

(1). Μετρική γινόμενο :

Έστω  $(X, d)$  και  $(Y, \sigma)$  δύο μετρικοί χώροι.

$$\text{Ορίζουμε } X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

Λέμε ότι μια μετρική  $\tau$  στο  $X \times Y$  είναι μετρική γινόμενο (ως προς την  $d$  και  $\sigma$ ) αν ισχύει το εξής :

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\tau} (x, y) \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x \text{ και } y_n \xrightarrow{\sigma} y.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

(α). Ορίζουμε  $\tau_1((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$ .

Η  $\tau_1$  είναι μετρική : (i)  $\tau_1((x, y), (x', y')) \geq 0$  και ισότητα έχουμε αν και μόνο αν  $d(x, x') = 0$  και  $\sigma(y, y') = 0$

$$\Leftrightarrow x = x' \text{ και } y = y'$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (x', y').$$

(ii) απλή :

$$\begin{aligned} (\text{iii}) : \tau_1((x, y), (x', y')) &= d(x, x') + \sigma(y, y') \\ &\leq d(x, x'') + \sigma(y, y'') + d(x'', x') + \sigma(y'', y') \\ &= \tau_1((x, y), (x'', y'')) + \tau_1((x'', y''), (x', y')) \end{aligned}$$

Για την σύγκλιση :

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{\tau_1} (x, y) \Leftrightarrow \tau_1((x_n, y_n), (x, y)) \rightarrow 0.$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq d(x_n, x) + \sigma(y_n, y) \rightarrow 0.$$

$$\Leftrightarrow d(x_n, x) \rightarrow 0 \text{ και } \sigma(y_n, y) \rightarrow 0.$$

$$\Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d} x \text{ και } y_n \xrightarrow{\sigma} y$$

(β). Ορίζουμε  $\tau_2((x, y), (x', y')) = \sqrt{d(x, x')^2 + \sigma(y, y')^2}$

και για  $1 < p < \infty$   $\tau_p((x, y), (x', y')) = \left( d(x, x')^p + \sigma(y, y')^p \right)^{1/p}$ .

$$\tau_\infty((x, y), (x', y')) = \max \{ d(x, x'), \sigma(y, y') \}$$

Όλες αυτές είναι μετρίτες (αίστηση) γινόμενο (αίστηση) στο  $X \times Y$ .

(2). Ξίδαμε ότι υπάρχουν μετρίτοι χώροι στους οποίους δεν ισχύει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκεντρώουσα υποακολουθία.

Παραδείγματα: (i)  $X$  = άπειρο σύνολο με την διακριτή μετρική  $\delta$ .

(ii)  $\mathbb{R}^\omega$ .

ΠΡΟΤΑΣΗ: Στον  $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$  κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκεντρώουσα υποακολουθία.

Απόδειξη: (για  $m=3$ , δηλ. στον  $\mathbb{R}^3$ ).

Έστω  $(x_n)$  φραγμένη ακολουθία στον  $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ ,

$x_n = (a_n, b_n, \gamma_n)$ . Τότε υπάρχει  $M > 0$  :  $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_2 \leq M$ .

δηλ.  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + \gamma_n^2} \leq M$ .

Αρα: 
$$\begin{cases} |a_n| \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2 + \gamma_n^2} \leq M \\ |b_n| \leq M \\ |\gamma_n| \leq M \end{cases}$$

Δηλαδή οι  $(a_n), (b_n), (\gamma_n)$  είναι φραγμένες στον  $\mathbb{R}$ .

• Η  $(a_n)$  είναι φραγμένη στο  $\mathbb{R}$ .

Από το Θ. Bolzano - Weierstrass, υπάρχει υποακολουθία.

$a_{k_n} \rightarrow a \in \mathbb{R}$ .

• Θεωρούμε την  $(b_{k_n})$ . Η  $(b_{k_n})$  είναι φραγμένη από  $M$  (όπως και η  $(b_n)$ ) άρα από Θ. B-W έχει συγκεντρώουσα υποακολουθία.  $b_{k_{k_n}} \rightarrow b \in \mathbb{R}$ .

Αφού  $a_{k_n} \rightarrow a$  και η  $(a_{k_{k_n}})$  είναι υποακολουθία της  $(a_{k_n})$  έχουμε:  $a_{k_{k_n}} \rightarrow a$ .

• Θεωρούμε την  $(\gamma_{k_{k_n}})$ . Είναι φραγμένη (από  $M$ )  $\Rightarrow$

$$\exists \chi_{\epsilon\lambda\mu\eta} \rightarrow \gamma \in \mathbb{R}.$$

Από  $a_{\epsilon\lambda\mu\eta} \rightarrow a \Rightarrow a_{\epsilon\lambda\mu\eta} \rightarrow a$  και από  $b_{\epsilon\lambda\mu\eta} \rightarrow b \Rightarrow b_{\epsilon\lambda\mu\eta} \rightarrow b$ .

$$\begin{aligned} \text{Έτσι: } \| (a_{\epsilon\lambda\mu\eta}, b_{\epsilon\lambda\mu\eta}, \chi_{\epsilon\lambda\mu\eta}) - (a, b, \gamma) \|_2 &= \\ &= \sqrt{(a_{\epsilon\lambda\mu\eta} - a)^2 + (b_{\epsilon\lambda\mu\eta} - b)^2 + (\chi_{\epsilon\lambda\mu\eta} - \gamma)^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\text{δηλ. } \chi_{\epsilon\lambda\mu\eta} = (a_{\epsilon\lambda\mu\eta}, b_{\epsilon\lambda\mu\eta}, \chi_{\epsilon\lambda\mu\eta}) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \chi = (a, b, \gamma).$$

(3). Ορισμός συνεχούς συνάρτησης.

Στο  $\mathbb{R}$ : Η  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνεχής στο  $x_0 \in A$  αν:

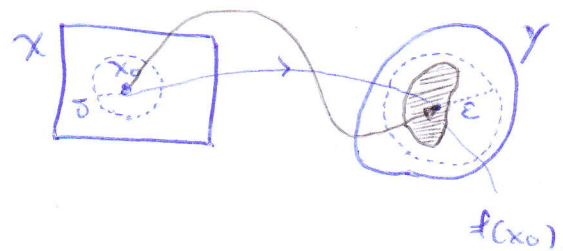
"  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$  ώστε αν:  $x \in A$  και  $|x - x_0| < \delta$  τότε  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  "

Ορισμός: Έστω  $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$ . Η  $f$  λέγεται συνεχής στο  $x_0$  αν για κάθε  $\epsilon > 0$  υπάρχει  $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$  ώστε:

" αν  $x \in X$  και  $d(x, x_0) < \delta$  τότε  $\sigma(f(x), f(x_0)) < \epsilon$  "

Η  $f$  λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε  $x_0 \in X$ .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (i) Κάθε  $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$  είναι συνεχής.



Έστω  $x_0 \in X$ . Θα δείξουμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Έστω  $\epsilon > 0$ . Ζητάμε  $\eta = \eta(\epsilon, x_0) > 0$  ώστε:

" αν  $d(x, x_0) < \eta$  τότε  $\sigma(f(x), f(x_0)) < \epsilon$  "

Παίρνουμε  $\eta = \frac{1}{2}$ . Τότε, αν  $d(x, x_0) < \frac{1}{2} \Rightarrow x = x_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) \Rightarrow \sigma(f(x), f(x_0)) = 0 < \epsilon.$$

(ii) Γιαθε  $f: (\mathbb{N}, 1,1) \rightarrow (\gamma, \sigma)$  είναι συνεχής.

Έστω  $m \in \mathbb{N}$  και έστω  $\varepsilon > 0$ . Παιρνουμε

$$\delta = \frac{1}{2}. \text{ Τότε, αν } n \in \mathbb{N} \text{ και } |n-m| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow n=m \Rightarrow f(n)=f(m) \Rightarrow \sigma(f(n), f(m))=0 < \varepsilon$$

ΠΑΡΑΣΗΡΗΣΗ: Αν  $n, m \in \mathbb{N}$   
και  $|n-m| < \frac{1}{2}$  τότε  
 $n=m$

(iii) Έστω  $C_{00} = \{x = (x_n) : n (x_n) \text{ είναι τελικά μηδενική}\}$

$(x_n) = \text{τελικά μηδενικά αν } \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad x_n = 0$

Στον  $C_{00}$  μπορού να ορίσω τις p-νόρμες.

$$\|x\|_{\infty} = \sup \{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum |x_n|^2}$$

Η  $I: (C_{00}, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (C_{00}, \|\cdot\|_2)$  με  $I(x) = x$  δεν είναι συνεχής στο 0.

Ορίζουμε  $x_n = (\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n}, 0, 0, \dots) \in C_{00}$ .

ΠΑΡΑΣΗΡΗΣΗ:  $\|x_n\|_{\infty} \xrightarrow{n} 0$ . Αν η  $I$  ήταν συνεχής, θα

είχαμε  $I(x_n) = x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} I(0) = 0$ .  
(αρχή της μεταφοράς ατομικότητας).

δηλ.  $\|x_n - 0\|_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n\|_2 \rightarrow 0$ .

Άτοπο

$$\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + 0 + 0 + \dots} = 1$$

### Αρχή της μεταφοράς

Έστω  $f: (X, d) \rightarrow (Y, \sigma)$  και έστω  $x_0 \in X$ .

Τα εξής είναι ισοδύναμα: (α). Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

(β). Για κάθε  $(x_n)$  στο  $X$ ,

με  $x_n \xrightarrow{d} x_0$  ισχύει  $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$ .

(γ). Για κάθε  $(z_n)$  στο  $X$ , με  $z_n \xrightarrow{d} x_0$  η  $(f(z_n))$  συγκλίνει.

Απόδειξη: (α)  $\Rightarrow$  (β). Έστω  $(x_n)$  στο  $X$  και έστω ότι

$$x_n \xrightarrow{d} x_0 \quad \text{Θα δείξουμε ότι } f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0).$$

Θεωρούμε ε>0 και τυχαία  $n_0 \in \mathbb{N}$ :  $\forall n \geq n_0 \quad \sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ .

Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , ορα υπάρχει  $\delta > 0$ : αν  $d(x, x_0) < \delta$  τότε  $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  (\*).

Αφού  $x_n \rightarrow x_0$ , υπάρχει  $n_0 \in \mathbb{N}$ :  $\forall n \geq n_0 \quad \overbrace{d(x_n, x_0) < \delta}^{d(x_n, x_0) < \delta, \text{ άρα από την (*)}}$ , οπότε  $\sigma(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ .

(β)  $\Rightarrow$  (α). Έστω ότι η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Τότε υπάρχει ε>0:  $\forall \delta > 0$ , υπάρχει  $x_\delta$  με  $d(x_\delta, x_0) < \delta$

αλλά  $\sigma(f(x_\delta), f(x_0)) \geq \varepsilon$ . (ω), βρίσκουμε  $x_n \xrightarrow{d} x_0$  με  $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$  και  $\sigma(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ .

Εφαρμόζοντας αυτό για  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

$\Downarrow$

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \xRightarrow{\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}} \quad f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0) \Rightarrow \sigma(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0.$$

Αυτό διότι  $\sigma(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ .

Η συνεπαγωγή (β)  $\Rightarrow$  (γ) είναι προφανής.

Αν  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$  τότε η  $(f(x_n))$  συχθίζει.

(γ)  $\Rightarrow$  (β). Έστω  $(x_n)$  στο  $X$ , με  $x_n \xrightarrow{d} x_0$

Ορίζουμε:  $z_n = (x_1, x_0, x_2, x_0, x_3, x_0, x_4, x_0, \dots)$ ,

$$\text{δηλ. } z_n = \begin{cases} x_k, & n = 2k-1 \\ x_0, & n = 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Τότε: } z_{2k-1} = x_k \rightarrow x_0 \\ z_{2k} = x_0 \rightarrow x_0 \end{cases} \Rightarrow z_n \rightarrow x_0.$$

Από την υπόθεση (γ), υπάρχει  $u \in Y$

$$\left. \begin{array}{l} f(z_n) \xrightarrow{\sigma} u \\ f(z_{2k-1}) \xrightarrow{\sigma} u \end{array} \right\} \text{ και } f(z_{2k}) \xrightarrow{\sigma} u$$

" " " "

$$\left. \begin{array}{l} f(x_k) \\ \text{Άρα } f(x_k) \rightarrow u = f(x_0). \end{array} \right\} \quad f(x_0) \Rightarrow u = f(x_0).$$

### ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ :

$$(I) . (x, d) \xrightarrow{f} (y, \sigma) \xrightarrow{g} (z, \tau) .$$

Αν η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 \in X$ , και η  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0) \in Y$ , τότε η  $g \circ f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

Ειδικότερα, αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς τότε η  $g \circ f$  είναι συνεχής.

Απόδειξη: Έστω  $x_n \rightarrow x_0 \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n) \rightarrow f(x_0) \xRightarrow{(ΕΥ.)}$

$\xRightarrow{g \text{ συνεχής}} g(f(x_n)) \rightarrow g(f(x_0))$  δηλ.  $(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(x_0)$ .

$\xRightarrow{(\text{Λήψη της μεταφοράς})} g \circ f \text{ συνεχής στο } x_0$ .

(II) . Αν  $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  τότε μπορούμε να ορίσουμε ως  $f+g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lambda f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\left( \begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda \cdot f(x) \end{aligned} \right) .$$

Επιτρέπεται για  $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$

Αν οι  $f$  και  $g$  είναι συνεχείς στο  $x_0 \in X$ , τότε οι  $f+g, f \cdot g, \lambda f$  είναι συνεχείς στο  $x_0$  (όπως στο (I)).

Ειδικότερα, ο  $C(X) = \{ f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής} \}$  χώρος των συνεχών συναρτήσεων  $f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι διανυσματικός χώρος.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΣΟΠΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ.

(α) . Υπέρσφαιρες (ανοιχτές-κλειστές) και σφαίρες.

Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος, έστω  $x_0 \in X$  και  $\varepsilon > 0$ .

\* Ανοιχτή μπάλα με κέντρο  $x_0$  και ακτίνα  $\varepsilon$  :

$$B(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon \}$$

\* Κλειστή σφαίρα με κέντρο  $x_0$  και ακτίνα  $\varepsilon$

$$\hat{B}(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon \}$$

\* Σφαίρα :  $S(x_0, \varepsilon) = \{ x \in X : d(x, x_0) = \varepsilon \}$

Παραδείγματα:

$$(i) \text{ Στο } \mathbb{R} : B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} \\ \hat{B}(x_0, \varepsilon) = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \\ S(x_0, \varepsilon) = \{x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\}$$



$$(ii) \text{ Στο } \mathbb{R}^2, \text{ Αν πάρω την } \|\cdot\|_2, \\ \text{τότε η } B((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (0,0)\|_2 < 1\} \\ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

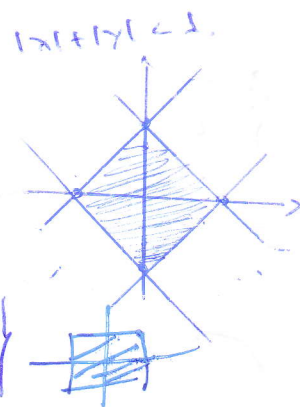


Αν πάρω την  $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ , τότε

$$B_1((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$

• Αν πάρω την  $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$

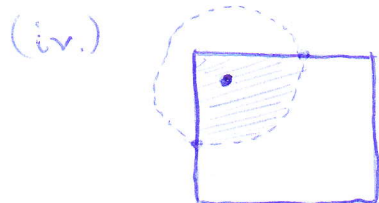
$$\text{τότε } B_\infty((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \text{ και } |y| < 1\}$$



(iii) Θεωρούμε τον μετρικό χώρο  $([0,2], | \cdot |)$ .

$$B\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left\{x \in [0,2] : \left|x - \frac{1}{2}\right| < 1\right\} = \left[0, \frac{3}{2}\right).$$

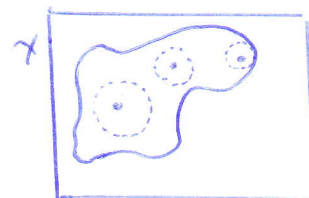
$0 \leq x \leq 2 \qquad -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$



ΟΡΙΣΜΟΣ: (Εσωτερικό σημείο). Έστω ~~χωρ~~  $A \subseteq (X, d)$ .

Ένα σημείο  $x \in A$  λέγεται εσωτερικό σημείο του  $A$ , αν υπάρχει  $\varepsilon_x > 0 : B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ .

ΟΡΙΣΜΟΣ: (Ανοιχτό σύνολο). Ένα  $A \subseteq (X, d)$  λέγεται ανοιχτό αν κάθε  $x \in A$  είναι εσωτερικό σημείο του  $A$ . Δηλ. αν για κάθε  $x \in A$  υπάρχει  $\varepsilon_x > 0$  ώστε  $B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$ .



ΠΡΟΤΑΣΗ (Βασικές ιδιότητες της οικογένειας των ανοικτών υποσυνόλων)  
 Έστω  $(X, d)$  μετρικός χώρος. ένος μετρικού χώρου

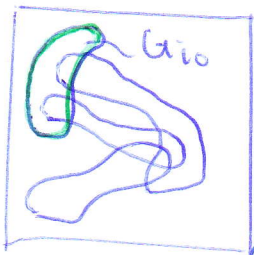
(α). Το  $\emptyset$  και το  $X$  είναι ανοικτά σύνολα.

(β) Αν  $G_1, \dots, G_n$  ανοικτά υποσύνολα του  $(X, d)$  τότε  
 το  $G_1 \cap \dots \cap G_n$  είναι ανοικτό σύνολο.

(γ). Αν  $(G_i)_{i \in I}$  είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων, τότε το  
 $\bigcup_{i \in I} G_i$  είναι ανοικτό σύνολο.

Σημείωση: Το (β) δεν ισχύει αναγκαστικά, αν έχουμε άπειρα  
 το πλήθος ανοικτά σύνολα.

Απόδειξη: (γ). Έστω  $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$ . Υπάρχει  $i_0 \in I : x \in G_{i_0}$ .



Από το  $G_{i_0}$  είναι ανοικτό, υπάρχει  $\varepsilon > 0$  :

$$B(x, \varepsilon) \subseteq G_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i.$$

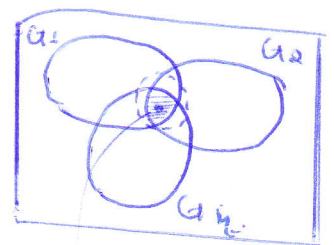
Έστω  $x \in G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$ .

$$\text{Τότε: } x \in G_1 \xRightarrow{G_1 \text{ αν.}} \exists \varepsilon_1 > 0 : B(x, \varepsilon_1) \subseteq G_1.$$

$$x \in G_2 \Rightarrow \exists \varepsilon_2 > 0 : B(x, \varepsilon_2) \subseteq G_2.$$

$\vdots$

$$x \in G_n \Rightarrow \exists \varepsilon_n > 0 : B(x, \varepsilon_n) \subseteq G_n.$$



$G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n$

Ορίζουμε  $\varepsilon = \min \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \} > 0$ .

Τότε για κάθε  $i = 1, \dots, n$ ,  $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x, \varepsilon_i) \subseteq G_i$

$\uparrow$   
 $\varepsilon \leq \varepsilon_i$

$$\Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n.$$

Παράδειγμα: Στο  $\mathbb{R}$  παίρνω  $G_n = \left( -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

• Κάθε  $G_n$  είναι ανοικτό.

•  $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \left\{ x \in \mathbb{R} : \forall n \quad -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \right\} = \{0\}$ , το οποίο δεν είναι  
 ανοικτό.

$x = \text{ανοιχτό}$ : Έστω  $X$ . Έχουμε  $B(x, r) \subseteq X$ . άρα ο χώρος  
άρα το  $X$  είναι εσωτερικό σημείο του  $X$ .

$\emptyset = \text{ανοιχτό}$ : Αν δεν ήταν, θα υπήρχε  $x \in \emptyset$  το οποίο δεν θα ήταν  
εσωτερικό σημείο του  $\emptyset$ . Τέτοιο  $x$  δεν υπάρχει, αφού  
το  $\emptyset$  δεν έχει στοιχεία (εξοικονομία)