

~ ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ~

~ e-class 244

προσδος : 8-9 εβδομάδες

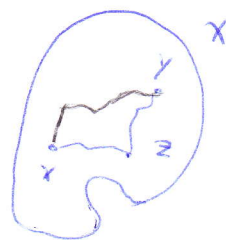
Βασικό παράδειγμα : $\mathbb{R}$ Απόσταση δύο σημείων του $\mathbb{R}$.

$$|x - y|$$

Βασική για τον ατελείωτο :

(α). $a_n \rightarrow a : \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 |a_n - a| < \varepsilon$ (β). f συνεχής στο $x_0 : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ Απλές ιδιότητες της 1.1

- (i). $|x - y| = |y - x|$.
- (ii). $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$.
- (iii). $|x - y| \geq 0$ και αν $|x - y| = 0 \Rightarrow x = y$.

ΟΡΙΣΜΟΣ (ΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ) : Έστω X μη-κενό σύνολο.Μετρική στο X λέγεται μια συνάρτηση : $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:(1). $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = y$ (2). $\forall x, y \in X \quad d(y, x) = d(x, y)$.(3). $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : (i). $\mathbb{R}$, $1.1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |x - y|$.

(ii) $\mathbb{R}^m = \left\{ x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{R} \right\}$

• Ευκλείδεια απόσταση $\|x - y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}$ • Για κάθε $p \geq 1$, $\|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$.

Για $p = \infty$, $\|x - y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i|$.

• $D(X, d)$ λέγεται μετρικός χώρος.

(iii). Έστω $X \neq \emptyset$. Ορίζουμε $\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y. \\ 0, & \text{αν } x = y. \end{cases}$

Η δ είναι μετρική:

1. $\underbrace{\delta(x, y)}_{0 \text{ ή } 1} \geq 0$ και $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. $\delta(y, x) = \delta(x, y)$.

3. Έστω $x, y, z \in X$. Ζητάμε $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

Αν το δεξιό μέλος είναι 0, τότε $\delta(x, z) = 0$ ή $\delta(z, y) = 0$.

$\Rightarrow x = z$ ή $z = y \Rightarrow x = y \Rightarrow \delta(x, y) = 0$.

Αλλιώς, αν το δεξιό μέλος ≥ 1 , το αριστερό ~~είναι~~ είναι ≤ 1 και η ανισότητα ισχύει.

(iv). Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι

1-1. Ορίζουμε $d_f: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

Η d_f είναι μετρική.

1. $d_f(x, y) \geq 0$ και $d_f(x, y) = 0$

$\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| = 0$

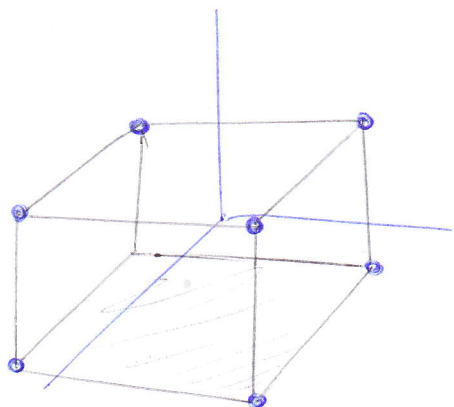
$\stackrel{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = f(y)$

$\Leftrightarrow x = y$.

2. $d_f(x, y) = |f(y) - f(x)| = |-(f(x) - f(y))| = |f(x) - f(y)| = d_f(x, y)$

3. Αν $x, y, z \in X$ τότε: $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)| =$
 $= |(f(x) - f(z)) + (f(z) - f(y))| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$
 $= d_f(x, z) + d_f(z, y)$.

(v). Ο διακεντρικός κύβος : ${}^{(-3)}E_2^m = \{-1, 1\}^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) : \begin{matrix} \text{for } x_i = 1 \text{ ή} \\ x_i = -1 \end{matrix}\}$
 $(2^m \text{ σημεία}).$



$$\begin{aligned} \text{Ορίσω } d(x, y) &= |\{i : x_i \neq y_i\}| \\ &= \# \{i : x_i \neq y_i\} \\ &= \text{card}(\{i : x_i \neq y_i\}) \end{aligned}$$

Η d είναι μετρική. Τριγωνική ανισότητα;

$$d(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \quad (\text{γιατί } |x_i - y_i| = 2 \text{ αν } x_i \neq y_i \text{ και } 0 \text{ αν } x_i = y_i)$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } \forall x, y, z \in E_2^m \text{ έχουμε : } d(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |x_i - z_i| + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |z_i - y_i| = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

ΧΩΡΟΙ ΜΕ ΝΟΡΜΑ.

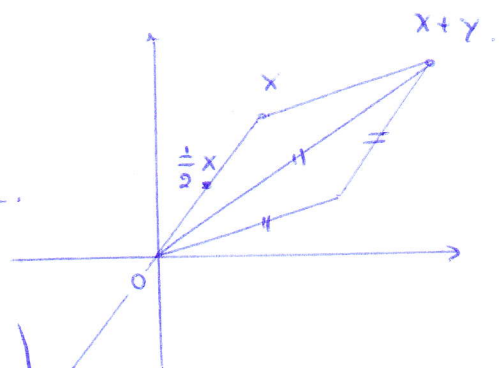
ΟΡΙΣΜΟΣ : Έστω X χρηματικός χώρος (πάνω από το $\mathbb{R}$).
 1 διανυσματικός.

Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται νόρμα, αν ικανοποιεί τα εξής :

- (i) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$, με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$.
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- (iii) $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 : Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον διαν. χώρο X , τότε η $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$,

με $d(x, y) = \|x - y\|$ είναι μετρική
 (Η d είναι η μετρική που επέρχεται στον X από την νόρμα $\|\cdot\|$.)



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (i). Αν $x, y \in X$, τότε $d(x, y) = \|x - y\| \geq 0$.

και $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii). Αν $x, y \in X$ τότε $d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| =$
 $= \cancel{1} \cdot \|y - x\| = d(y, x)$

(iii). Αν $x, y, z \in X$ τότε $d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\|$
 $\leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Μια τέτοια μετρική έχει επιπλέον τις ιδιότητες

• $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ (αναλλοίωτο ως προς μεταφορές)

$$\hookrightarrow \|(x+z) - (y+z)\| = \|x - y\|$$

• $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$

$$\hookrightarrow \|\lambda x - \lambda y\| = \|\lambda(x - y)\| = |\lambda| \cdot \|x - y\|$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: (1). Νόρμες στον $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{R}\}$

• Αν $1 \leq p < \infty$, ορίζουμε $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p}$.

• Αν $p = \infty$ ορίζουμε $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Οι $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμες στον $\mathbb{R}^m$.

Απόδειξη: Δείχνουμε μόνο την τριγωνική ανισότητα.

$p=1$. Έστω $x, y \in \mathbb{R}^k$, τότε $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^m (|x_i| + |y_i|)$
 $= \sum_{i=1}^m |x_i| + \sum_{i=1}^m |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

$p=\infty$ $\|x+y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i + y_i|$. Υπάρχει $k \leq m$:

$$\text{ώστε } \|x+y\|_\infty = |x_k + y_k| \leq \underbrace{|x_k|}_{\leq \|x\|_\infty} + \underbrace{|y_k|}_{\leq \|y\|_\infty} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

(οποιο κι αν είναι το ϵ , έχουμε $|\chi_k| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\chi_i| = \|\chi\|_\infty$).

Αν $1 < p < \infty$:

ΒΗΜΑ 1: (Ανισότητα του Young).

Αν $x, y \geq 0$ και $p, q > 1$, με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

$$\text{τότε } x \cdot y \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q.$$

Αποδείξη: Η $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι
κοίτη $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$,

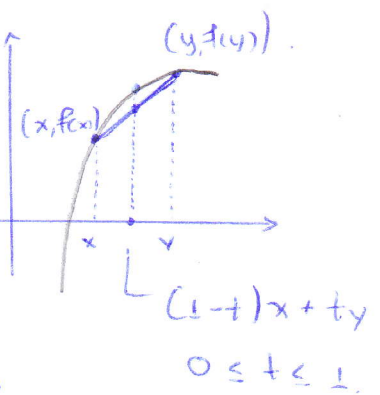
$$(\ln)''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Αν $p > 1$, τότε
υπάρχει μοναδικός
 $q > 1$, ώστε:
 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Ο q λέγεται
συζυγής εκθέτης
του p .

ΥΠΕΝΘΥΜΩΣΗ: Η $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται κοίτη, αν

για κάθε $x, y \in I$ και για κάθε $0 \leq t \leq 1$

$$\text{ισχύει: } f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y).$$



Έστω $x, y > 0$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, μπορώ

$$\text{να γράψω } \ln\left(\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q\right) \geq \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q)$$

$$= \ln((x^p)^{\frac{1}{p}}) + \ln((y^q)^{\frac{1}{q}}) = \ln x + \ln y.$$

$$= \ln(x \cdot y).$$

Αφού η $\ln$ είναι αύξουσα, έπεται ότι: $\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \geq xy$

Αν $x=0$ ή $y=0$, δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα
(αριστερό μέλος είναι = 0).

ΒΗΜΑ 2: (Ανισότητα Hölder).

Έστω p, q συζυγείς εκθέτες ($p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

Av $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ κι $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ τότε:

$$\left| \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \right| \leq \sum_{i=1}^m |x_i| \cdot |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q \right)^{1/q} \\ = \|x\|_p \cdot \|y\|_p$$

(Η Cauchy-Schwarz είναι ειδική περίπτωση, $p=q=2$)

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\|_p > 0$ και $\|y\|_q > 0$

Ορίζουμε $a_i = \frac{x_i}{\|x\|_p}$ $b_i = \frac{y_i}{\|y\|_q}$

Παρατηρούμε ότι: $\sum |a_i|^p = \frac{\sum |x_i|^p}{\|x\|_p^p} = \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p} = 1$

και όμοια: $\sum |b_i|^q = 1$

Τώρα, $\sum_{i=1}^m \frac{|x_i| |y_i|}{\|x\|_p \|y\|_q} = \sum_{i=1}^m |a_i| |b_i| \stackrel{\text{Young}}{\leq} \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{p} |a_i|^p + \frac{1}{q} |b_i|^q \right)$
 $= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m |a_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^m |b_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^m |x_i| |y_i| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$

ΒΗΜΑ 3. (Ανισότητα Minkowski).

Αν $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ τότε:

$y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}$

και $p \geq 1$. $\left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p \right)^{1/p}$

δηλαδή $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$

Απόδειξη: $\|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} \cdot |x_i + y_i|$
 $\leq \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{p-1} |y_i|$

Hölder $\leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^{(p-1) \cdot q} \right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^p \right)^{1/p}$
 $= \left(\sum_{i=1}^m |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{p-1}} \cdot \|x+y\|_p^{p/q} \cdot (\|x\|_p + \|y\|_p)$

δηλαδή: $\|x+y\|_p^p \leq \|x+y\|_p^{p/q} (\|x\|_p + \|y\|_p)$

$\left\{ \begin{array}{l} (!) (p-1) \cdot q = p \\ \uparrow \\ p \cdot q - q = p \\ p + q = p \cdot q \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \|x+y\|_p^{p-1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p \Rightarrow \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Οι παραχόμενες μετρικές στον $\mathbb{R}^m$ είναι:

$$\bullet 1 \leq p < \infty : d_p(x, y) = \|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

$$\bullet p = \infty : d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i - y_i|$$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Γιατί $\|\cdot\|_\infty$;

Αν $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$$

$$\geq \|x\|_\infty \quad \leq (m \cdot \|x\|_\infty^p)^{1/p} \quad \|x\|_\infty$$

$$= m^{1/p} \cdot \|x\|_\infty \rightarrow \|x\|_\infty$$

$$\left\{ \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} \rightarrow 5 \right.$$

(2). Νόρμες στον $C[a, b]$ (ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων)
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Ερώτηση: Πως μετράμε "πόσο κοντά" είναι δύο
 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς;

Απάντ.: $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ Μια ιδέα: $d_\infty(f, g) =$

$$= \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

$$* d_1(f, g_n) = \int_0^{1/n} |g_n - f| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad d_\infty(f, g_n) = \sqrt{n} \rightarrow \infty$$

$$1 \leq p < \infty \quad \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty}$$

$$p = \infty \quad \|f\|_\infty = \sup \{ f(x) : a \leq x \leq b \}$$

