

- Εσωτερικό σημείο: Έστω $A \subseteq (X, d)$. Ένα $x \in A$ λέγεται εσωτερικό σημείο του A αν υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε: $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$.
- Ανοικτό σύνολο: Ένα $G \subseteq (X, d)$ λέγεται ανοικτό αν κάθε $x \in G$ είναι εσωτερικό σημείο του G .

Σημείωση: Το $\emptyset$ είναι ανοικτό σύνολο. ο τυπικός ορισμός του ανοικτού συνόλου είναι ο εξής: $\forall x \in X (x \in G \Rightarrow x \text{ εσ. σημείο του } G)$.
 Αν $G = \emptyset \quad \forall x \in X \quad (\underbrace{x \in \emptyset}_{\psi} \Rightarrow \underbrace{x \text{ εσ. σημείο του } \emptyset}_{\psi})$

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Βασικές ιδιότητες της κλάσης των ανοικτών συνόλων) $\left. \begin{array}{l} \text{Αν } G_1, G_2, \dots, G_n \text{ ανοικτά, τότε το } G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n \text{ είναι ανοικτό.} \\ \text{Αν } (G_i)_{i \in I} \text{ είναι μία οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του } X, \text{ τότε το } \bigcup_{i \in I} G_i \text{ είναι ανοικτό.} \end{array} \right\} \text{Αρα η σθεναρχική είναι αληθής.}$

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(i). $\emptyset, X$ ανοικτά σύνολα.

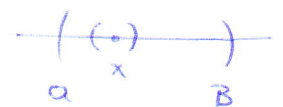
(ii). Αν $G_1, G_2, \dots, G_n$ ανοικτά, τότε το $G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$ είναι ανοικτό.

(iii). Αν $(G_i)_{i \in I}$ είναι μία οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X , τότε το $\bigcup_{i \in I} G_i$ είναι ανοικτό.

Παραδείγματα: (i) Στο $\mathbb{R}$.

Κάθε ανοικτό διάστημα (a, b) είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$.

Έστω $x \in (a, b)$. Τότε $a < x < b \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad a < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < b$
 $\Rightarrow (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b) \Rightarrow x \text{ εσ. σημείο του } (a, b)$.
 " $B(x, \varepsilon)$.



Το $(a, b]$ δεν είναι ανοικτό.

Έχουμε $b \in (a, b]$ και δεν είναι εσ. σημείο του $(a, b]$ π.χ. $\varepsilon = \frac{1}{4} \min\{x_0 - a, b - x_0\}$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ η $B(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \not\subseteq (a, b]$

π.χ. $(b + \frac{\varepsilon}{2}) \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ αλλά $b + \frac{\varepsilon}{2} > b \Rightarrow (b + \frac{\varepsilon}{2}) \notin (a, b]$

(iv). Κάθε ανοικτή μπάρα $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$

(σε κάθε μ. χώρο (X, d)) είναι ανοικτό σύνολο.

Αποδείξη: Έστω $y \in B(x, \varepsilon)$. Θα δείξουμε ότι το y είναι εσωτερικό σημείο του $B(x, \varepsilon)$. Δηλ. θα βρούμε $\delta > 0$:
 $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$.

Επιλέχουμε $\delta = \varepsilon - d(x, y) > 0$. (διότι $y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow d(y, x) < \varepsilon$).

• Έστω $z \in B(y, \delta)$. Τότε: $d(z, x) \leq \underbrace{d(z, y)}_{\leq \delta} + d(y, x) < \delta + d(y, x)$
 $\leq \varepsilon - \cancel{d(x, y)} - \cancel{d(y, x)} = \varepsilon$
 Άρα $z \in B(x, \varepsilon)$

(iii). (x, δ) Κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοιχτό. Έστω $x \in A$.
 διακριτή μετρική Παιρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Τότε $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subseteq A$.

Άρα το x είναι εσωτερικό σημείο του A . διότι $x \in A$

(iv) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}$.

Λάμβδος $q \in \mathbb{Q}$ δεν είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{Q}$:

Αν $q \in \mathbb{Q}$ τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν άρρητοι στο $(q - \varepsilon, q + \varepsilon)$.
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B(q, \varepsilon) \not\subseteq \mathbb{Q}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Χαρακτηρισμός των ανοιχτών συνόλων με ακολουθίες).

Έστω $G \subseteq (X, d)$. Τότε το G είναι ανοιχτό αν και μόνο αν

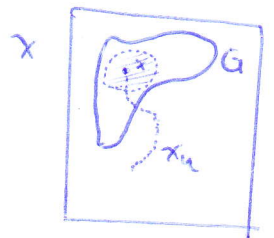
"για κάθε (x_n) στο X η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in G$
 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, x_n \in G$ ".

($\Rightarrow$). Έστω (x_n) στο X με $x_n \rightarrow x \in G$.

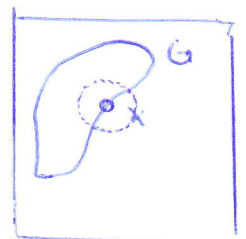
Αφού το G είναι ανοιχτό και $x \in G$, υπάρχει $\varepsilon > 0$.

$B(x, \varepsilon) \subseteq G$. Αφού $x_n \rightarrow x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall n \geq n_0, x_n \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow \forall n \geq n_0, x_n \in G$.
 ($\subseteq G$).



($\Leftarrow$). Έστω ότι το G δεν είναι ανοιχτό. Τότε
 υπάρχει $x \in G$ που δεν είναι εσωτερικό σημείο
 του G . Τότε $\forall \varepsilon > 0$, η $B(x, \varepsilon)$ δεν περιέχεται
 στο G . Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$ και
 βρίσκουμε $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$ αλλά $x_n \notin G$.



Τότε $d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow x$.

$\Rightarrow$ Όλοι τελικοί οι $x_n \in G$. Αποτίο: κανένας x_n δεν ανήκει στο G .

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Περιγραφή των ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$).

Ένα $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{(a_n, b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοιων που δύο ανοικτών διαστημάτων ώστε:

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ ή αν $A = (a_1, b_1) \cup \dots \cup (a_k, b_k)$ - με τα (a_i, b_i) ξένα ή αν $A = \emptyset$.

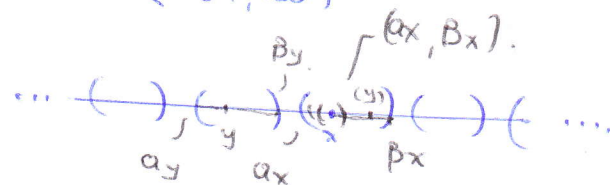
Απόδειξη: ($\Leftarrow$). Είναι σαφές, γιατί κάθε ανοικτό διάστημα είναι ανοικτό σύνολο, και οποιδήποτε ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

Επιτρέπεται
 $a_i = -\infty$ ή $b_i = +\infty$.
 Διάστημα είναι και
 το $(-\infty, \beta)$, $(-\infty, +\infty)$
 $(\alpha, +\infty)$

($\Rightarrow$). Έστω A ανοικτό στο $\mathbb{R}$.

$A \neq \emptyset$.

Έστω $x \in A$.



Βήμα 1: Από το A είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$

$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow (x - \varepsilon, x] \subseteq A$ και $[x, x + \varepsilon) \subseteq A$.

ορίσουμε $\alpha_x = \inf \{s < x : (s, x] \subseteq A\}$ ή $x - \varepsilon$.

και $\beta_x = \sup \{t > x : [x, t) \subseteq A\}$ ή $x + \varepsilon$.

Μπορεί να συμβεί $\alpha_x = -\infty$, ή/και $\beta_x = +\infty$.

Ισχυρισμός: $(\alpha_x, \beta_x) \subseteq A$.

• Αν $\alpha_x < s \leq x$ τότε από χαρακτηρισμό του infimum.

$\exists t < s$ ώστε $(t, x] \subseteq A \Rightarrow s \in A$.

$\uparrow$
 $(s \in (t, x])$.

• Αν $x \leq s < \beta_x$ τότε από χαρακτηρισμό του supremum

$\exists t > s$ ώστε $[x, t) \subseteq A \Rightarrow s \in A$. ■

$\uparrow$
 $(s \in [x, t))$.

Βήμα 2 : Αν $y \in (a_x, b_x)$ τότε $(a_y, b_y) = (a_x, b_x)$.

Έχουμε ότι $a_y = \inf \{ s \in \mathbb{Q} : (s, y] \subseteq A \}$. Αφού $(a_x, y] \subseteq (a_x, b_x) \subseteq A$ παίρνουμε $a_y \leq a_x$. Όμοια, $b_y \geq b_x$. Άρα $(a_x, b_x) \subseteq (a_y, b_y)$.
Έστω $x \in (a_x, b_x) \subseteq (a_y, b_y)$ και επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα (με το x στο ρόλο του y) έχουμε :

$$(a_y, b_y) \subseteq (a_x, b_x) . \blacksquare$$

Βήμα 3 : Αν $x, y \in A$ τότε είτε $(a_x, b_x) \cap (a_y, b_y) = \emptyset$
ή $(a_x, b_x) = (a_y, b_y)$.

Έστω ότι υπάρχει $z \in (a_x, b_x) \cap (a_y, b_y)$.

$$\text{Τότε } z \in (a_x, b_x) \xrightarrow{\text{β.2}} (a_z, b_z) = (a_x, b_x),$$

και

$$z \in (a_y, b_y) \xrightarrow{\text{β.2}} (a_z, b_z) = (a_y, b_y) . \blacksquare$$

Ισχύει $A = \bigcup_{x \in A} (a_x, b_x)$. και αν κρατήσουμε κάθε (a_x, b_x) μια φορά έχουμε χράσει το A σαν ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων. Ζέλος, επειδή σε καθένα από αυτά τα διαστήματα μπορούμε να βρω ρητό και οι ρητοί αυτοί είναι διαφ. ανά δύο, γιατί τα διαστήματα είναι ξένα, και επειδή το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο, το πλήθος των διαστημάτων είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο.

ΠΡΟΣΑΞΗ : Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Κάθε ανοικτό $G \subseteq X$, χράφεται σαν ένωση από ανοικτές μπάλες.

Απόδειξη : Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0 : B(x, \varepsilon_x) \subseteq G$.

(το G είναι ανοικτό $\Rightarrow x$ εδ. σημείο του G).

$$\text{Τότε } G = \bigcup_{x \in G} B(x, \varepsilon_x) . \blacksquare$$

Κλειστά σύνολα.

Ορισμός: (κλειστό σύνολο): Ένα $F \subseteq (X, d)$ λέγεται κλειστό αν το $(X \setminus F)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Παραδείγματα: Κάθε κλειστό πρόβλημα είναι κλειστό σύνολο,

που: $\hat{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) \leq \varepsilon\}$
Θα δείξουμε ότι το $(X \setminus \hat{B}(x, \varepsilon)) = \{y \in X : d(y, x) > \varepsilon\}$ είναι
ανοιχτό. Έστω $y \in X \setminus \hat{B}(x, \varepsilon)$. Έτσι $d(y, x) > \varepsilon$.

Επιλέγουμε $\delta = d(x, y) - \varepsilon > 0$.

Θα δείξουμε ότι $B(y, \delta) \subseteq X \setminus \hat{B}(x, \varepsilon)$. Παιρνουμε $z \in B(y, \delta)$.
και ζητάμε $d(z, x) > \varepsilon$. Έχουμε $d(z, x) \geq d(x, y) - d(y, z)$ και
 $d(y, z) < \delta$. Άρα $d(z, x) > d(x, y) - \delta = d(x, y) - (d(x, y) - \varepsilon) = \varepsilon$.

(ii). Κάθε $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό.

$$\mathbb{R} \setminus [a, b] = \underbrace{(-\infty, a)}_{\text{ανοιχτό}} \cup \underbrace{(b, +\infty)}_{\text{ανοιχτό}} = \text{ανοιχτό}.$$

Το $[a, b]$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.

Δεν είναι ανοιχτό: το είδαμε το b δεν είναι εδ. σημείο.

Δεν είναι κλειστό: Θα είχαμε ότι το $\mathbb{R} \setminus (a, b] = (-\infty, a] \cup (b, \infty)$
είναι ανοιχτό. Όμως το a δεν είναι εδ. σημείο του.

(iii) (X, d)
διακριτός μετρικός. Έστω $A \subseteq X$. Έτσι το $B = X \setminus A$ είναι
ανοιχτό $\Rightarrow A$ κλειστό.

Άρα στον (X, d) όλα τα υποσύνολα είναι και ανοιχτά και κλειστά.

Παράδειγμα - οίσκηση: Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω
 (x_n) ακολουθία στο X με $x_n \rightarrow x \in X$.

Έτσι το σύνολο $F = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό.

Θα δείξουμε ότι το $X \setminus F$ είναι ανοιχτό. Έστω $y \in (X \setminus F)$. Θα
δείξουμε ότι το y είναι εσωτερικό σημείο του $(X \setminus F)$.

Έχουμε: $y \neq x$ και $y \neq x_n$, $n=1, 2, \dots$

Έχουμε $x \neq y$, άρα $d(x, y) > 0$. Αν λοιπόν πάρουμε $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2} d(x, y)$, τότε $B(x, \varepsilon_0) \cap B(y, \varepsilon_0) = \emptyset$.

Αφού $x_n \rightarrow x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0 \quad x_n \in B(x, \varepsilon_0)$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad x_n \notin B(y, \varepsilon_0)$

Επίσης $x \notin B(y, \varepsilon_0)$.

Έτσι $x_1, x_2, \dots, x_{n_0} \in B(y, \varepsilon_0)$. Ορίζουμε $0 < \varepsilon < \min \left\{ \varepsilon_0, d(y, x_1), \dots, d(y, x_{n_0}) \right\}$

Τότε στον $B(y, \varepsilon)$ δεν έχω κανένα x_n και δεν έχω το x .

Άρα $X \setminus F$ ανοιχτό $\Rightarrow F$ κλειστό. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ: (Βασικές ιδιότητες της οικογένειας των κλειστών υποσυνόλων).

Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

(i) $\emptyset, X$ κλειστά.

(ii) Αν $F_1, F_2, \dots, F_n$ είναι κλειστά $\subseteq X$, τότε το $F_1 \cup \dots \cup F_n$ είναι κλειστό.

(iii) Αν $(F_i)_{i \in I}$ είναι οποιοδήποτε οικογένεια κλειστών υποσυνόλων, τότε το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι κλειστό.

$$\begin{aligned} \text{Γνωρίζουμε ότι: } & \left. \begin{aligned} \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c &= \bigcap_{i \in I} A_i^c = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \\ \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c &= \bigcup_{i \in I} A_i^c = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Απόδειξη: (ii) } X \setminus (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n) &= (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n)^c = \\ &= F_1^c \cap F_2^c \cap \dots \cap F_n^c = (X \setminus F_1) \cap \dots \cap (X \setminus F_n) = \text{ανοιχτό.} \end{aligned}$$

Από του ορισμό, το $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ είναι $\left(\begin{array}{c} \text{ανοιχτό} \\ \text{"G"} \end{array} \right)$ $\left(\begin{array}{c} \text{κλειστό} \\ \text{"F"} \end{array} \right)$

$$\text{(iii) } X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = \text{ανοιχτό.}$$

Άρα το $\bigcap_{i \in I} F_i$ είναι $\left(\begin{array}{c} \text{κλειστό} \\ \text{"F"} \end{array} \right)$.

Σημείωση: Απείρη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι απαραίτητα κλειστό σύνολο.

Ορίζουμε $F_1 = \{1\}$ και για $n \geq 2$: $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$

Κάθε F_n είναι κλειστό σύνολο, αλλά: $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$

το οποίο δεν είναι κλειστό.

$$\left[\begin{array}{l} \bullet 0 \notin F_n \text{ για κανένα } n \\ \bullet F_n \subseteq [0, 1] \Rightarrow \bigcup F_n \subseteq [0, 1] \\ \bullet \text{ Αν } 0 < x \leq 1 \text{ τότε } \exists n_0 : \\ \frac{1}{n_0} < x \leq 1 \Rightarrow x \in F_{n_0} \subseteq \bigcup F_n \end{array} \right]$$

Θεώρημα: Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$

Τότε: F κλειστό $\Leftrightarrow$ " για κάθε ακολουθία (x_n) στο F η οποία συχλίνει σε κάποιο $x \in X$ έχουμε αναγκαστικά ότι $x \in F$ "

Παράδειγμα: $\hat{B}(x, \varepsilon) =$ κλειστό. Έστω $x_n \in \hat{B}(x, \varepsilon)$ και έστω ότι $x_n \rightarrow y$. Έχουμε $d(y, x) = \lim d(x_n, x) \leq \varepsilon \Rightarrow y \in \hat{B}(x, \varepsilon)$

Απόδειξη:

$(\Rightarrow)$ Έστω $x_n \in F$ και έστω ότι $x_n \rightarrow x \in X$.

Έστω ότι $x \notin F \Rightarrow x \in (X \setminus F)$. Το οποίο είναι ανοιχτό.

$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in X \setminus F$. Αξιοπ, γιατί όλοι οι x_n είναι στο F .

ΠΡΟΣΑΡΤΗ

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι το F δεν είναι κλειστό. Τότε το $(X \setminus F)$ δεν είναι ανοιχτό. Τότε υπάρχει $x \in (X \setminus F)$ το οποίο δεν είναι εσωτερικό σημείο του $(X \setminus F)$.

Τότε για $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $B(x, \frac{1}{n}) \not\subseteq (X \setminus F)$.

$\Rightarrow \forall n \exists x_n \in F : d(x_n, x) < \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Τότε $\begin{cases} x_n \in F \\ x_n \rightarrow x \end{cases} \Rightarrow x \in F$

Αξιοπ.