

2. Έστω $(x_n), (y_n)$ βασικές ακολουθίες στον (X, d) .

Δείξτε ότι η $a_n = d(x_n, y_n)$ είναι βασική στον $\mathbb{R}$.

$$|a_n - a_m| = |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq \underbrace{d(x_n, x_m)}_{\text{απουσία αμετάβλητης απόστασης}} + d(y_n, y_m) \quad (*)$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι βασική $\Rightarrow$

$$\exists n_1 : \forall n, m \geq n_1, d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

$$\text{Η } (y_n) \text{ είναι βασική : } \exists n_2 : \forall n, m \geq n_2, d(y_n, y_m) < \varepsilon/2.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Αν $n, m \geq n_0$, τότε :

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon/2, d(y_n, y_m) < \varepsilon/2 \text{ και από την } (*). \text{ Έχουμε :}$$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \blacksquare$$

3. Έστω (x_n) στον (X, d) . Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε :

$$E_N = \{x_k : k \geq N\} = \{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\}.$$

Δείξτε ότι : η (x_n) είναι βασική $\Leftrightarrow \text{diam}(E_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

($\Rightarrow$). Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $N_0 \in \mathbb{N} : \forall N \geq N_0 : 0 \leq \text{diam}(E_N) < \varepsilon$.

Από το ότι (x_n) είναι βασική, υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N} :$

$$\forall s, k \geq N_0 : d(x_s, x_k) < \varepsilon/4.$$

Έστω $N \geq N_0$. Τότε : $\forall k, s \geq N$ ισχύει $k, s \geq N_0$

$$\Rightarrow d(x_k, x_s) < \varepsilon/4. \text{ Άρα, } \text{diam}(E_N) = \sup\{d(x_k, x_s) : k, s \geq N\} \leq \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$). Έστω $\varepsilon > 0$. Από $\text{diam}(E_N) \rightarrow 0$ υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N} :$

$\forall N \geq N_0$ $\text{diam}(E_N) < \varepsilon$. Έστω $k, s \geq N_0$. Τότε $x_k, x_s \in E_{N_0}$.

$$\Rightarrow d(x_k, x_s) \leq \text{diam}(E_{N_0}) < \varepsilon. \blacksquare$$

4. Έστω (x_n) ακολουθία στον (X, d) και έστω $x \in X$.

(i). Αν $x_n \rightarrow x$ τότε κάθε υποακολουθία $x_{k_n} \rightarrow x$ (έχει γίνει στο 3ο μάθημα)

(ii). Αν $x_{2k} \rightarrow x$ και $x_{2k-1} \rightarrow x$, τότε $x_n \rightarrow x$. (ισχύει!)

(iii). Αν κάθε υποακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) έχει περαιτέρω υποακολουθία $x_{k_{k_n}} \rightarrow x$, τότε $x_n \rightarrow x$.

Απόδειξη του (iii): Απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $x_n \not\rightarrow x$.

Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$, ώστε: "για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n' \geq N$, ώστε $d(x_{n'}, x) \geq \varepsilon$ ".

$\Leftrightarrow$ υπάρχουν άπειροι δείκτες n' , ώστε $d(x_{n'}, x) \geq \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \exists k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ ώστε $\forall n, d(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$.

Από την υπόθεση, υπάρχει υποακολουθία (x_{k_n}) της (x_{k_n}) ώστε

$x_{k_n} \rightarrow x \Rightarrow d(x_{k_n}, x) \rightarrow 0$. Όμως: $d(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon > 0$.

γιατί κάθε x_{k_n} είναι όρος της (x_{k_n}) . Άτοπο. ■

10. Έστω (x_n) ακολουθία στον (X, d) . Δείξτε ότι $x_n \xrightarrow{d} x$ ισοδυναμεί με

$\Leftrightarrow$ η ακολουθία $(y_n) = (x_1, x, x_2, x, x_3, x, \dots)$ συχθίνει.

($\Rightarrow$). Έχουμε ότι $x_n \rightarrow x$. Παρατηρούμε ότι:

$$y_{2k} = x \rightarrow x.$$

$$y_{2k-1} = x_k \rightarrow x$$

$$y_k = \begin{cases} x, & k=2k \\ x_k, & k=2k-1 \end{cases}$$

Από τις υποακολουθίες των όρων και των περιπτώσεων όπου συχθίνουν στο x , έχουμε $y_n \rightarrow x$ (από άσκηση).

($\Leftarrow$). Ξέρουμε ότι υπάρχει $z \in X$, ώστε $y_n \rightarrow z$.

Ξέρουμε ότι κάθε υποακολουθία της (y_n) συχθίνει στο z .

Ειδικότερα, $y_{2k} \rightarrow z \Rightarrow$ η σταθερή $y_{2k} = x \rightarrow z \Rightarrow \underbrace{z = x}_{(*)}$.

$$y_{2k-1} \rightarrow z \stackrel{(*)}{\Rightarrow} y_{2k-1} \rightarrow x \rightarrow x_k \rightarrow x. \quad \blacksquare$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1).

ΥΠΕΥΘΥΝΟΝ: Αν $1 \leq p < \infty$, τότε $\ell_p = \left\{ x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$

$1 \neq$ (α) Αν $1 \leq p < q < \infty$ τότε:

$\ell_p \subseteq \ell_q$ και ο εχθισμός είναι γνήσιος.

ΝΑΙ: Έστω $x = (x_n) \in \ell_p$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

Τότε: $|x_n|^p \rightarrow 0 \Rightarrow |x_n| \rightarrow 0 \Rightarrow (x_n)$ φραγμένη

$\Rightarrow \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$.

Έχουμε $0 \leq |x_n|^q = |x_n|^p \cdot |x_n|^{q-p} \leq M^{q-p} \cdot |x_n|^p$ ~~δύο~~ $|x_n|^{q-p} \leq M^{q-p}$.

Από $\sum M^{q-p} \cdot |x_n|^p < \infty$, από κριτήριο συγκρίσιμης, $\sum |x_n|^p < \infty$.

Παράδειγμα: Θέσω $(x_n) \in \ell_q \setminus \ell_p$. Ορίζουμε: $x_n = \frac{1}{n^{1/p}}$.

Τότε: $\sum |x_n|^p = \sum \frac{1}{(n^{1/p})^p} = \sum \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow (x_n) \notin \ell_p$.

$\sum |x_n|^q = \sum \frac{1}{n^{q/p}} < \infty$ ($\sum \frac{1}{n^a}$, με $a = \frac{q}{p} > 1$).

(β): Αν $1 \leq p < \infty$ τότε $\ell_p \subseteq C_0$.

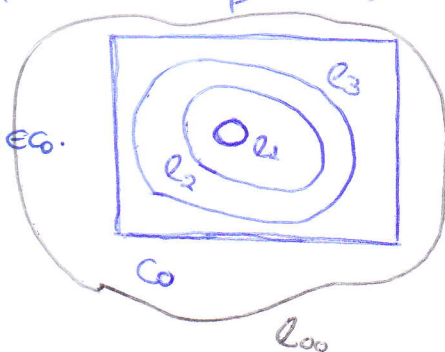
Αν $x = (x_n) \in \ell_p$ τότε $\sum |x_n|^p < \infty \Rightarrow |x_n|^p \rightarrow 0 \Rightarrow |x_n| \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0 \Rightarrow x \in C_0$.

(γ): Δείξτε ότι υπάρχει $x = (x_n) \in C_0$ που

δεν ανήκει σε κανέναν ℓ_p , $1 \leq p < \infty$.

Αρα, $\bigcup_{1 \leq p < \infty} \ell_p \subsetneq C_0$.

(δ): Δείξτε ότι υπάρχει $x = (x_n) \notin \ell_1$ με την ιδιότητα $(x_n) \in \ell_p$ για κάθε $1 < p < \infty$.



(γ): Ορίζουμε: $x_n = \frac{1}{\log(n+1)} \rightarrow 0$, όταν $n \rightarrow \infty$, άρα

$(x_n) \in C_0$. Για κάθε $p \geq 1$, ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log(n+1))^p} = \infty$

$\Rightarrow \forall p \geq 1, (x_n) \notin \ell_p$.

Ποίρω $a = 1/p$. Ξερούμε ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x+1)}{x^{1/p}} = 0 \Rightarrow$ για μεγάλα x

$$\log(x+1) < x^{1/p} \Rightarrow \exists n_0 \forall n \geq n_0 \log(n+1) < n^{1/p} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(\log(n+1))^p} > \frac{1}{n}$$

(α) Αν $x_n = \frac{1}{n}$ τότε $x = (x_n) \notin \ell_1$ διότι $\sum \frac{1}{n} = \infty$. Όμως, $\forall p > 1 \sum (x_n)^p = \sum \frac{1}{n^p} < \infty$, άρα $x \in \ell_p$.

4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

$$\text{ορίζουμε } p_1(x, y) = \min \{ d(x, y), 1 \}$$

$$p_2(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

$$\forall 0 < \alpha < 1, p_\alpha(x, y) = [d(x, y)]^\alpha$$

Δείξτε ότι p_1, p_2, p_α είναι μετρικές.

• Τριγωνική ανισότητα για την p_2 . Ζητάμε

$$\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)}$$

Η συνάρτηση $u \mapsto \frac{u}{1+u}$ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

$$\left(\left(\frac{u}{1+u} \right)' = \frac{1}{(1+u)^2} > 0 \right) \text{ Έχουμε: } \underbrace{d(x, y)}_{u_1} \leq \underbrace{d(x, z) + d(z, y)}_{u_2}$$

$$\Rightarrow \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z) + d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(z, y)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(x, z) + d(z, y)}$$

$$\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(z, y)}{1 + d(z, y)}$$

9. (α) Έστω $f: [0, \infty) \rightarrow [0, +\infty)$ αύξουσα, με $f(0) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f είναι υποπροσθετική: $\forall x, y \geq 0$ ισχύει $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Δείξτε ότι αν d είναι μια μετρική στο X , τότε η $f \circ d$ είναι επίσης μετρική.

→

(i) $(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) \geq 0$ γιατί $f \geq 0$ και αν

$$f(d(x, y)) = 0 \xRightarrow{\text{γινωσ.}} d(x, y) = 0 \xRightarrow{\text{d μετρ.}} x = y.$$

Επίσης $f(d(x, x)) = f(0) = 0$.

(ii) $f(d(y, x)) = f(d(x, y))$ για κάθε $x, y \in X$.

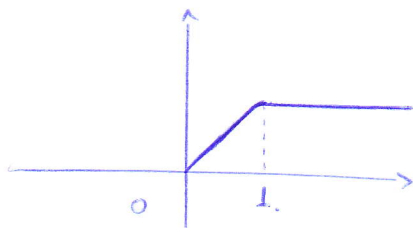
 d μετρήσιμη.

(iii) Έστω $x, y, z \in X$. Τότε $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

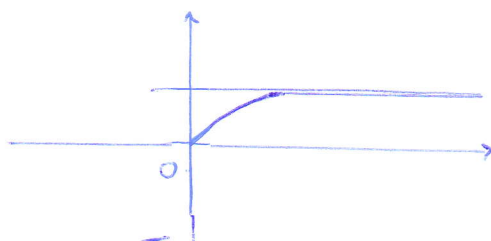
$$\xRightarrow{f \uparrow} f(d(x, y)) \leq f(d(x, z) + d(z, y)) \leq f(d(x, z)) + f(d(z, y)) \quad f \text{ υποστροφ.}$$

Στα παραδείγματα της (4).

(i) $P_1: f(x) = \min\{x, 1\}$

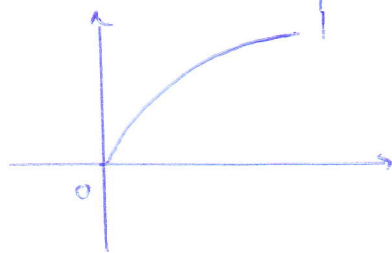


ii) $P_2: f(x) = \frac{x}{1+x}$



$$f'(x) = -\frac{2}{(1+x)^3} < 0.$$

iii) $P_3: f(x) = x^a$



$$f''(x) = a(a-1)x^{a-2} < 0.$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις είναι κοίτες.

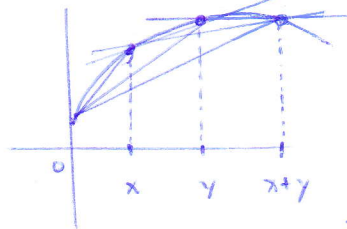
(B) Έστω $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

(i) Αν η f είναι κοίτη, τότε η f είναι υποπροσθετική.

(ii) Αν η f είναι κοίτη, τότε η $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ είναι φθίνουσα.

(iii) Αν η $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ είναι φθίνουσα τότε η f είναι ~~κοίτη~~ υποπροσθετική.

(i)



Έστω $y \geq x > 0$. Τότε $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

$$0 < x < x+y \quad / \quad x = \frac{x}{x+y}(x+y) + \left(1 - \frac{x}{x+y}\right) \cdot 0.$$

$$\xRightarrow{f \text{ κοίτη}} f(x) \geq \frac{x}{x+y} f(x+y) + \left(1 - \frac{x}{x+y}\right) f(0) \geq \frac{x}{x+y} f(x+y) \quad \text{από υποπρόθεσή}$$

$$0 < y < x+y : \quad | \quad y = \frac{y}{x+y}(x+y) + \left(1 - \frac{y}{x+y}\right) \cdot 0.$$

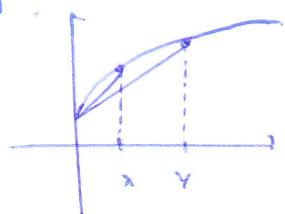
$$\Rightarrow_{\text{fωοη}} f(y) \geq \frac{y}{x+y} f(x+y) + \left(1 - \frac{y}{x+y}\right) f(0) \geq \frac{y}{x+y} f(x+y).$$

Προσθέσουμε κατά μέλη έχουμε :

$$f(x) + f(y) \geq \frac{x}{x+y} f(x+y) + \frac{y}{x+y} f(x+y) = f(x+y).$$

$$\text{δίδει: } \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1.$$

(ii) Έστω $0 < x < y$ (λημμα του 3 πορταδο).



$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq \frac{f(y) - f(0)}{y} \quad \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(y)}{y} + \underbrace{f(0)}_{(0)} \underbrace{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}_{(>0)} \geq \frac{f(y)}{y}.$$

$$\begin{aligned} \text{(iii). } x < x+y &\Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(x+y)}{x+y} \\ y < x+y &\Rightarrow \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x+y)}{x+y} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{f(x)}{x} \downarrow \\ \frac{f(y)}{y} \downarrow \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} f(x) &\geq \frac{x}{x+y} f(x+y) \\ f(y) &\geq \frac{y}{x+y} f(x+y) \end{aligned}$$

και προσθέτουμε κατά μέλη. ■

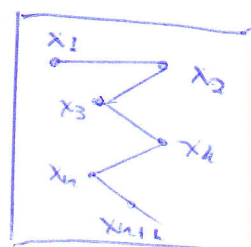
ΟΡΙΣΜΟΣ: λέμε ότι μια ακολουθία (x_n)

στον (X, d) έχει φραγμένη κώμανση : αν $\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$.

ΛΗΜΜΑ 13. (α) Αν η (x_n) έχει φραγμένη κώμανση, τότε είναι βασική.

(β) Αν η (x_n) είναι βασική, τότε έχει υποακολουθία με φραγμένη κώμανση.

(α). μας ενδιαφέρει η απόσταση $d(x_n, x_m)$ όπου $n, x, n < m$.



1. Γράφουμε: $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m)$.

2. Έστω $\varepsilon > 0$. Αν θέσουμε $S_n = d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$.

τότε $S_n \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$.

Αρα η (S_n) είναι βασική στο $\mathbb{R}$. Αρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

Αν $m, n \geq n_0$ τότε: $d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) = S_m - S_n < \varepsilon$.

Αρα για κάθε $m, n \geq n_0$.

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) < \varepsilon.$$

$$|S_m - S_n|.$$

Παρόμοια άσκηση

$\sim$ Απ. II $\sim$

Αν $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n^2}$
τότε η (a_n)
συγκλίνει

$$\sum |a_{n+1} - a_n| < \infty$$

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

$\hookrightarrow (a_n)$ βασική

(β) Θα διαλέξουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$

$$\text{ετσι ώστε: } d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}.$$

Τότε, η (x_{k_n}) είναι υποσυνολοειδής της (x_n) .

$$\text{και } \sum d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) \leq \sum \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Αρα, η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κόμηση.

Αφού η (x_n) είναι βασική, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, βρίσκουμε:

$$k_1 \in \mathbb{N} : \forall s, m \geq k_1, d(x_s, x_m) < \frac{1}{2}.$$

Ομοίως, για $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ υπάρχει $k_2' \in \mathbb{N} : \forall s, m \geq k_2', d(x_s, x_m) < \frac{1}{2^2}$.

(*) Μπορούμε να "υποθέσουμε" ότι $k_2 > k_1$.

(**).

Έστω ότι $k_2' \leq k_1$. Ορίζουμε $k_2 = k_1 + 1$.



Τότε σίγουρα $k_2 > k_1$ και αν $s, m \geq k_2$ τότε

$$s, m \geq k_2' \quad (\text{διότι } k_2 = k_1 + 1 > k_1 \geq k_2') \Rightarrow d(x_s, x_m) < \frac{1}{2^2}.$$

Επομένως, ορίζουμε $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ ώστε

$\forall s, m \geq k_n$ ισχύει $d(x_s, x_m) < \frac{1}{2^n}$. Για αυτούς τους φυσικούς

k_n θα δείξουμε ότι $\forall n, d(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$.

Also immer $\delta_k = k_n \geq k_n$ und $m = k_{n+1} > k_n$. $\square$

11. Έστω (X_n) οικογένεια στον $(X, \mathcal{F})$, $x \in X$ και έστω ότι $X_n \rightarrow x$. Έστω $\sigma: \mathbb{N} \xrightarrow{\text{επ.}} \mathbb{N}$ ("μετάθεση" των φυσικών).

Ορίσουμε $y_n = x_{\sigma(n)}$. Δείξτε ότι $y_n \rightarrow x$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad d(y_n, x) < \varepsilon$.

"
"
 $x_0(n)$.

Αφού $y(x_n)$ συγκλίνει στο x , υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

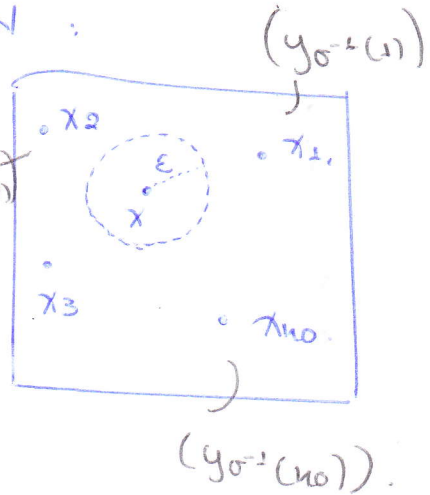
$$\forall k > n_0 \quad d(x_k, x) < \varepsilon.$$

OpitjoupE: $N = \max \{ \sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(n_0) \} + 1.$

Εστω $n \geq N$ τότε : $\sigma(n) \notin \{1, \dots, n_0\}$

γιατί αλλιώς θα υπήρχε $k \leq n_0 : \sigma(n) = k$.

$$\Rightarrow \eta = \sigma^{-1}(k) \Rightarrow \eta \in \mathbb{N}$$



Αρα $\sigma(n) > n_0 \Rightarrow d(\pi \sigma(n), x) < \varepsilon \Rightarrow d(y_n, x) < \varepsilon$. $\square$