

2.5 Έστω (X, d) μετρίκος χώρος. Αν z είναι μια μετρίκη γινόμενο στο $X \times X$, δείξτε ότι:

$d: (X \times X, z) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

Αρκεί να δείξουμε ότι: αν $(x_0, y_0) \in X \times X$ και αν $(x_n, y_n) \xrightarrow{z} (x_0, y_0)$ τότε $d(x_n, y_n) \xrightarrow{!} d(x_0, y_0)$.

• Αφού $(x_n, y_n) \xrightarrow{z} (x_0, y_0)$ και η z είναι μετρίκη γινόμενο (ως προς την d) έχουμε:

$$x_n \xrightarrow{d} x_0$$

$$\text{και } y_n \xrightarrow{d} y_0$$

• Ήτοι έχουμε $x_n \xrightarrow{d} x_0$ και $y_n \xrightarrow{d} y_0$ και ημείπει $|d(x_0, y_0) - d(x_n, y_n)| \rightarrow 0$

Όπως $|d(x_0, y_0) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_0, x_n) + d(y_0, y_n) \rightarrow 0 + 0 = 0$.

2.6 Έστω (x_n) ακολουθία στον (X, d) και έστω $x \in X$.

Υποθέτουμε ότι "για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n) \rightarrow f(x)$ ". Ισχύει ότι: $x_n \xrightarrow{d} x$;

• Ορίζουμε $f_0(y) = d(y, x)$, $y \in X$.

• Η f είναι συνεχής: αν $y_n \xrightarrow{d} y$ τότε

$$|f_0(y) - f_0(y_n)| = |d(y, x) - d(y_n, x)| \leq d(y, y_n) \rightarrow 0.$$

Από την υπόθεση, πρέπει να έχουμε:

$$f_0(x_n) \rightarrow f_0(x) \text{ δηλ. } d(x_n, x) \rightarrow d(x, x) = 0$$

$$\text{Άρα: } x_n \xrightarrow{d} x.$$

3.6. Δείξτε ότι κάθε σφαίρα $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : d(x, x_0) = \varepsilon\}$ είναι κλειστό σύνολο (σε κάθε (X, d)).

Μπορεί να συμβεί $S(x_0, \varepsilon) = \emptyset$;

1^{ος} ερωτος: $X \setminus S(x_0, \varepsilon) = \{x : d(x, x_0) < \varepsilon\} \cup \{x : d(x, x_0) > \varepsilon\}$

$$= \underbrace{B(x_0, \varepsilon)}_{\text{ανοιχτό}} \cup \underbrace{(X \setminus \hat{B}(x_0, \varepsilon))}_{\text{ανοιχτό}} = \text{ανοιχτό.}$$

($\hat{B}(x_0, \varepsilon)$ κλειστό).

2^{ος} ερωτος: θεωρούμε (x_n) στην $S(x_0, \varepsilon)$, υποθέτουμε, ότι $x_n \rightarrow x \in X$. και δείχνουμε ότι $x \in S(x_0, \varepsilon)$.

Έχουμε $x_n \in S(x_0, \varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x_0) = \varepsilon$.

Έχουμε $x_n \rightarrow x \Rightarrow d(x_n, x_0) \rightarrow d(x, x_0)$.
"ε."

Άρα $d(x, x_0) = \varepsilon$.

$\Downarrow$

$x \in S(x_0, \varepsilon)$.

(*) Στην (X, δ) , για κάθε $x \in X$ έχουμε $S(x_0, \frac{1}{2}) = \left\{x : d(x, x_0) = \frac{1}{2}\right\}$
 $\Rightarrow S(x_0, \frac{1}{2}) = \emptyset$.

3.7. Εξετάστε αν ισχύει πάντα: $\overline{B(x, \varepsilon)} = \hat{B}(x, \varepsilon)$.

Ισχύει πάντα το εξής: $B(x, \varepsilon) \subseteq \hat{B}(x, \varepsilon)$
 $\Rightarrow \overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x, \varepsilon)$.

Δεν ισχύει πάντα ισότητα.

Παίρνουμε σύνολο X που έχει τουλάχιστον δύο σημεία.

Θεωρούμε την διακριτή μετρική δ στο X .

ΕΛΕΓΧΟΣ
ΚΛΕΙΣΤΗΣ
ΘΗΤΗΣ:
Αν $A \subseteq F$
τότε,
 $\bar{A} \subseteq F$.
κλειστό

Έστω $x \in X$. Τότε :

$$\underbrace{B(x, 1)}_{\text{ανοικτό}} = \underbrace{\{x\}}_{\text{κλειστό}} \Rightarrow \overline{B(x, 1)} = \{x\} = B(x, 1).$$

Όπως : $\hat{B}(x, 1) = \{y \in X : d(y, x) \leq 1\} = X$. Όπως $\{x\} \subsetneq X$.
(γιατί $\nexists y \in X, y \neq x$).

3.15 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα (και $d(y, x) = \|x - y\|$ η επαχόμενη μετρική). Δείξτε ότι $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \quad \overline{B(x, \varepsilon)} = \hat{B}(x, \varepsilon)$.

- Έχουμε ήδη δείξει (σε κάθε μετρικό χώρο) ότι $\overline{B(x, \varepsilon)} \subseteq \hat{B}(x, \varepsilon)$
- Μένει να δείξουμε ότι $\hat{B}(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cup \partial(x, \varepsilon) \subseteq \overline{B(x, \varepsilon)}$
- Έχουμε $B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{B(x, \varepsilon)}$ άρα μένει να δείξουμε ότι $S(x, \varepsilon) \subseteq \overline{B(x, \varepsilon)}$

Έστω $y \in S(x, \varepsilon)$. Τότε $\|y - x\| = \varepsilon$.

Ορίσουμε $x_n = \frac{1}{n}x + (1 - \frac{1}{n})y$.

Θα δείξουμε ότι : (α). $\|x_n - x\| < \varepsilon$ δηλ.

$x_n \in B(x, \varepsilon)$ (β). $\|y - x_n\| \rightarrow 0$, δηλ. $y \in \overline{B(x, \varepsilon)}$.

$$\begin{aligned} \text{(α). } \|x_n - x\| &= \left\| \frac{1}{n}x + \left(1 - \frac{1}{n}\right)y - x \right\| = \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)y - \left(1 - \frac{1}{n}\right)x \right\| \\ &= \left\| \left(1 - \frac{1}{n}\right)(y - x) \right\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|y - x\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \varepsilon < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(β). } \|y - x_n\| &= \left\| y - \frac{1}{n}x - \left(1 - \frac{1}{n}\right)y \right\| = \left\| \frac{1}{n}y - \frac{1}{n}x \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{n}(y - x) \right\| = \frac{1}{n}\|y - x\| = \frac{1}{n} \cdot \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{l} y \in A \\ \Leftrightarrow \\ \forall \varepsilon > 0 \quad B(y, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow \\ \exists x_n \in A : \\ x_n \rightarrow y. \end{array} \right.$$

3.9 (α) Υπάρχει ατερό ελάχιστο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που αποτελείται μόνο από ρητούς;

(β) Υπάρχει ατερό μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που αποτελείται μόνο από άρρητους;

(α) Ναι, π.χ το $\mathbb{Z}$. Είναι ατερό και αποτελείται από ρητούς

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k, k+1) = \text{ανοιχτό ως ένωση ανοικτών διαστημάτων}$$

• Άλλος τρόπος: Αν $x_n \in \mathbb{Z}$ και $x_n \rightarrow x \in \mathbb{R}$ τότε (γνωστό).

η (x_n) είναι τελικά σταθερή. $\exists n_0: \forall n \geq n_0 \quad x_n = x_{n_0}$.

Τότε, $x_n \rightarrow x_{n_0}$. Δηλαδή $x = x_{n_0} \in \mathbb{Z}$.

(β) Όχι. Έστω A ένα τέτοιο σύνολο. Πάιρνω τυχόν $x_0 \in A$. Αφού το A είναι ανοιχτό, το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του A .

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq A.$$

Όπως $\exists$ άρρητος $q \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \leadsto q \in A$, άτοπο.

3.10 Έστω $A, B \subseteq (X, d)$.

(α) Αν $A \cup B = X$, τότε $\bar{A} \cup B^\circ = X$.

(β) Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $\bar{A} \cap B = \emptyset$.

$$\bullet A \cup B = X \leadsto B \supseteq X \setminus A.$$

• Θα δείξουμε ότι $X \subseteq \bar{A} \cup B^\circ$ (ο αντίστροφος εγκλεισμός ισχύει).

i) Αν $x \in \bar{A}$ τότε έχουμε $x \in \bar{A} \cup B^\circ$.

ii) Αν $x \notin \bar{A}$ θα δείξουμε ότι $x \in B^\circ$.

Αφού $x \notin \bar{A}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

$$\stackrel{\exists \varepsilon > 0}{\Rightarrow} B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A \subseteq B. \Rightarrow x \text{ εσ. σημείο του } B, \quad x \in B^\circ.$$

(β) Έστω ότι υπάρχει $x \in \bar{A} \cap B^\circ$.

$$\left. \begin{array}{l} (i). x \in \bar{A} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ (ii) x \in B^\circ \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : B(x, \varepsilon_0) \subseteq B \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} B(x, \varepsilon_0) \cap A \neq \emptyset \\ \text{και} \\ B(x, \varepsilon_0) \subseteq B \end{array}$$

Από την πρώτη, υπάρχει $y \in B(x, \varepsilon_0) \cap A$.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} y \in B(x, \varepsilon_0) \subseteq B \\ \text{και } y \in A \end{array} \right\} \Rightarrow y \in A \cap B \text{ - άτοπο } (A \cap B = \emptyset).$$

3.11. Αν $A, B \subseteq (X, d)$ τότε :

$$(i). (A \cup B)^\circ \subseteq A^\circ \cup B^\circ$$

$$(ii). \bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$$

(i) Έστω $x \in (A \cup B)^\circ \Rightarrow$ υπάρχει $\varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A \cup B$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $x \in A^\circ$ και $x \in B^\circ$.

• Έχουμε $B(x, \varepsilon) \subseteq A \cup B \subseteq A \Rightarrow x \in A^\circ$

• Έχουμε $x \in (A \cup B)^\circ \subseteq A \cup B$ άρα $x \in B$.

Όπως $B^\circ \subseteq B \leadsto x \in B^\circ$

(ii). Έστω $x \in \bar{A} \cap \bar{B} \leadsto x \in \bar{A} \Rightarrow \exists x_n \in A : x_n \rightarrow x$.

$\leadsto x \in \bar{B} \Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : B(x, \varepsilon_0) \cap B = \emptyset$.

Αφού $x_n \rightarrow x$, υπάρχει $n_0 : \forall n \geq n_0, x_n \in B(x, \varepsilon_0)$.

Όπως, $B(x, \varepsilon_0) \cap B = \emptyset$, Άρα $\forall n \geq n_0, x_n \notin B$.

Η ακολουθία $(x_n)_{n=n_0}^\infty$ είναι στο $A \cap B$ και συχνηνεί στο x .

Άρα $x \in \overline{A \cap B}$.

3.12 Αν $\emptyset \neq A \subseteq (X, d)$ δείξε ότι $\text{diam}(A) = \text{diam}(\bar{A})$.

Ισχύει γενικά ότι $\text{diam}(A) = \text{diam}(A^\circ)$.

• Γενικά, $A \subseteq B \Rightarrow \text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.

Αφού $A \subseteq \bar{A} \leadsto \text{diam}(A) \leq \text{diam}(\bar{A})$.

Για την αντίστροφη ανισότητα : αρκεί να δείξουμε ότι

$\forall x, y \in \bar{A}$, τότε $d(x, y) \leq \text{diam}(A)$.

$$\Rightarrow \text{diam}(A) = \sup \{ d(x, y) : x, y \in \bar{A} \} \leq \text{diam}(A).$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \subseteq \Delta \subseteq \mathbb{R} \text{ τότε} \\ \sup \Gamma \leq \sup \Delta \\ \hline \sup \Delta \leq \lambda \end{array} \right\}$$

Έστω $x, y \in \bar{A}$. Υπάρχουν $x_n \in A, y_n \in A : x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$.

Τότε $d(x_n, y_n) \leq \text{diam}(A)$. Άρα $d(x, y) \leq \text{diam}(A)$.

$$d(x, y) \leq \text{diam}(A)$$

οχι. $A = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Τότε $\text{diam}(A) = \text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}([0, 1]) = 1$.

Αλλά, $A^\circ = \emptyset \Rightarrow \text{diam}(A^\circ) = 0$

Σημεία συσώρευσης

ορισμός: (σημείο συσώρευσης) Έστω $A \subseteq (X, d)$.

Ένα $x \in X$ λέγεται σημείο συσώρευσης του A ,

αν "σε κάθε μπάδα με κέντρο το x υπάρχουν σημεία του A .

διαφορετικά από το x ".

Π.χ. $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Παράδειγμα: $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ στο $\mathbb{R}$.

• ΟΕΑ': $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \neq 0 \text{ και } \frac{1}{n} \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Το σύνολο των σημείων συσώρευσης του A συμβολίζεται με A' και λέγεται παράγωγο σύνολο του A .

• κανένα σημείο του A δεν είναι σημείο συσώρευσης του A .

Έστω π.χ. $n \geq 2$. Αν πάρω $0 < \varepsilon_n < \min \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right\}$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \text{ τότε:}$$

$$\left(\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n} + \varepsilon_n \right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}. \text{ Άρα } \frac{1}{n} \notin A'.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $A \subseteq (X, d)$ και έστω $x \in X$. Τα εξής είναι

ισοδύναμα: (α). $x \in A'$ (x σημείο συσσώρευσης του A).

(β). $\forall \varepsilon > 0$, το σύνολο $B(x, \varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

(γ). υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A , με $x_n \neq x$ για κάθε n και $x_n \rightarrow x$.

(α) $\Rightarrow$ (β). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x \in A'$ έχουμε

$$B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Έστω ότι το σύνολο $A \cap B(x, \varepsilon)$ είναι πεπερασμένο. Τότε και το

$\emptyset \neq B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\})$ είναι πεπερασμένο.

Υποθέτουμε ότι $B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Παίρνουμε $0 < \delta < \min \{d(y_1, x), \dots, d(y_n, x)\} < \varepsilon$.

Αφού $x \in A'$, έχουμε κάποιο $z \in B(x, \delta)$, $z \in A$, $z \neq x$.

Όπως τότε, αφού $\delta < \varepsilon$, έχουμε $z \in B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\})$.

$\Rightarrow z = y_1$ ή $z = y_2$, ή $\dots$ $z = y_n$.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Παίρνω $\varepsilon = 1$. Από το (β) $\exists x_1 \in A$ με $d(x_1, x) < 1$.

(υπάρχουν άπειρα $x_i \in A \cap B(x, \varepsilon)$ άρα) x
και κάποιο διαφορετικό από το x

Παίρνω $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Όπως πριν, $\exists x_2 \in A$, $d(x_2, x) < \frac{1}{2}$ και

$x_2 \neq x$, $x_2 \neq x_1$. Επαναληπτικά βρίσκουμε $x_n \neq x$,

διαφορετικά ανά δυο, με $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \rightarrow x$.

(γ) $\Rightarrow$ (α). Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε την $B(x, \varepsilon)$.

Έχουμε μια (x_n) στο A , $x_n \neq x$, $x_n \rightarrow x$.

Για μεγάλο n , $\left. \begin{matrix} x_n \in B(x, \varepsilon) \\ x_n \neq x \\ x_n \in A \end{matrix} \right\} \Rightarrow B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Αφού το ε ήταν τυχόν, $x \in A'$.

3.24 (ιδιότητες των σημείων συσσώρευσης).

Έστω $A \subseteq (X, d)$, (α). $\bar{A} = A \cup A'$

$$\cdot A \subseteq \bar{A}$$

$$\cdot A' \subseteq \bar{A}$$

$$\left(\begin{aligned} x \in A' &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \\ &\Rightarrow x \in \bar{A} \end{aligned} \right)$$

Συνεπώς, $A \cup A' \subseteq \bar{A}$.

Αντίστροφα: Έστω $x \in \bar{A}$. Αν $x \in A$, έχει καλώς. Αλλιώς θα δείξουμε ότι $x \in A'$. Πάρνουμε $\varepsilon > 0$. Αφού $x \in \bar{A}$, στην

$B(x, \varepsilon)$ υπάρχουν σημεία του A τα οποία είναι αναγκαστικά $\neq x$ αφού $x \notin A$.

Στο παράδειγμα: $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ έχουμε $A' = \{0\}$ και $\bar{A} = \left\{ 0 \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $\searrow \exists \varepsilon > 0$

(β). Το A' είναι κλειστό σύνολο.

Πάρνουμε $x \in \bar{A}'$ και δείχνουμε ότι $x \in A'$. $\left(\begin{array}{l} \text{Τότε,} \\ A' = \bar{A}' \Rightarrow \\ \text{A κλειστό} \end{array} \right)$

Αφού $x \in \bar{A}'$ υπάρχει $y \in A' \cap B(x, \varepsilon/2)$.

Υπάρχουν άπειρα $z \in A \cap B(y, \varepsilon/2) \subseteq A \cap B(x, \varepsilon)$. Κάποια από τα z είναι $\neq x$.