(2) Χώροι συναρτήσεων. 9-10-14

$C[a,b] = \{ f : f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{, συνεχής} \}$

- Για $p=\infty$ ορίζουμε $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : a \leq x \leq \beta\}$
- Για $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα στον $C[a,b]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ (Ασκήσεις 10-11, κεφ. 1).

Δείχνουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα.

$p=\infty$ $\quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Υπάρχει $x_0 \in [a,b]$: $\|f+g\|_\infty = |f(x_0) + g(x_0)|$

$\leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

$(|f(x_0)| \leq \|f\|_\infty, \ |g(x_0)| \leq \|g\|_\infty)$.

$p=1$. $\quad \|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)| \, dx \leq$

$\leq \int_a^b (|f(x)| + |g(x)|) \, dx = \int_a^b |f(x)| \, dx + \int_a^b |g(x)| \, dx$

$= \|f\|_1 + \|g\|_1$.

$1 < p < \infty$. Άσκηση 10. Αν $f, g \in C[a,b]$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ τότε $|\langle f, g \rangle| \overset{=}{\scriptstyle \text{ορ.}} \left| \int f(x) g(x) \, dx \right|$

$\leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$

$= \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι : $\|f\|_p > 0$ ή $\|g\|_q > 0$.

Ορίζουμε $F = \dfrac{f}{\|f\|_p}$ και $G = \dfrac{g}{\|g\|_q}$.

Έχουμε : $\dfrac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \displaystyle\int_a^b |f(x)||g(x)|\, dx$

$$= \int_a^b |F(x)||G(x)|\, dx \underset{\text{Young}}{\leq} \int_a^b \left(\frac{1}{p}|F(x)|^p + \frac{1}{q}|G(x)|^q \right) dx$$

$$= \frac{1}{p}\int_a^b |F(x)|^p\, dx + \frac{1}{q}|G(x)|^q\, dx \overset{(*)}{=} \frac{1}{p}\cdot 1 + \frac{1}{q}\cdot 1 = 1.$$

$$\left\{ \int |F|^p = \int \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{1}{\|f\|_p^p}\int |f|^p = 1. \right.$$

και όμοια $\int |G|^q = 1$ $\Big\}$ $(*)$.

Άσκηση 11

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad (\text{Αν. Minkowsky})$$

Απόδειξη : $\|f+g\|_p^p = \displaystyle\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx =$

$$= \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} \cdot |f(x)+g(x)|\, dx.$$

$$\leq \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)|\, dx + \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} |g(x)|\, dx$$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{\cancel{(p-1)}\frac{p}{q}\cdot q} \right)^{1/q} \left[\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p} \right]$$

$$= \|f+g\|_p^{p/q} \left(\|f\|_p + \|g\|_p \right).$$

Άρα : $\|f+g\|_p^{\cancel{p - p/q} = 1} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Οι επόμενες μετρικές:

$$d_p(f,g) = \|f-g\|_p = \left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

$$d_\infty(f,g) = \|f-g\|_\infty = \max\{|f(x)-g(x)| : a \le x \le b\}$$

(3). Χώροι ακολουθιών.

$S = \{x=(x_k) : x_k \in \mathbb{R}\}$: όλες οι ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

$C = \{x=(x_k) : (x_k)$ συγκλίνει$\}$: οι συγκλίνουσες ακολουθίες.

$C_0 = \{x=(x_k) : x_k \to 0\}$: οι μηδενικές ακολουθίες.

$p=\infty$: $\ell_\infty = \{x=(x_k) : (x_k)$ φραγμένη$\}$: οι φραγμένες ακολουθίες.

$1 \le p < \infty$: $\ell_p = \{x=(x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty\}$

$C \subseteq \ell_\infty$, $\ell_p \subseteq C_0$.

Όλοι αυτοί είναι διανυσματικοί χώροι.

~ Οι "φυσιολογικές νόρμες"

- Στους C, C_0, ℓ_∞ ορίζουμε $\|x\|_c$, $\|x\|_{c_0}$, $\|x\|_\infty$
$= \sup\{|x_k| : k=1,2,\dots\}$

- Στον ℓ_p, $1 \le p < \infty$ ορίζουμε $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$

<u>Πρόταση - άσκηση</u>: Η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα.

Απόδειξη: Έχουμε $x=(x_k)$, $y=(y_k)$ με $\sum |x_k|^p < \infty$, $\sum |y_k|^p < \infty$

Θα δείξουμε ότι: $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p}$

(Αυτό δείχνει την τριγωνική ανισότητα και το ότι ο ℓ_p είναι δ. χώρος).

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} |y_k|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p}}_{A} < \infty .$$

$$\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{N} |x_k + y_k|^p \leq A^p .$$

$$\Big\Downarrow \; N \to \infty \quad \text{Απ. II}$$

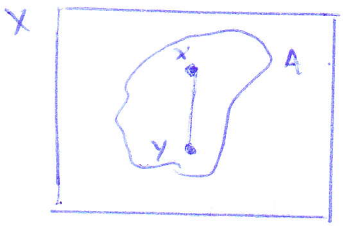
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \leq A^p \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{1/p} \leq A .$$

(c_0, ℓ_∞, ℓ_p

Σχέση μεταξύ τους

Άσκηση 1f)

<u>Σχετική μετρική</u>: Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $\emptyset \neq A \subseteq X$. Ορίζουμε $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$

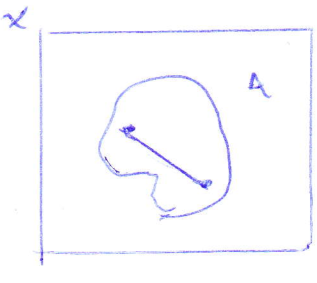


με $d_A(x,y) = d(x,y)$.

Η d_A είναι <u>μετρική</u> (άσκηση). Λέγεται <u>σχετική μετρική</u> (της d) στο A.

$[\, d_A = d|_{A \times A} \,]$

<u>Φραγμένα υποσύνολα - διάμετρος</u>



Ένα $\emptyset \neq A \subseteq X$ λέγεται <u>φραγμένο</u>, αν

$$\sup\{d(x,y) : x, y \in A\} < \infty .$$

Δηλ. αν υπάρχει $M > 0$: $\forall x, y \in A$: $d(x,y) \leq M$

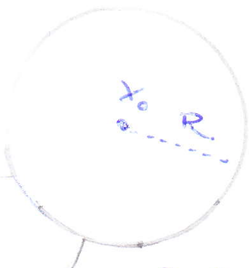
Τότε, ορίζουμε $\operatorname{diam}(A) \underset{\text{op}}{=} \sup\{d(x,y) : x,y\in A\}$

- Αν το $A\neq\emptyset$ δεν είναι φραγμένο, τότε γράφουμε: $\operatorname{diam}(A)=+\infty$.

- Για το $A=\emptyset$ συμφωνούμε ότι: $\operatorname{diam}(\emptyset)=0$ (είναι φραγμένο).

Άσκηση 1:

Δείξτε ότι το A είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $x_0\in X$ και υπάρχει $R>0$:



$$A\subseteq B(x_0,R) \underset{\text{op}}{=} \{x\in X : d(x,x_0)<R\}$$

(η ανοικτή μπάλα με κέντρο x_0 και ακτίνα R).

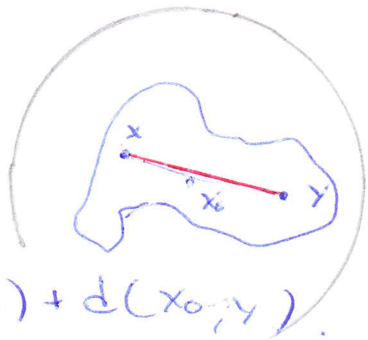
(⟹): Έστω ότι το A είναι φραγμένο.

Υπάρχει $M>0$: $\forall x,y\in A$: $d(x,y)\le M$.

Σταθεροποιούμε $x_0\in A$. Τότε, για κάθε $x\in A$

$d(x,x_0)\le M < M+1$.

Άρα $x\in B(x_0, \underbrace{M+1}_{R})$. Δηλ. $A\subseteq B(x_0,M+1)$



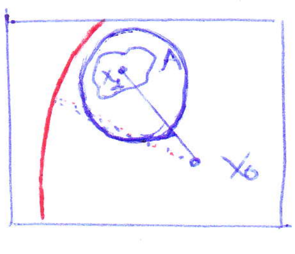
(⟸): Έστω $A\subseteq B(x_0,R)$.

Τότε $\forall x,y\in A$ έχουμε $d(x,y)\le d(x,x_0)+d(x_0,y)$

$< R+R=2R$.

Άσκηση 1': $\emptyset\neq A\subseteq X$ φραγμένο $\Longleftrightarrow$ για κάθε $x_0\in X$ υπάρχει $R>0$: $A\subseteq B(x_0,R)$.

Απόδειξη: (⟹) Από την προηγούμενη άσκηση ξέρουμε ότι υπάρχει $r>0$: $A\subseteq B(x_1,r)$.



Θα δείξουμε ότι: $A\subseteq B(x_0, \underbrace{r+d(x_0,x_1)}_{R})$

Έστω $x \in A$: τότε : $d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0)$.

$< r + d(x_1, x_0)$.

Άσκηση 2. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:

(a). $\forall x, y, z \in X$: $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.

(b). $\forall x, y, z \in X$: $|d(x,y) - d(z,\omega)| \leq d(x,z) + d(y,\omega)$

~ a. Ζητούμε $d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)$.

$\Uparrow$

$d(x,z) < d(x,y) + d(y,z)$.

και $d(y,z) - d(x,z) \leq d(x,y)$

$\Uparrow$

$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$.

$|a| \leq \ell$
$\Updownarrow$
$a \leq \ell, -a \leq \ell$
$\Updownarrow$
$-\ell \leq a \leq \ell$

~ b. $|d(x,y) - d(z,\omega)| \leq |d(x,y) - d(y,z)| +$

$+ |d(y,z) - d(z,\omega)|$

$\overset{(a)}{\leq} d(x,z) + d(y,\omega)$

Σημείωση : Η ανισότητα (b). είναι χρήσιμη αν τα $d(x,z)$, $d(y,\omega)$. είναι μικρά.

Παράδειγμα : (1). Ο $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ δεν είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

(2) Αν $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ τότε ο $(\mathbb{R}, d)$ είναι φραγμένος μετρικός χώρος

(X,d) φραγμένο
$\Updownarrow$
$\operatorname{diam}(X) < \infty$

Ποια είναι η διάμετρός του ;

1. $B(x_0, R) = \{x : |x - x_0| < R\} = (x_0 - R, x_0 + R)$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $|n - 0| = n \to +\infty$

$\Rightarrow \sup\{|x-y| : x, y \in \mathbb{R}\} \geq |n - 0| = n$. Άρα δεν είναι πεπερασμένο.

2. Η d είναι μετρική: αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι „1-1" συνάρτηση, τότε η $d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$ είναι μετρική (1ο ΜΑΘΗΜΑ).

Εδώ έχουμε $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα $\left(\pi.\chi.\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} > 0\right)$ άρα „1-1"

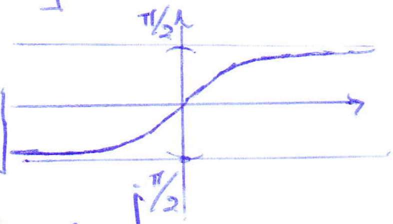
Επίσης, $f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Τότε $\forall x, y \in \mathbb{R}$, έχουμε: $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$

$$\leq |\arctan x| + |\arctan y| < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$\Longrightarrow \operatorname{diam}(\mathbb{R}, d) = \sup\{d(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\} \leq \pi < \infty.$$



Επιπλέον έχουμε $\operatorname{diam}(\mathbb{R}, d) = \sup\{d(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$
$$\geq d(n, -n) = |\arctan(n) - \arctan(-n)| \xrightarrow{n \to \infty} \left|\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \pi.$$

$$\Rightarrow \operatorname{diam}(\mathbb{R}, d) \geq \pi.$$

Άσκηση 6: Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $A, B \subseteq X$, $A_n \subseteq X$, $n = 1, 2, \ldots$

(Αν $a_n \leq \gamma$ και $a_n \to a$ τότε $a \leq \gamma$ (Απειρ. Ι.).)

(1). $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$.

(2). $\operatorname{diam}(A \cap B) \leq \min\{\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\} \leq$

$$\leq \max\{\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\} \leq \operatorname{diam}(A \cup B)$$

[Ερώτηση: Σωστό ή λάθος, $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$]

(3). Αν $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ έχει το πολύ ένα σημείο.

1. $$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\underbrace{d(x,y) : x,y\in A}_{\Lambda}\} \underset{(*)}{\le} \sup\{\underbrace{d(x,y) : x,y\in B}_{M}\} = \operatorname{diam}(B).$$

$(*)$ $\Lambda \subseteq M$ (και είναι $\subseteq \mathbb{R}$) ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ.

2. $$\left.\begin{array}{l} A\cap B = A \\ A\cap B = B \end{array}\right\} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} \operatorname{diam}(A\cap B) \le \operatorname{diam}(A) \\ \operatorname{diam}(A\cap B) \le \operatorname{diam}(B). \end{array}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{diam}(A\cap B) \le \min\{\operatorname{diam}(A), \operatorname{diam}(B)\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma \le \delta \\ \gamma \le \varepsilon \end{array}\right\} \quad \gamma \le \min\{\delta,\varepsilon\}$$

Για το άλλο:

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A\cup B \\ B \subseteq A\cup B \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ldots \ \text{χρησιμοποιώντας ότι:}$$

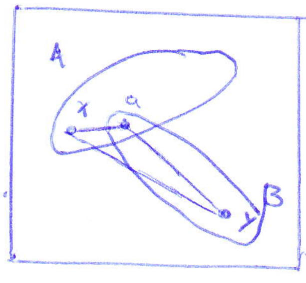
$$\left.\begin{array}{l} \gamma \le \varepsilon \\ \delta \le \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \max\{\gamma,\delta\} \le \varepsilon.$$

Ερώτηση: [ΟΧΙ]: Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

παίρνω $A = \{0\}$, $B = \{100\}$ και $A\cup B = \{0, 100\}$

Τότε $\operatorname{diam}(A\cup B) = 100 > 0 + 0 = \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>: Η ανισότητα όμως ισχύει (σε κάθε (X,d)), αν: $A\cap B \neq \emptyset$.



Απόδειξη: Έστω $a\in A\cap B$. Παίρνουμε $x,y\in A\cup B$ και θα δείξουμε ότι $d(x,y) \le \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α): $x,y\in A \Rightarrow d(x,y) \le \operatorname{diam}(A) \le \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.

(β): $x,y\in B \Rightarrow d(x,y) \le \operatorname{diam}(B) \le \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$

(γ): $x\in A$, $y\in B \rightarrow d(x,y) \le \underbrace{d(x,a)}_{A} + \underbrace{d(a,y)}_{B} \le \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$

3. $diam(A_n) \to 0$. $\Rightarrow$ το $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ το πολύ μονοσύνολο.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο A.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε: $x, y \in A_n \Rightarrow 0 \leq d(x,y) \leq diam(A_n) \to 0$.

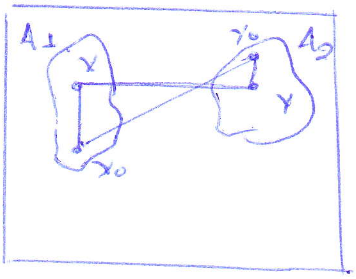
$\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

Άτοπο.

Άσκηση 8. : Αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ μη κενά φραγμένα υποσύνολα του (X,d), τότε το $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ είναι φραγμένο.

(Με επαγωγή) $\rightarrow$ αρκεί να το κάνω για δύο σύνολα A_1, A_2.

Σταθεροποιούμε $x_0 \in A_1$ και $y_0 \in A_2$.



Έστω $x \in A_1$, $y \in A_2$.

Τότε: $d(x,y) \leq \underbrace{d(x,x_0)}_{A_1} + d(x_0,y_0) + \underbrace{d(y_0,y)}_{A_2}$

$\leq \underbrace{diam(A_1) + d(x_0,y_0) + diam(A_2)}_{R}$

Αν $x, y \in A_1$ πάλι ισχύει και ως R.

$x, y \in A_2$ πάλι ισχύει ότι $d(x,y) \leq R$

Συνεπώς, $diam(A_1 \cup A_2) \leq R < \infty$