$  (5). Έστω  $\emptyset \neq G \subseteq X$  ανοιχτό. Υπάρχει  $x_0 \in G$  (διότι  $G \neq \emptyset$ ). Το  $x_0$  είναι εσωτερικό σημείο του  $G$  (διότι  $G$  ανοιχτό).

Άρα  $\exists \varepsilon > 0 : B(x_0, \varepsilon) \subseteq G$ . Από το (3) έχουμε  $\emptyset \neq B(x_0, \varepsilon) \cap D \subseteq G \cap D$ .

Παράδειγμα:  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$  Αν  $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$   
 $1 \leq p < \infty$ .

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \text{και } d_p(x, y) = \|x - y\|_p.$$

Ισχυρισμός: Έστω  $D = \{q = (q_1, \dots, q_m) : q_i \in \mathbb{Q}, i=1, \dots, m\}$

είναι πυκνό υποσύνολο του  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$ .

Απόδειξη: Έστω  $x = (x_1, \dots, x_m)$ . Υπάρχει ακολουθία ρητών

$$q_{1n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1 \quad (x_i \in \mathbb{R} \mapsto \text{προσεγγίζεται από ρητούς})$$

Υπάρχει ακολουθία ρητών  $q_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2$ .

$\vdots$

Υπάρχει ακολουθία ρητών  $q_{mn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_m$ .

$$\Gamma_{m=3} : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \exists p_n \in \mathbb{Q} : p_n \rightarrow x,$$

$$\exists q_n \in \mathbb{Q} : q_n \rightarrow y,$$

$$\exists r_n \in \mathbb{Q} : r_n \rightarrow z.$$

$$\text{ορίσαμε } d_n = (p_n, q_n, r_n) \in D, \quad d_n \rightarrow x = (x, y, z).$$

ορίσαμε  $q_n = (q_{1n}, q_{2n}, \dots, q_{mn})$ , τότε  $q_n \in D$  (οι συντεταγμένες του είναι ρητοί)

και  $\|x - q_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

-3-

Πράγματι:  $\begin{cases} |x_1 - q_{1n}|^p \rightarrow 0 \\ |x_2 - q_{2n}|^p \rightarrow 0 \\ \vdots \\ |x_m - q_{mn}|^p \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \|x - q_n\|_p^p = \sum_{i=1}^m |x_i - q_{in}|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 Άρα  $\|x - q_n\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (στοθερο πλῆθος με ατομικότητα)

Άσκηση 35 Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος.

(α) Αν  $D$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $X$  και  $G$  ανοιχτό υποσύνολο του  $X$ , τότε  $\overline{D \cap G} = \overline{G}$

Απόδειξη: (1)  $D \cap G \subseteq G \Rightarrow \overline{D \cap G} \subseteq \overline{G}$

(2) Έστω  $x \in \overline{G}$ . Θέλουμε να δείξουμε ότι  $x \in \overline{D \cap G}$ .

Παίρνουμε τυχόν  $\varepsilon > 0$  και θα δείξουμε ότι:

$$B(x, \varepsilon) \cap (D \cap G) \neq \emptyset.$$

Αφού  $x \in \overline{G}$  έχουμε:  $B(x, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$ , δηλ το  $B(x, \varepsilon) \cap G$  είναι ανοιχτό και μη κενό

ως τμή  
 δύο ανοιχτών.

Αφού το  $D$  είναι πυκνό,  $(B(x, \varepsilon) \cap G) \cap D \neq \emptyset$ .

"  
 $B(x, \varepsilon) \cap (D \cap G)$ . (χαρακτηρισμός (5) του πυκνού υποσυνόλου)

(β)  $D$  πυκνό  $\subseteq X$  και  $G =$  ανοιχτό και πυκνό  $\subseteq X$   
 τότε το  $G \cap D$  είναι πυκνό  $\subseteq X$ .

Απόδειξη: Από (α) έχουμε:  $\overline{D \cap G} = \overline{G} = X$ .  
 1  
 Διότι  $G$  πυκνό

Σημείωση: Στο (β) δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι: "το ένα από τα δύο πυκνά είναι και ανοιχτό".

Δηλ. αν  $D_1, D_2$  πυκνά  $\subseteq X$  δεν ισχύει απαραίτητα, ότι το  $D_1 \cap D_2$  είναι πυκνό.

π.χ. Στο  $\mathbb{R}$ ,  $D_1 = \mathbb{Q}$ ,  $D_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\overline{D_1 \cap D_2} = \overline{\emptyset} = \emptyset \neq \mathbb{R}$ .

Πορίσμα: (του (B)).

Αν μετH και  $G_1, G_2, \dots, G_m$  ανοιχτά και πυκνά  $\subseteq (X, d)$ .

τότε (επαγωγή) το  $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_m$  είναι πυκνό και ανοιχτό.

(χ). Είναι σωστό ότι η ταμνιασ ατοθασθίας  $(G_n)_{n=1}^{\infty}$  ανοιχτών, και πυκνών υποσυνολών του  $(X, d)$  είναι πυκνό υποσύνολο του  $(X, d)$ ; οχι (ναι, όπως αν ο περικότος χώρος  $(X, d)$  είναι πλνρπς).

θεωρούμε του  $(\mathbb{Q}, 1.1)$ . Στο  $\mathbb{Q}$  είναι άπειρο αριθμητικό σύνολο.

υπάρχει  $q: \mathbb{N} \xrightarrow[επi]{1.1} \mathbb{Q}$ . Δηλ.  $\mathbb{Q} = \underbrace{\{q(n) : n \in \mathbb{N}\}}_{q(\mathbb{N})} = \underbrace{\{q_n : n \in \mathbb{N}\}}_{\text{Αριθμός του } \mathbb{Q}}$

ορίουμε  $G_1 = \mathbb{Q} \setminus \{q_1\}$

$G_2 = \mathbb{Q} \setminus \{q_2\}$

$\vdots$

$G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$

$\vdots$

$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \emptyset$ . Αν  $q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$  τότε  $\forall n, q \in G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$

$\Downarrow$

$\forall n, q \neq q_n \Rightarrow q \notin \mathbb{Q}$ .

• κάθε  $G_n$  είναι ανοιχτό  $\subseteq (\mathbb{Q}, 1.1)$ .

• Έσουμε  $\mathbb{Q} \setminus G_n = \{q_n\} =$  ελάχιστο (τα μονοσύνολα είναι κλειστά σε) κάθε περικότος χώρο

• κάθε  $G_n$  είναι πυκνό  $\subseteq (\mathbb{Q}, 1.1)$ .

Απεί να δείουμε ότι  $q_n \in \overline{G_n}$  (τότε  $\overline{G_n} \supseteq G_n \cup \{q_n\} = \mathbb{Q}$ ).

Για κάθε  $\varepsilon > 0$ , στο  $(q_n - \varepsilon, q_n + \varepsilon)$  υπάρχουν άπειροι ρητοί άρα και κάποιος  $\neq q_n$ .

Άσκηση 14. Βρείτε ένα αριθμητικό πυκνό υποσύνολο του

$$(\mathbb{R}|\mathbb{Q}, 1.1).$$

Ορίζουμε  $D = \{e + q_n : n \in \mathbb{N}\}$ , όπου  $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

- Για κάθε  $n$ , ο  $e + q_n$  άρρητος (αν είχαμε  $e + q_n = p \in \mathbb{Q}$ ),  
τότε  $e = p - q_n \in \mathbb{Q}$   
Αόριστο

Άρα  $D \subseteq \mathbb{R}|\mathbb{Q}$

$\bar{D} = \mathbb{R}|\mathbb{Q}$

Παίρνουμε  $a \in \mathbb{R}|\mathbb{Q}$  και [πάρτε ακολουθία στοιχείων του  $D$ ,  
ας την πάρμε  $\{d_s\}_{s=1}^{\infty}$ , ώστε  $d_s \rightarrow a$ .

Θεωρούμε τον  $a - e \in \mathbb{R}$ . Από την πυκνότητα των ρητών στο  $\mathbb{R}$ ,  
υπάρχει ακολουθία ρητών  $r_s \rightarrow a - e$ .

$\Downarrow$

$$e + r_s \rightarrow a$$

"op.

$$d_s \in D$$

ορισμός: Ένας μετρικός χώρος  $(X, d)$  λέγεται διαχωρίσιμος,  
αν έχει αριθμητικό πυκνό υποσύνολο. Δηλ. αν υπάρχει  $D \subseteq X$   
αριθμητικό ώστε  $\bar{D} = X$ .

Παραδείγματα: (α).  $(\mathbb{R}, 1.1)$  διαχωρίσιμος μετρικός χώρος

•  $\mathbb{Q}$  αριθμητικό και  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .

- Αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε πυκνό  $\subseteq \mathbb{R}$ , είναι αριθμητικό.  
 $\mathbb{R}$  πυκνό  $\subseteq \mathbb{R}$ . (οχι αριθμητικό).

$\mathbb{R}[2,5]$  πυκνό  $\subseteq \mathbb{R}$  (οχι αριθμητικό).

(β)  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$  - διαχωρίσιμος μετρικός χώρος

Δείξαμε ότι το  $D = \{q = (q_1, \dots, q_m) : q_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, m\}$  είναι

πυκνό. Το  $D$  είναι αριθμητικό:  $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}$ .

$m$ -φορές.

το οποίο είναι αριθμήσιμο σύνολο, ως καρτεσιανό γινόμενο  $m$ -αριθμήσιμων συνόλων (βλέπε (7)).

(γ). Έστω  $1 \leq p < \infty$ . Ο  $\ell_p$  είναι διαχωρίσιμος.

$$\text{Έχουμε } x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p \iff \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty.$$

$$\text{και } \|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Ίδια: Έστω  $x \in \ell_p$ . Θεωρούμε  $\varepsilon > 0$ .

$$\text{Αφού η } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \text{ συγχλίνει, υπάρχει } N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \sum_{k=N(\varepsilon)+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

|     |                                    |                              |
|-----|------------------------------------|------------------------------|
| $x$ | $x_1 \dots x_{N(\varepsilon)}$     | $x_{N(\varepsilon)+1} \dots$ |
| $y$ | $q_1 q_2 \dots q_{N(\varepsilon)}$ | $0 \dots 0$                  |

$$\text{Ορίζουμε } D_N = \left\{ q = (q_1, \dots, q_N, 0, 0, \dots), q_1, \dots, q_N \in \mathbb{Q} \right\}$$

$$\text{και } D = \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N = \text{όλες οι τελικά μηδενικές ακολουθίες ρητίν αριθμών.}$$

$$(i) \underbrace{D_N \sim \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}}_{N\text{-φορές}} = \text{αριθμήσιμο}$$

$$(ii) D = \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N = \text{αριθμήσιμο, από το (β) (αριθμ. ένωση αριθμ. συνόλων).}$$

Έστω  $x \in \ell_p$ . Θα δείξουμε ότι  $B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset$ .

$$\text{Βρίσκουμε } N \in \mathbb{N} : \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

• Για τους  $x_1, \dots, x_N$  βρίσκουμε ρητούς  $q_1, \dots, q_N$

$$|x_i - q_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2N} \Rightarrow \sum_{k=1}^N |x_k - q_k|^p < N \cdot \frac{\varepsilon^p}{2N} = \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

$$\text{Ορίζουμε } y = (q_1, \dots, q_N, 0, 0, \dots) \in D_N \subseteq D.$$

$$\text{και } \|x - y\|_p^p = \sum_{k=1}^N |x_k - q_k|^p + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k - 0|^p.$$

$$< \frac{\varepsilon^p}{2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} |x_k|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

• Πως δείχνουμε ότι ένας μ.χ.  $(X, d)$  είναι διαχωρίσιμος.

Ορίζουμε (επεις) κατάλληλο  $D \subseteq X$  για το οποίο δείχνουμε ότι  
(i)  $D$  αριθμήσιμο (ii)  $\overline{D} = X$ .

Πως δείχνουμε ότι ένας μ.χ.  $(X, d)$  δεν είναι διαχωρίσιμος.

(θα χρειαστούμε την άσκηση 34 πρώτα).

Άσκηση 34. Έστω  $(X, d)$  διαχωρίσιμος μετρίτος χώρος.

Αν  $(G_i)_{i \in I}$  είναι μια οικογένεια {ένων και δυο, μη κενών ανοικτών υποσυνόλων του  $X$ }, τότε το  $I$  είναι αριθμήσιμο.

Αρα ο  $(X, d)$  είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει αριθμήσιμο  $D \subseteq X$  ώστε  $\overline{D} = X$  (τότε,  $\forall \emptyset \neq G \subseteq X$  ανοικτό ισχύει  $G \cap D \neq \emptyset$ ).

Έστω  $(G_i)_{i \in I}$  οικογένεια {ένων - μη κενών ανοικτών  $\subseteq X$

• για κάθε  $i \in I$ , υπάρχει  $d_i \in G_i \cap D$ . (διότι  $D$  πυκνό).

• ορίζουμε  $f: I \rightarrow D$  με  $f(i) = d_i \in G_i \cap D$ .

Η  $f$  είναι 1-1: αν  $f(i) = f(s)$  για κάποια  $i, s \in I$ ,

τότε  $d_i = d_s \in D \cap G_i \cap G_s = \emptyset$  αν  $i \neq s$   
άρα  $i = s$ .

Εο  $D$  είναι αριθμήσιμο, άρα (από (10)) υπάρχει  $g: D \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$ .

Εοτε η  $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{N}$  είναι 1-1.  $\left( I \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} \mathbb{N} \right)$ ,

και (παλι από το (10)), το αντιστρόφιο αυτήν την φορά  $|$  το  $I$  είναι αριθμήσιμο.

Αρα για να δείξουμε ότι ο  $(X, d)$  δεν είναι διαχωρίσιμος.

αρκει να βρούμε υπεραριθμήσιμες το πλήθος {ένες μπίδες  $B(x_i, \varepsilon_i)$  στον  $X$ . Για του σκοπό αυτό αρκει να βρούμε ένα υπεραριθμήσιμο  $A = \{x_i: i \in I\} \subseteq X$  και  $\varepsilon > 0$

$\forall i \neq j$  στο  $I$   $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ . Γιαυ, τότε οι  $B(x_i, \varepsilon/2)$ ,  $i \in I$ .

Είναι γένος και υπεραριθμήσιμες το πλήθος.

Παραδείγματα: (α) θεωρούμε υπεραριθμήσιμο σύνολο  $X$  και σε αυτό την διακριτή μετρική  $\delta$ .

Αν  $A = X$  τότε αν  $x, y \in A$  έχουμε  $\delta(x, y) = 1$ ,  
 $x \neq y$ .

(εφαρμόζεται η (\*) με  $\varepsilon = 1$ ).

Σημείωση: Αφού κάθε  $x \in X$  είναι μεμονωμένο σημείο τότε  $(X, \delta)$  έχουμε ότι:  $D$  πυκνό  $\subseteq X \implies D = X$ .

(β) ο  $\ell_\infty$  δεν είναι διαχωρίσιμος.

$$(\ell_\infty = \{x = (x_n) : (x_n) \text{ φραγμένη}\})$$

$$\|x\|_\infty = \sup \{ |x_n| : n \in \mathbb{N} \}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το (θ): το σύνολο των ακολουθιών

$(x_n)$  με  $x_n = 0$  ή  $x_n = 1$ , για κάθε  $n$ , είναι υπεραριθμήσιμο και κάθε τέτοια ακολουθία είναι φραγμένη απόλυτως από 1, άρα ανήκει στον  $\ell_\infty$ .

Αν  $x \neq y$  στο  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  τότε:

$$\|x - y\|_\infty = 1 \quad \sim \text{γιατί } \forall n \quad |x_n - y_n| \leq 1,$$

$$\sim \exists n_0 \quad x_{n_0} \neq y_{n_0} \implies |x_{n_0} - y_{n_0}| = 1.$$

Σχετικά ανοικτά ή κλειστά σύνολα

Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος  $\emptyset \neq A \subseteq (X, d)$ .

Έχουμε ορίσει την σχετική μετρική  $d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}^+$  με

$d_A(x, y) = d(x, y)$ . Ο  $(A, d_A)$  είναι μετρικός χώρος.

ΠΡΟΤΑΣΗ : Ένα  $G \subseteq A$  είναι  $d_A$ -ανοιχτό αν και μόνο αν υπάρχει  $V \subseteq X$   $d$ -ανοιχτό ώστε  $G = A \cap V$ .

Παραδείγματα :

$$X = \mathbb{R}, A = [0, 2]$$

Το  $(1, 2]$  είναι ανοιχτό στον  $(A, d_A)$  διότι  $(1, 2] = A \cap (1, 3)$ .

Απόδειξη : Γράφουμε προσεκτικά τι είναι η  $B_A(x, \varepsilon)$ ,  $x \in A$  :  
 $\varepsilon$  ανοιχτό  $\subseteq \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} B_A(x, \varepsilon) &= \{y \in A : d_A(y, x) < \varepsilon\} = \{y \in A : d(y, x) < \varepsilon\} \\ &= A \cap \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\} = A \cap B_X(x, \varepsilon). \end{aligned}$$

$$(*) \quad \forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, B_A(x, \varepsilon) = B_X(x, \varepsilon) \cap A.$$

Απόδειξη της πρότασης :  $(\Rightarrow)$  Έστω  $G \subseteq A$ ,  $d_A$ -ανοιχτό.

Ξέρουμε ότι  $\exists \varepsilon_x > 0 : B_A(x, \varepsilon_x) \subseteq G$  :  $\forall G = \bigcup_{x \in G} B_A(x, \varepsilon_x) =$  (\*)

$$= \bigcup_{x \in G} A \cap B_X(x, \varepsilon_x) = A \cap \underbrace{\left( \bigcup_{x \in G} B_X(x, \varepsilon_x) \right)}_{V \text{ ανοιχτό}}$$

$(\Leftarrow)$  : Έστω  $V \subseteq X$  ανοιχτό, θα δείξουμε ότι το  $A \cap V$  είναι

$d_A$ -ανοιχτό. Έστω  $x \in A \cap V$ . Αφού το  $V$  είναι ανοιχτό,

$$\exists \varepsilon > 0 : B_X(x, \varepsilon) \subseteq V = B_{\underset{A}{A}}(x, \varepsilon) \underset{(*)}{=} A \cap B_X(x, \varepsilon) \subseteq A \cap V.$$

Αρα το  $x$  είναι εσωτερικό σημείο του  $A \cap V$  στον  $(A, d_A)$ .