

Ακολουθίες σε μετρικούς χώρους

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a_n := a(n).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ακολουθία στον (X, d) .
 Δεχόμαστε συνάρτηση $x: \mathbb{N} \rightarrow X$

Ορίζουμε: $x_n = x(n)$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{ο n-οστος όρος της} \\ (x_n), \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \\ x = (x_1, x_2, \dots) \end{array} \right)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια ακολουθία (x_n) στον μετρικό χώρο (X, d) συχρύνει στο $x \in X$ αν:

* || "για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε για
 κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x) < \varepsilon$ "

Αν $B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$ είναι η ανοικτή μπάλα
 με κέντρο x και ακτίνα ε , η (*) γράφεται και ως

εξής: " $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, x_n \in B(x, \varepsilon)$ "

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. $x_n \xrightarrow{d} x \iff d(x_n, x) \rightarrow 0$.

Απόδειξη: $x_n \rightarrow x : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : d(x_n, x) < \varepsilon$.

$a_n = d(x_n, x) \rightarrow 0 : \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| < \varepsilon$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (μοναδικότητα ορίου):

Αν $x_n \xrightarrow{d} x, x_n \xrightarrow{d} y$, τότε $x = y$.

Απόδειξη: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε: $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \rightarrow 0$.

$$\left(\begin{array}{l} d(x, y) = 0 \\ \Rightarrow x = y \end{array} \right) \begin{array}{l} \downarrow \text{π.1.} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \text{π.1.} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} |d(x_n, x)| &= \\ &= d(x_n, x). \end{aligned}$$

-19-

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 : Αν $x_n \rightarrow x$ ή $y_n \rightarrow y$, τότε

$$d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y).$$

Απόδειξη: $|d(x, y) - d(x_n, y_n)| \leq \underbrace{d(x, x_n)}_{\text{απώστερα 4 σημείων}} + \underbrace{d(y, y_n)}_{\text{απώστερα 4 σημείων}} \rightarrow 0 + 0 = 0.$
π.λ.

ΟΡΙΣΜΟΣ : (Φραγμένη ακολουθία) : Μια ακολουθία (x_n) σε έναν μετρικό χώρο (X, d) λέγεται φραγμένη, αν το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ των όρων της (x_n) είναι φραγμένο υποσύνολο του X .

Ισχύουσα, (ΑΣΚΗΣΗ 7.7) αν υπάρχουν $x_0 \in X$ και $R > 0$:
 $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x_0, R)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4 Αν $x_n \rightarrow x$, τότε η (x_n) είναι φραγμένη.

Απόδειξη: Για $\varepsilon = 1$, ξέρουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n \in B(x, 1). \quad (\Leftrightarrow d(x_n, x) < 1).$$

ορίσουμε $R = \max \{d(x_1, x), \dots, d(x_{n_0}, x), 1\} + 1/5$.

Τότε $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x, R)$.

Βασικές ακολουθίες

ΟΡΙΣΜΟΣ : (βασική ακολουθία) : Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Μια ακολουθία (x_n) στο X λέγεται βασική (ή Cauchy) αν:

"για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ ".

ΠΡΟΤΑΣΗ 5 Αν $x_n \rightarrow x$, τότε η (x_n) είναι βασική.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Για τον $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:
 $\forall n \geq n_0 \quad d(x_n, x) < \varepsilon/2$ } $x_n \rightarrow x$.

-20-

Έστω $n, m \geq n_0$. Αφού $n \geq n_0$ έχουμε $d(x_n, x) < \varepsilon/2$, και
αφού $m \geq n_0$ έχουμε $d(x_m, x) < \varepsilon/2$.

$$\text{Τότε } d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6 : Αν η (x_n) είναι βασική, τότε είναι
φροχμεύνη.

Απόδειξη: Πάμε να πάρουμε $\varepsilon = 1$. Αφού η (x_n) είναι βασική
υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) < 1$.

Εδικοτέρα σταθεροποιώντας $m = n_0 \geq n_0$ έχουμε :

$$\forall n \geq n_0 : d(x_n, x_{n_0}) < 1.$$

$$\text{Ορίζουμε } R = \max \{ d(x_1, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1 \} + 1/6.$$

$$\text{Τότε } \forall n \in \mathbb{N}, x_n \in B(x_{n_0}, R).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ (υποακολουθία) : Έστω (X, d) μετρικός χώρος και
έστω (x_n) ακολουθία στο X .

Αν $k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots$ είναι μια γνησίως αύξουσα
ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε η ακολουθία
 (x_{k_n}) λέγεται υποακολουθία της (x_n) .

$$\text{Παραδείγματα : } (x_{2n}), (x_{2n-1}), (x_{n^2}), (x_{2^n}).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 7 : Αν η (x_n) είναι βασική και έχει
υποακολουθία $x_{k_n} \rightarrow x \in X$, τότε $x_n \rightarrow x$.

Απόδειξη : Έστω $\varepsilon > 0$.

- Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_1 \quad d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2 \quad (x_{k_n} \rightarrow x) \quad (!)$
- Υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geq n_2 \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \quad \left(\begin{smallmatrix} (x_n) \\ \text{βασική} \end{smallmatrix} \right)$

$$\text{Θέτουμε } n_0 = \max \{ n_1, n_2 \}.$$

$$\text{Έστω } n \geq n_0, \quad \curvearrowright \text{ Τότε } n \geq n_1 \Rightarrow d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2$$

$$\quad \curvearrowright \text{ Τότε } k_n \geq n \geq n_2 \Rightarrow d(x_{k_n}, x_n) < \varepsilon/2$$

$$\text{Αρα } d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ει δεν ισχύει σε κάθε μετρικό χώρο.

(A). Κάθε βασική ακολουθία συγχλίνει (οχι γενικά).

(B). Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συχλινούσα υποακολουθία.
(οχι γενικά)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (1) Ο μετρικός χώρος είναι

$$(\mathbb{Q}, d)$$

Εστω α αριθμός στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει ακολουθία ρητών (q_n) ώστε $q_n \rightarrow \alpha$. (ΑΠΕΡΟΣΚΩΣ I)

Αρα $q_n \rightarrow \alpha$, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall n, m \geq n_0 \quad |q_n - q_m| < \varepsilon.$$

(συχλινούσα στο $\mathbb{R}$
↓
ρασική)

Αρα η (q_n) είναι βασική στον $(\mathbb{Q}, d)$.

Εστω ότι υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$: $|q_n - q| \rightarrow 0$.

Τότε, στο $\mathbb{R}$, έχουμε $q_n \rightarrow q$ και $q_n \rightarrow \alpha$.

$\Rightarrow$ $d = \alpha$, άρρητος.
μοναδικότητα ορίου
↓
ρασική
↓
αριθμός

(2). Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με την εξής μετρική:

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|.$$

$$d_1(x, y) = \left| \frac{x}{|x|+1} - \frac{y}{|y|+1} \right|.$$

Ισχυρισμός: Στον $(\mathbb{R}, d)$ υπάρχουν βασικές ακολουθίες που δεν συχλίνουν.

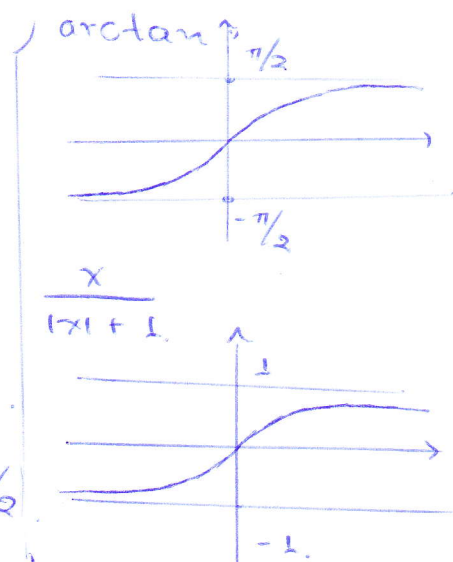
Ορίσουμε $x_n = n$. Η (x_n) είναι βασική ως προς την d . Εστω $\varepsilon > 0$.

Έχουμε $\arctan(n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, όταν $n \rightarrow +\infty$.

ορα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0 \quad |\arctan(n) - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon/2$

Αν $n, m \geq n_0$, τότε:

$$d(x_n, x_m) = |\arctan(x_n) - \arctan(x_m)| \leq |\arctan(x_n) - \frac{\pi}{2}| + |\frac{\pi}{2} - \arctan(x_m)|$$



$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Άρα (x_n) είναι d -βαρύνει.

Η (x_n) δεν συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$, (ως προς d).

Εστω ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}$: $x_n \xrightarrow{d} y$

$$\text{Εότε: } d(x_n, y) = d(x_n, y) = |\arctan(x_n) - \arctan(y)|$$

$\downarrow$
0

δηλαδή $\arctan(x_n) \rightarrow \arctan(y)$.

Άρα, $\arctan y = \pi/2$ ΑΣΟΠΟ. (η $\arctan$ δεν παίρνει την τιμή $\pi/2$)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένας μετρικός χώρος (X, d) στον οποίο "κάθε βαρύνει ακ. συγκλίνει" λέγεται ΠΛΗΡΗΣ.

(3). ΑΛΛΟ ένα παράδειγμα. (όσοι για το σπίτι).

ο χώρος είναι ο $C[-1, 1]$, με μετρική $d(f, g) = \int_{-1}^1 |f(x) - g(x)| dx$.

$f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \\ nx & , -\frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n}. \\ -1 & , -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}. \end{cases}$$

κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση.

• Η (f_n) είναι βαρύνει ως προς $\|\cdot\|_1$.

Εστω $m > n$.

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx.$$

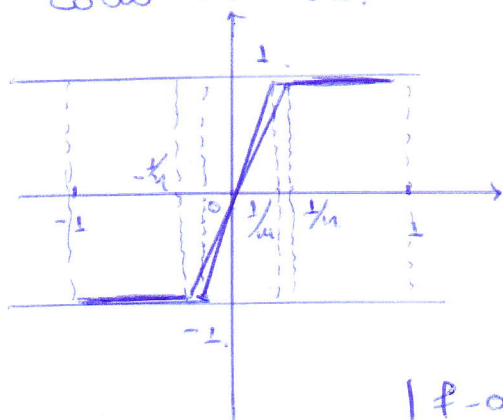
$$= \int_{-1/n}^{1/n} |f_n(x) - f_m(x)| dx.$$

$$\leq \int_{-1/n}^{1/n} 2 dx = 2 \cdot \frac{2}{n} = 4/n < \varepsilon.$$

αν $m > n \geq n_0$ όπου

$$4/n_0 < \varepsilon.$$

$$|f - g| \leq |f| + |g| \leq 2.$$



-23-

Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0.$$

(B). Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συχνηνότητα υποακολουθία (δεν ισχύει τέλεια).

Άσκηση: Δώσω X ένα μη κενό σύνολο και έστω δ η

$$\text{διακριτή μετρική στο } X: \delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

(α). Αν $x_n \xrightarrow{\delta} x$, τότε η (x_n)

είναι τελικά σταθερή.

(β). Αν (x_n) βασική ως προς δ , τότε η (x_n) είναι τελικά σταθερή (και επομένως συχνηνότητα).

Απόδειξη: (α). Παιρνουμε: $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Αφού $x_n \xrightarrow{\delta} x$

$$\text{υπάρχει } n_0: \forall n \geq n_0: x_n \in B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, x_n = x.$$

(β). Παιρνουμε: $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Αφού η (x_n)

είναι δ -βασική, υπάρχει $n_0: \forall n, m \geq n_0: \delta(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$

$$\text{Ειδικότερα, } \forall n \geq n_0, \delta(x_n, x_{n_0}) < \frac{1}{2}$$

$$\forall n \geq n_0, \delta(x_n, x_{n_0}) = 0$$

$$\forall n \geq n_0, x_n = x_{n_0}.$$

Αναπαράδειγμα για το (β).

Θεωρούμε οποιοδήποτε "σύνολο" X με άπειρα στοιχεία, και

του (X, δ) . Επειδή το X είναι άπειρο σύνολο

μπορούμε να ορίσουμε ακολουθία (x_n) στο X , με διαφορετικούς ανά δύο όρους: " $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$ ".

Η (x_n) είναι φραγμένη: $\forall n: x_n \in B(x_1, 1) = X$

Έστω ότι η (x_n) έχει συχνηνότητα υποακολουθία, την (x_{n_k}) .

-24-

Από την άσκηση, η (x_{kn}) είναι εεθικά σταθερή, άτοπο.
 (οι x_{kn} είναι διαφ.)
 από δύο

ΔΕΥΤΕΡΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$O \ell_{\infty} = \{ x = (x_n) : (x_n) \text{ φραχρμένη} \},$$

$$\text{με } \|x - y\|_{\infty} = \sup \{ |x_n - y_n| : n \in \mathbb{N} \}$$

Ορίζουμε :

$$x_1 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$x_2 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$x_3 = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

$$\forall n \neq m$$

$$\|x_n - x_m\|_{\infty} = 1$$

⋮

Η (x_n) είναι φραχρμένη. Έστω ότι έχει συχλίνουσα υποακολουθία, την (x_{k_n}) . Αυτή θα είναι βασική, άρα για μεγάλα n, m : $\|x_{k_n} - x_{k_m}\| < \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Εξίσωση}$$

ΣΠΗΛΕΥΣΗ: Ένας μετρικός χώρος (X, d) στον άτοπο, ο οποίος κάθε ακολουθία έχει συχλίνουσα υποακολουθία, λέγεται : ΣΥΝΤΗΓΗΣ.