

ορισμός: Αν $A \subseteq (X, d)$ τότε το $x \in X$ λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ισοδύναμα με του ορισμό είναι τα εξής:

(α). $\forall \varepsilon > 0$, η $B(x, \varepsilon)$ περιέχει άπειρα σημεία του A .

(β) υπάρχουν $x_n \in A$, $x_n \neq x$ και διαφορετικά ανά δυο, ώστε $x_n \rightarrow x$.

ΑΣΚΗΣΗ 24. Έστω $A, B \subseteq (X, d)$.

(α). $\bar{A} = A \cup A'$ (εχει γίνει)

(β) A' κλειστό

(γ) Αν $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

(δ) $\bar{A} = (\bar{A})'$ το A και το A' έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.

(ε) $(A')' \subseteq A'$ (και ο εγχελεσμος μπορεί να είναι γνήσιος).

(β). Έστω $x \in \bar{A}'$. Θα δείξουμε ότι $x \in A'$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x \in \bar{A}'$ ισχύει: $B(x, \varepsilon/2) \cap A' \neq \emptyset$.

Υπάρχει $y \in A'$: $d(y, x) < \varepsilon/2$. Παιρνουμε την $B(y, \varepsilon/2)$.

Τότε (i). Στην $B(y, \varepsilon/2)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A , γιατί

$y \in A'$ (ii) $B(y, \varepsilon/2) \subseteq B(x, \varepsilon)$.

$\left[\text{Αν } z \in B(y, \varepsilon/2) \text{ τότε } d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow z \in B(x, \varepsilon) \right]$

Αρα στην $B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A .

(γ). Έστω $x \in A'$. Στην $B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του A .

$\Rightarrow$ στην $B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του B .

$A \subseteq B$.

Αφού το ε ήταν αυθαίρετο, $x \in B'$.

(δ). $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow A' \subseteq (\bar{A})'$. Τιο του "2". Έστω $x \in (\bar{A})'$. Παιρνουμε $\varepsilon > 0$

και υπάρχει $y \in A$, $y \neq x$, $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow x \in A'$. Θεωρούμε την $B(x, \varepsilon/2)$.

Αφού $x \in (\bar{A})'$, υπάρχει $y \in \bar{A}$: $y \neq x$ και $y \in B(x, \varepsilon/2)$.

Παιρνουμε $0 < \delta < \min \left\{ \varepsilon/2, d(x, y) \right\} = d(x, y)$.

τότε (1). $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$ διότι $\delta < \varepsilon/2$ | Αφού $d(x, y) < \varepsilon/2$
 (2). Αφού $y \in \bar{A}$ υπάρχει $z \in A$, με $z \in B(y, \delta)$. | διότι $y \in B(x, \varepsilon/2)$.
 $\Downarrow$
 $d(z, y) < \delta \leq d(x, y)$.

$$\Downarrow$$

$$z \neq x.$$

Αρα $z \in (A \setminus \{x\}) \cap B(x, \varepsilon)$. Αφού το ε ήταν τυχόν, $x \in A'$.

$$(3). (A')' \subseteq A'$$

$$A' = \overline{A} \stackrel{(a)}{=} A' \cup (A')' \stackrel{(b)}{\supseteq} (A')'.$$

Αέλειωτο.

Παράδειγμα: $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$, $A' = \{0\}$, $(A')' = \emptyset$

$$\text{Εδώ } (A')' = \emptyset \subset \{0\} = A'$$

[ενα πεπερασμένο σύνολο A δεν
 έχει δ.σ., αν υπήρχε $x \in A'$,
 η $B(x, \varepsilon)$ θα περιείχε απείρα
 στοιχεία του A .]

Άσκηση 25 (Σωστό ή Λάθος).

(α). $\exists A \subseteq \mathbb{R} : A' = \mathbb{N}$ | $A = \left\{ m + \frac{1}{8n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 τότε $A' = \mathbb{N}$.

(γ) $\exists A \subseteq \mathbb{R} : A' = \mathbb{Q}$, Όχι, το A' είναι πάντα κλειστό.
 Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό.

Άσκηση 21. Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(α). Αν το X έχει τωθόχριστου δύο σημεία, τότε υπάρχει
 $G \subseteq X$ ανοικτό, ώστε $G \neq \emptyset$ και $X \setminus G \neq \emptyset$.

(β). Αν το X είναι απεριο σύνολο τότε υπάρχει $G \subseteq X$ ανοικτό
 ώστε $\bar{G} = \text{απείο}$ και $X \setminus \bar{G} = \text{απείο}$.

(α) Υπάρχουν $x, y \in X$, με $x \neq y$ έχουμε $d(x, y) > 0$.

Αν πάρω $G = B(x, \varepsilon)$, με $0 < \varepsilon < d(x, y)$, τότε $G \neq \emptyset$ διότι $x \in G$

(I) Αν ο χώρος X ~~δεν~~ έχει κάποιο σ.σ. x , τότε $\neg \exists (x_n)$ στο X με όρους διαφορετικούς από το x , ώστε $x_n \rightarrow x$. Ορίζουμε $F = \{x_{2k-1} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$

$\left\{ \begin{array}{l} x \notin G \\ \text{διότι} \\ y \notin G \end{array} \right.$

Αφού $x_{2k-1} \rightarrow x$, το F είναι κλειστό (έχει χύμα) και F άπειρο. ($x_{2k-1} \in F$ και διαφ. αναδύο)

Το $G = X \setminus F$ είναι ανοιχτό ^{και άπειρο} γιατί $x_{2k} \in G$ και είναι διαφ. αναδύο.

(II). Αν ο χώρος δεν έχει κανένα σ.σ., τότε όλα τα $x \in X$ είναι μεμονωμένα σημεία.

Το σημείνει x μεμονωμένο σημείο του X .

$$\left[\begin{array}{l} x \text{ δεν είναι σ.σ. του } X \Rightarrow \nexists \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus \{x\}) = \emptyset \\ \Rightarrow \nexists \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) = \{x\} \Rightarrow \{x\} \text{ ανοιχτό σύνολο} \end{array} \right]$$

Αν όλα τα $x \in X$ είναι μεμονωμένα τότε κάθε $\{x\}$ είναι ανοιχτό,

$$\text{διότι } G = \bigcup_{x \in G} \{x\}$$

— Αφού το X είναι άπειρο σύνολο, υπάρχει $G \subseteq X$ ώστε G άπειρο και $X \setminus G$ άπειρο.

ΑΣΚΗΣΗ 14 Έστω $G \subseteq (X, d)$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα

- (α). Το G είναι ανοιχτό.
- (β) για κάθε $A \subseteq X$, $G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A}$
- (γ) για κάθε $A \subseteq X$, $\overline{G \cap A} = \overline{G} \cap \bar{A}$

-4-

(a) $\Rightarrow$ (b) Έστω $A \subseteq X$ ανοιχτό, Έστω $x \in G \cap \bar{A}$.

• $x \in G$ και G ανοιχτό $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq G$.

• $x \in \bar{A}$ και άρα $\exists y \in A$ ώστε $y \in B(x, \varepsilon)$.

Άρα $y \in A \cap G \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap (A \cap G) \neq \emptyset$.

(b) Ζητάμε κάτι ισχυρότερο: $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap (G \cap A) \neq \emptyset$.

Αφού $x \in G$ και G ανοιχτό $\exists \varepsilon_0 > 0, B(x, \varepsilon_0) \subseteq G$.

Παίρνουμε $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Αφού $x \in \bar{A}$, υπάρχει $y \in A$

$y \in B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_0) \subseteq G$.

Άρα: $y \in B(x, \varepsilon) \cap (A \cap G)$. Δηλ. $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad B(x, \varepsilon) \cap (A \cap G) \neq \emptyset$.

Αν $\varepsilon > \varepsilon_0$ τότε $B(x, \varepsilon) \cap (A \cap G) \supseteq B(x, \varepsilon_0) \cap (A \cap G) \neq \emptyset$.

Άλλος ερπός: Θα βρούμε $x_n \in G \cap A$ ώστε $x_n \rightarrow x$
 $\Rightarrow x \in \overline{G \cap A}$.

Αφού $x \in \bar{A} \Rightarrow \exists (x_n)$ στο A ; $x_n \rightarrow x$.

Αφού $x_n \rightarrow x \in G \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in G$.
ανοιχτό

Έτσι η $(x_n)_{n \geq n_0}$ είναι στο $G \cap A$ και συγκλίνει στο x .

(b) $\rightarrow$ (γ). Έστω $A \subseteq X$. Έχουμε (από το (β)).

$$\overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \bar{A}} \Rightarrow \overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap A}$$

κλειστό

$$\text{Επίσης } \overline{G \cap A} \supseteq G \cap A \Rightarrow \overline{G \cap A} \supseteq G \cap A$$

(διότι $\bar{A} \supseteq A$)

(γ) $\rightarrow$ (α). Θέτουμε $A = X \setminus G$.

$$\text{Από την υπόθεση, } \overline{G \cap (X \setminus G)} = \overline{G \cap (X \setminus G)} = \bar{\emptyset} = \emptyset.$$

$$\Rightarrow \overline{G \cap (X \setminus G)} = \emptyset \Rightarrow G \cap (X \setminus G) = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \setminus G \subseteq X \setminus G \Rightarrow G^c \supseteq G \Rightarrow G^c = G \Rightarrow G \text{ ανοιχτό.}$$

Συνορο: Έστω $A \subseteq (X, d)$. Ένα $x \in X$ είναι στο σύνορο του A αν:

"για κάθε $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ "

(όταν $B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν και σημεία του A και σημεία του $X \setminus A$)

Σο σύνορο του A συμβολίζεται με ∂A ή $bd(A)$.

Άσκηση 30

- (α) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.
- (β) $\bar{A} = A^\circ \cup \partial A$ και τα δυο συνόλα δεξιά είναι ίσα
- (γ) $X = \underbrace{A^\circ \cup \partial A}_{\text{ίσα}} \cup (X \setminus A)^\circ$
- (δ) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)} \Rightarrow \partial A$ κλειστό
- (ε) A κλειστό $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$.

$\left. \begin{array}{l} \pi x \text{ στο } \mathbb{R} \\ \partial(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \end{array} \right\}$

(α) $x \in \partial(X \setminus A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ και $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \partial A$.

(β) Αν $x \in \partial A$ τότε $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$.

Αρα $\partial A \subseteq \bar{A}$. Επίσης $A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$. Αρα $\bar{A} \supseteq A^\circ \cup \partial A$.

Για τον αντίστροφο ελεγχισμό. Έστω $x \in \bar{A}$. Έστω ότι $x \notin A^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in X \setminus A^\circ \Rightarrow x \in \overline{X \setminus A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

Επίσης $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\left. \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \\ \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \end{array} \right\} x \in \partial A$.

Δείξαμε ότι: $\bar{A} \subseteq \partial A \Rightarrow \bar{A} \subseteq A^\circ \cup \partial A$.

Γιατί: $A^\circ \cap \partial A = \emptyset$. Αν $x \in A^\circ$ τότε $\exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) = \emptyset \Rightarrow x \notin \partial A$.

(γ) $X = \underbrace{\bar{A} \cup (X \setminus \bar{A})}_{(B)} = A^\circ \cup \partial A \cup (X \setminus A)^\circ$

(ε) A κλειστό $\Rightarrow A = \bar{A} \supseteq \partial A$

(δ) $\partial A \subseteq A$

Αν $\partial A \subseteq A$ τότε $\bar{A} = \underbrace{(A^\circ \cup \partial A)}_{(B)} \subseteq A \cup A = A$. Αρα $\bar{A} = A$
 $\Rightarrow A$ κλειστό.

Άσκηση 31. Έστω $A, B \subseteq (X, d)$. -6-

(α) Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό σύνολο, τότε το όριο του A έχει κενό εσωτερικό.

(β) Αν $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ τότε $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

(α) $(\partial A)^\circ = \emptyset$. Έστω ότι $x \in (\partial A)^\circ$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$

$B(x, \varepsilon) \subseteq \partial A \subseteq A \leftarrow$ Υποθέτω ότι το A είναι κλειστό.

Τότε $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) = \emptyset$ και $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. γιατί $x \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow x \in \partial A$

ΑΠΟΠΟ

(β) Ξέρουμε ότι $B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$.

~~$[B(x, \varepsilon) \cap A] \cup [B(x, \varepsilon) \cap B] \neq \emptyset$~~

~~Επίσης $B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B)^c \neq \emptyset$.~~

~~$B(x, \varepsilon) \cap A^c \cap B^c \neq \emptyset$~~

~~$\left(\begin{array}{c} \supseteq \\ B(x, \varepsilon) \cap A^c \end{array} \right)$~~

ωστε (7)

~~Δείχνουμε ότι $\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.~~

~~$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ ή $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow x \in \partial A$.~~

(β) " $\supseteq$ ". Έστω $x \in \partial A$. Θα δείξουμε ότι $x \in \partial(A \cup B)$

Αφού $x \in \partial A$, $\leadsto x \in \bar{A} \leadsto x \notin \bar{B}$

$\exists \varepsilon_0 > 0$, $B(x, \varepsilon_0) \cap B = \emptyset$.

Έστω $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Ζητάω $B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ (1).

$B(x, \varepsilon) \cap A^c \cap B^c \neq \emptyset$ (2).

(1). Γιατί $B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \supseteq B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ γιατί $x \in \partial A$.

(2) Έχουμε $B(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset$ για $\varepsilon \leq \varepsilon_0$. $\Rightarrow$

$B(x, \varepsilon) \cap B^c = B(x, \varepsilon) \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap A^c \cap B^c = B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ γιατί $x \in \partial A$

Άρα $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$.

" $\subseteq$ " Έστω $x \in \partial(A \cup B)$.

Τότε $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ και

$$B(x, \varepsilon) \cap (\overline{A \cup B}) \neq \emptyset.$$

$$\text{ή } x \in \overline{A \cup B} \cap (\overline{A \cup B}).$$

$$(\overline{A \cup B}).$$

$$\text{Έχουμε } x \in \overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in \overline{A}$. (τότε $x \notin \overline{B}$).

Θα δείξουμε ότι $x \in \partial(A)$.

Αφού $x \notin \overline{B}$, υπάρχει $\varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset$

Θα πάρουμε $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ και θα δείξουμε.

$$\textcircled{1} B(x, \varepsilon) \cap A = (B(x, \varepsilon) \cap A) \cup (B(x, \varepsilon) \cap B) = B(x, \varepsilon) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$$

$$\textcircled{2} B(x, \varepsilon) \cap A^c \supseteq B(x, \varepsilon) \cap A^c \cap B^c = B(x, \varepsilon) \cap (\overline{A \cup B}) \neq \emptyset$$

Άσκηση 22 Έστω $x \neq y$ στον (X, d) . Δείξτε ότι υπάρχουν

$$U, V \subseteq X \text{ ανοιχτά ώστε } x \in U, y \in V, \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

$$\text{Έχουμε } d(x, y) > 0. \text{ παίρνουμε: } \varepsilon = \frac{d(x, y)}{3} > 0.$$

$$U = B(x, \varepsilon) = \text{ανοιχτό και } x \in U.$$

$$V = B(y, \varepsilon) = \text{ανοιχτό και } y \in V.$$

$$\text{Ζητάμε: } \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset.$$

$$\overline{U} = \overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x, \varepsilon) = \{z : d(x, z) \leq \varepsilon\}$$

$$\overline{V} = \overline{B(y, \varepsilon)} \subseteq \hat{B}(y, \varepsilon) = \{z : d(y, z) \leq \varepsilon\}$$

$$\text{Έστω } z \in \overline{U} \cap \overline{V}. \text{ τότε } d(x, z) \leq \varepsilon \text{ και } d(y, z) \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 2\varepsilon = \frac{2}{3}d(x, y) \text{ άτοπο,}$$

αφού $d(x, y) > 0$.

Λογισμ 23 ~~Ερωτήματα 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100~~

Εστω $x \in X$, $F \subseteq X$ κλειστό: $x \notin F$.

Υπάρχουν U, V ανοικτά, ώστε: $x \in U$
 $\cdot F \subseteq V$.

$$\cdot \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset.$$

$\leadsto$ Αφού $x \notin F \Rightarrow x \in X \setminus F \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$.

ΠΑΡΑΣΗΡΗΣΗ: $B(x, \frac{2\varepsilon}{3}) \subseteq \hat{B}(x, \frac{2\varepsilon}{3}) = \{y : d(y, x) \leq \frac{2\varepsilon}{3}\}$
 $\subseteq \{y : d(y, x) < \varepsilon\} = B(x, \varepsilon).$

Ορίζουμε: $U = B(x, \varepsilon/3)$.

$$V = X \setminus \hat{B}(x, \frac{2\varepsilon}{3}).$$

U ανοικτό και $x \in U = B(x, \varepsilon/3)$.

V ανοικτό: $x \notin \hat{B}(x, \frac{2\varepsilon}{3})$ και $\hat{B}(x, \frac{2\varepsilon}{3})$ κλειστό

Γιατί $F \subseteq V$: Αν $y \in F$, τότε $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(y, x) \geq \varepsilon \Rightarrow d(y, x) > \frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow y \notin \hat{B}(x, \frac{2\varepsilon}{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \in X \setminus \hat{B}(x, \frac{2\varepsilon}{3}) = V.$$

(3) Αν $z \in \bar{U} \cap \bar{V}$ τότε:

$$z \in \overline{B(x, \varepsilon/3)} \Rightarrow d(z, x) \leq \varepsilon/3 \text{ και } z \in \bar{V} = \overline{X \setminus \hat{B}(x, \frac{2\varepsilon}{3})}$$

$$\hat{B}(x, \varepsilon/3).$$

$$\exists z_n \in \hat{B}(x, \frac{2\varepsilon}{3}) \text{ και } z_n \rightarrow z$$

$$d(z_n, x) > \frac{2\varepsilon}{3}$$

$$\downarrow$$
$$d(z, x). \text{ Αρα } d(z, x) \geq \frac{2\varepsilon}{3}$$

Αρα

$$d(z, x) \leq \varepsilon/3$$

και

$$d(z, x) \geq \frac{2\varepsilon}{3}$$

ΑΤΟΤΟΟ.