Καλώς ήρθατε στην *Πραγματική* Ανάλυση!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH244/

Χειμερινό Εξάμηνο 2014-15

Ορισμός

Έστω X ένα μη κενό σύνολο. **Μετρική** *στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) $\rho(x,y) \geq 0$ *για κάθε* $x,y \in X$ *και* $\rho(x,y) = 0$ *αν και μόνον αν* $x = y$.

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ *για κάθε* $x,y \in X$.

(iii) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ *για κάθε* $x,y,z \in X$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Το ζεύγος (X,ρ) λέγεται **μετρικός χώρος**.

Παραδείγματα

(α) Η συνήθης μετρική στο $\mathbb{R}$ είναι η

$$d(x,y) = |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

(β) Η Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^m$, τον χώρο των διατεταγμένων m-άδων $x = (x_1, \ldots, x_m)$ πραγματικών αριθμών, ορίζεται ως εξής:

$$\rho_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Μετρικοί χώροι

Παραδείγματα

(γ) Κάθε μη κενό σύνολο X μπορεί να γίνει μετρικός χώρος κατά «τετριμμένο τρόπο»: Η συνάρτηση $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

είναι μετρική. Αυτή η μετρική λέγεται διακριτή μετρική.

(δ) Στο ίδιο σύνολο X μπορούμε να ορίσουμε πολλές διαφορετικές μετρικές: Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, επάγει μια μετρική d_f στο X ως εξής:

$$d_f(x,y) = |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in X.$$

Παραδείγματα

(ε) Ο n-διάστατος κύβος του Hamming. Θεωρούμε το σύνολο

$$H_n = \{\heartsuit, \spadesuit\}^n = \big\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \,\big|\, x_i = \spadesuit \text{ ή } \heartsuit,\ i = 1, \dots, n\big\}.$$

Θεωρούμε την $h : H_n \times H_n \to \mathbb{R}$, *όπου* $h(x, y)$ *είναι το πλήθος των θέσεων στις οποίες διαφέρουν οι n-άδες* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *και* $y = (y_1, \dots, y_n)$, *δηλαδή*

$$h(x, y) = card\,\big(\{1 \le i \le n : x_i \ne y_i\}\big).$$

Ο (H_n, h) *λέγεται κύβος του Hamming.*

Ορισμός (σχετική μετρική)

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Αν $A \subseteq X$ είναι μη κενό, η απεικόνιση $\rho_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με

$$\rho_A(x,y) = \rho(x,y), \qquad x,y \in A$$

(ο περιορισμός της ρ στο $A \times A$) είναι μετρική στο σύνολο A, η **σχετική μετρική** *που επάγεται από την ρ στο A.*
Ο (A,ρ_A) είναι μετρικός χώρος.

Για παράδειγμα, κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρικός χώρος με τον περιορισμό της συνήθους μετρικής σε αυτό.

Ορισμός (διάμετρος)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ένα $A \subseteq X$ λέγεται **φραγμένο** *αν υπάρχει $C > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει $\rho(x,y) \leq C$. Ισοδύναμα, αν*

$$\sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\} < \infty.$$

Αν αυτό συμβαίνει, τότε η **διάμετρος** *του A είναι ο αριθμός*

$$\mathrm{diam}(X) := \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}.$$

Ορίζουμε $\mathrm{diam}(\emptyset) = 0$.
Αν το σύνολο $\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$ δεν είναι άνω φραγμένο τότε γράφουμε $\sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\} = +\infty$ ή $\mathrm{diam}(A) = +\infty$.

(α) Το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική $d(x,y) = |x-y|$ δεν είναι φραγμένος μετρικός χώρος.

(γ) Το $\mathbb{R}$ με τη μετρική

$$\sigma(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

είναι φραγμένος μετρικός χώρος, αφού $\sigma(x,y) < 1$ για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$. Μάλιστα $\mathrm{diam}(\mathbb{R},\sigma) = 1$.

(δ) Αν δ είναι η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο X, τότε ο μ.χ. (X,δ) είναι φραγμένος (και, αν $X = \{\bullet\}$ τότε $\mathrm{diam}(X) = 0$, αλλιώς $\mathrm{diam}(X) = 1$).

Άσκηση

Αν (X,d) μ.χ. και θέσω

$$\sigma(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}, \quad x,y\in X$$

τότε η σ είναι μετρική στον X.
Αποδ. Πρτρ. $\sigma(x,y)=f(d(x,y))$ όπου $f(t)=\frac{t}{1+t}$, $t\geq 0$.
Η f είναι αύξουσα, άρα, αφού $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ έχω $f(d(x,y))\leq f(d(x,z)+d(z,y))$, δηλαδή

$$\sigma(x,y)\leq \frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$=\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)}+\frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}$$

$$\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}=\sigma(x,z)+\sigma(z,y).$$

Ορισμός (νόρμα)

Έστω X ένας πραγματικός γραμμικός (:διανυσματικός) χώρος. **Νόρμα** *στον X είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $\|x\| \geq 0$ *για κάθε* $x \in X$ *και* $\|x\| = 0$ *αν και μόνον αν* $x = 0$ *(μη αρνητική).*

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και κάθε* $x \in X$ *(θετικά ομογενής).*

(γ) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *για κάθε* $x, y \in X$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Μετρικές σε γραμμικούς χώρους

Ορισμός

Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **χώρος με νόρμα**.
Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \|x - y\|, \qquad x, y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του).

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

1. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την νόρμα supremum $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ως εξής: αν $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ τότε

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, m\}.$$

2. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την νόρμα ένα $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_m| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|.$$

Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας για την απόλυτη τιμή στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ συμβολίζεται με ℓ_1^m.

3. Στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Για την τριγωνική ανισότητα, χρειάζεται η

Παρατήρηση (Ανισότητα Cauchy–Schwarz)

Έστω $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ πραγματικοί αριθμοί. Τότε

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας:
Γράψε

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

και παρατήρησε ότι $\|x\|_2^2=(x,x)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_2^2 &= (x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\
&\leq \|x\|_2^2+2|(x,y)|+\|y\|_2^2\\
&\overset{cs}{\leq} \|x\|_2^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|_2^2=(\|x\|+\|y\|)^2\\
\text{δηλ.}\quad \|x+y\|_2 &\leq \|x\|+\|y\|\,.
\end{aligned}$$

4. Γενικότερα, στον $\mathbb{R}^m$ μπορούμε να θεωρήσουμε την p-νόρμα, $1 < p < \infty$, όπου

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Παρατήρηση (Ανισότητα Hölder)

Αν $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $p, q > 1$ ώστε[1] $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *τότε*

$$\sum_{i=1}^{m} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^q\right)^{1/q}.$$

Η ανισότητα Cauchy–Schwarz είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder για $p = q = 2$.

[1] Οι p και q λέγονται συζυγείς εκθέτες.

Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Παρατήρηση (Ανισότητα Minkowski)

Αν $x_1, \ldots, x_m$ και $y_1, \ldots, y_m$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $p > 1$, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left(\sum_{i=1}^{m} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{m} |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Η τριγωνική ανισότητα $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ για την p-νόρμα είναι ακριβώς η ανισότητα Minkowski. Ο χώρος $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p)$ συμβολίζεται με ℓ_p^m.

Χώροι ακολουθιών

1. Ο χώρος $\ell_\infty \equiv \ell_\infty(\mathbb{N})$ των φραγμένων ακολουθιών $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι πραγματικός γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον ℓ_∞ ορίζουμε την supremum νόρμα $\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_\infty := \sup\{|x(n)| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

2. Ο χώρος $c_0 \equiv c_0(\mathbb{N})$ των μηδενικών ακολουθιών, δηλαδή

$$c_0 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \lim_{n\to\infty} x(n) = 0 \right\}$$

είναι επίσης γραμμικός χώρος (μάλιστα γραμμικός υπόχωρος του ℓ_∞) με τις κατά σημείο πράξεις. Σε αυτόν θεωρούμε την supremum νόρμα που κληρονομεί από τον ℓ_∞.

3. Ο χώρος $\ell_1 \equiv \ell_1(\mathbb{N})$ των 1-αθροίσιμων ακολουθιών (δηλαδή ακολουθιών των οποίων η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα):

$$\ell_1 = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty \right\}.$$

Είναι γραμμικός υπόχωρος του c_0
(αν $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < +\infty$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = 0$).
Ορίζουμε τη νόρμα $\|\cdot\|_1 : \ell_1 \to \mathbb{R}$ με

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|.$$

Χώροι ακολουθιών

4. Αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος $\ell_p \equiv \ell_p(\mathbb{N})$ των p-αθροίσιμων ακολουθιών:

$$\ell_p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty \right\}.$$

Ορίζουμε την p–νόρμα

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}.$$

Από την ανισότητα Minkowski «περνώντας στο όριο» αποδεικνύεται ότι η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.

5. Ο χώρος $c_{00} \equiv c_{00}(\mathbb{N})$ των τελικά μηδενικών ακολουθιών: $x \in c_{00}$ αν και μόνον αν υπάρχει $n_0 \equiv n_0(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $x(n) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Σε αυτό το χώρο μπορούμε να ορίσουμε οποιαδήποτε από τις p–νόρμες, $1 \leq p \leq \infty$.

1. Ο χώρος $C([0,1])$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[0,1]$:

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}.$$

Είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις. Στον $C([0,1])$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : C([0,1]) \to \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in [0,1]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το sup όντως υπάρχει, αφού η $|f| : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, και μάλιστα είναι max διότι κάθε συνεχής συνάρτηση, που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα, παίρνει μέγιστη τιμή.

2. Αν $1 \leq p < \infty$, στον $C([0,1])$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την p–νόρμα

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Για την τριγωνική ανισότητα, χρειάζονται οι ανισότητες Hölder και Minkowski για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις:

Ανισότητα Hölder για συναρτήσεις. *Αν* $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχείς συναρτήσεις,* $1 < p < \infty$ *και* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, τότε*

$$\int_0^1 |f(t)g(t)| \, dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^1 |g(t)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Ανισότητα Minkowski για συναρτήσεις. *Αν* $1 \leq p < \infty$*, τότε*

$$\left(\int_0^1 |f(t) + g(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 |g(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

3. Στον $C^1([0,1])$, τον χώρο των συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο, μπορούμε να θεωρήσουμε τη νόρμα

$$\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Παρατηρήστε ότι η

$$\|f\|_d := \|f'\|_\infty$$

δεν είναι νόρμα (και δεν επάγει μετρική) στον $C^1([0,1])$.

4. Αν $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε

$$d_p(f,g) = \left(\int_0^1 |f(t)-g(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

αν $1\leq p<\infty$ και

$$d_\infty(f,g) = \max\{|f(t)-g(t)| : t\in[0,1]\}.$$

Ακολουθίες σε μετρικούς χώρους

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. **Ακολουθία** στον X είναι κάθε συνάρτηση $x:\mathbb{N}\to X$. Γράφουμε $x_n := x(n)$ για τον n-οστό όρο της ακολουθίας x και συμβολίζουμε τις ακολουθίες με $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ή $\{x_n\}$ ή (x_n) ή $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$.

Ακολουθίες

Υπενθύμιση: Η ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$:

$$a_n \to a \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\, \exists n_o \in \mathbb{N} : \; n \geq n_o \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ορισμός

Λέμε ότι μια ακολουθία (x_n) στο μετρικό χώρο (X, ρ) συγκλίνει στο $x \in X$ ως προς τη μετρική ρ (ή είναι ρ-συγκλίνουσα στο x) αν

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Γράφουμε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ή απλώς $x_n \to x$.

Η (x_n) συγκλίνει στο x:

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; (\forall \varepsilon > 0\, \exists n_o \in \mathbb{N} :\; n \geq n_o \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon.)$$

$$\Longleftrightarrow$$

ΓΙΑ ΚΑΘΕ $\varepsilon > 0$ ΥΠΑΡΧΕΙ $n_o \in \mathbb{N}$ ώστε
ΓΙΑ ΟΛΑ ΤΑ $n \geq n_o$ να ισχύει
$x_n \in B_\rho(x, \varepsilon) \equiv \{y \in X : \rho(y, x) < \varepsilon\}$.

Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$
ΚΑΠΟΙΟ τελικό τμήμα $(x_{n_o}, x_{n_o+1}, x_{n_o+2}, \ldots)$ βρίσκεται
ΟΛΟΚΛΗΡΟ στην $B_\rho(x, \varepsilon)$.

ισοδύναμα
για ΚΑΘΕ $\varepsilon > 0$ ισχύει η
$P(\varepsilon)$: το σύνολο των δεικτών $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x) \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

$$\longleftrightarrow$$

Η (x_n) ΔΕΝ συγκλίνει στο x:

ΥΠΑΡΧΕΙ $\varepsilon > 0$, ώστε ΟΧΙ $P(\varepsilon)$:

ΟΧΙ $P(\varepsilon)$: το σύνολο των δεικτών $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x) \geq \varepsilon\}$ είναι άπειρο.

ισοδύναμα
ΚΑΝΕΝΑ τελικό τμήμα $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ ΔΕΝ βρίσκεται ΟΛΟΚΛΗΡΟ στην $B_\rho(x, \varepsilon)$, δηλαδή κάποιος όρος x_m της ακολουθίας $(x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ βρίσκεται εκτός της $B_\rho(x, \varepsilon)$

ΑΡΑ:
Η (x_n) ΔΕΝ συγκλίνει στο $x \iff$ ΥΠΑΡΧΕΙ $\varepsilon > 0$ ώστε ΓΙΑ ΚΑΘΕ $n \in \mathbb{N}$ ΥΠΑΡΧΕΙ $m \geq n$ ώστε $\rho(x_m, x) \geq \varepsilon$.

$$\iff$$

$$x_n \nrightarrow x \;\Leftrightarrow\; (\exists \varepsilon > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \geq n : \rho(x_m, x) \geq \varepsilon.)$$

Προτασούλες

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

Πρόταση

Έστω (x_n) μια ακολουθία στο (X,ρ) και $x \in X$. Τότε $x_n \xrightarrow{\rho} x$ ανν $(\rho(x_n,x))_n \to 0$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση

Έστω (x_n) μια ακολουθία στο (X,ρ). Αν υπάρχει το όριο της (x_n), τότε αυτό είναι μοναδικό.

Πρόταση

Αν $(x_n),(y_n)$ ακολουθίες στον X και $x,y \in X$ με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$, τότε $\rho(x_n,y_n) \to \rho(x,y)$.

Απόδειξη:

$$|\rho(x_n,y_n) - \rho(x,y)| \leq \rho(x_n,x) + \rho(y_n,y).$$

Παραδείγματα σύγκλισης σε μετρικούς χώρους

Πρτρ: Μια (x_n) λέγεται **τελικά σταθερή** αν $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$.
Σε κάθε μετρικό χώρο, μια τελικά σταθερή ακολουθία συγκλίνει (στο x_{n_0}).

1. Έστω δ η διακριτή μετρική στο σύνολο X και (x_n) μια ακολουθία στον X. Η (x_n) είναι συγκλίνουσα στον (X, δ) αν και μόνον αν είναι τελικά σταθερή.
Το ίδιο συμβαίνει στον κύβο του Hamming (H_N, h) .(3)

2. *Πεπερασμένο γινόμενο μετρικών χώρων.* Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ μετρικοί χώροι και $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ το καρτεσιανό τους γινόμενο. Στο X ορίζουμε τη μετρική $d = \sum_{i=1}^{k} d_i$, δηλαδή

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{k} d_i(x(i), y(i)),$$

όπου $x = (x(1), \ldots, x(k))$, $y = (y(1), \ldots, y(k))$ και $x(i), y(i) \in X_i$. Τότε, μια ακολουθία στο X συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη:[2]

$$x_n = (x_n(i)) \xrightarrow[n]{} x = (x(i)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \ldots, k, \;\; x_n(i) \xrightarrow[n]{} x(i)$$

[2]Μια μετρική d στο χώρο γινόμενο με την ιδιότητα αυτή λέγεται *μετρική γινόμενο.*

3. Ο κύβος του Hilbert $\mathscr{H}^\infty$

Το σύνολο

$$[-1,1]^{\mathbb{N}} = \left\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\middle|\; |x(n)| \leq 1, n = 1,2,\ldots\right\}$$

εφοδιάζουμε με τη μετρική

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)-y(n)|}{2^n},$$

όπου $x = (x(n))$ και $y = (y(n))$. Ο μετρικός χώρος $([-1,1]^{\mathbb{N}}, d)$ λέγεται κύβος του Hilbert και συμβολίζεται με $\mathscr{H}^\infty$. Η σύγκλιση στον κύβο είναι κατά συντεταγμένη.

Μια ακολουθία (x_m) στον $\mathscr{H}$ είναι ακολουθία ακολουθιών:

$$\begin{gathered}
x_1 = (x_1(1), x_1(2), \ldots, x_1(n), \ldots) \\
x_2 = (x_2(1), x_2(2), \ldots, x_2(n), \ldots) \\
\vdots \\
x_m = (x_m(1), x_m(2), \ldots, x_m(n), \ldots) \\
\vdots
\end{gathered}$$

4. Άπειρο γινόμενο μετρικών χώρων.

Έστω (X_n, d_n), $n = 1, 2, \dots$ οικογένεια μετρικών χώρων ώστε $d_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$ και κάθε $n = 1, 2, \dots$.
Στο $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ ορίζουμε τη μετρική $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)), \tag{1}$$

όπου $x = (x(1), x(2), \dots)$, $y = (y(1), y(2), \dots)$ με $x(n), y(n) \in X_n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Η d είναι μια μετρική γινόμενο: Η σύγκλιση στον X είναι κατά συντεταγμένη.

5. $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$

Η σύγκλιση ώς προς τη μετρική
$d_\infty(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| : t \in [0,1]\}$
συνεπάγεται την σύγκλιση κατά συντεταγμένη.
Το αντίστροφο δεν ισχύει: παράδειγμα η ακολουθία (f_n) όπου

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n^3 t & 0 \le t \le \frac{1}{2n^2} \\ 2n^3(\frac{1}{n^2} - t) & \frac{1}{2n^2} < t \le \frac{1}{n^2} \\ 0 & \frac{1}{n^2} < t \le 1 \end{cases}$$

το «ψηλό καπέλο της μάγισσας» (ένα σχήμα μπορεί να βοηθήσει). Εδώ για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε $\lim_n f_n(t) = 0$, ενώ $d_\infty(f_n, 0) \to +\infty$, γιατί $d_\infty(f_n,0) = \max\{|f_n(t)| : t \in [0,1]\} = n$ για κάθε n.

6. $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$

Η σύγκλιση ώς προς τη μετρική $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$ ΔΕΝ συνεπάγεται πάντα την σύγκλιση κατά συντεταγμένη.
Παράδειγμα η ακολουθία (f_n) όπου

$$f_n(t) = t^n, \qquad t \in [0,1].$$

Εδώ $d_1(f_n, 0) = \dfrac{1}{n+1} \to 0$ ενώ ΔΕΝ ισχύει ότι για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε $\lim_n f_n(t) = 0$, εφόσον $f_n(1) = 1$ για κάθε n.

Παρατήρησε ότι η (f_n) τείνει κατά σημείο στην
$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t = 1 \end{cases}$ που ΔΕΝ ανήκει στον $C[0,1]$.

Βασικές ακολουθίες

Ορισμός (βασική ακολουθία)

Έστω (x_n) *μια ακολουθία στο μετρικό χώρο* (X,ρ). *Λέμε ότι η* (x_n) *είναι* **βασική** *(ή Cauchy) αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \equiv n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε αν* $m, n \geq n_0$ *τότε* $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος. Τότε, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον* X *είναι ακολουθία Cauchy.*

Φραγμένες ακολουθίες

Ορισμός (φραγμένη ακολουθία)

Έστω (x_n) μια ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Λέμε ότι η (x_n) είναι **φραγμένη** *αν το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Με άλλα λόγια, αν υπάρχει $C > 0$ ώστε $\rho(x_m, x_n) \leq C$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$.*

Πρόταση

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε, κάθε βασική ακολουθία στον X είναι φραγμένη.
Ειδικότερα, κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον X είναι φραγμένη.

Αντίστροφο: όχι πάντα!! Π.χ. $x_n = (-1)^n$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Είναι αλήθεια ότι κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει;

- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ όχι πάντα: $q_n = (1+\frac{1}{n})^n$
- $(\mathbb{R}, \rho)$ όπου $\rho(x,y) = \left|\frac{x}{|x|+1} - \frac{y}{|y|+1}\right|$ όχι πάντα: $x_n = n$.
- $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ πάντα.

Σε ποιούς χώρους είναι αλήθεια ότι κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει; στους πλήρεις μετρικούς χώρους.

Υπακολουθίες

Ορισμός

Έστω (x_n) μια ακολουθία στον μετρικό χώρο (X, ρ). Αν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε η (x_{k_n}) λέγεται **υπακολουθία** *της (x_n).*

Παράδειγμα: $x_n = \frac{1}{n}$ έχει υπακολουθία την $y_n = \frac{1}{2^n}$ και την $z_n = \frac{1}{n+5}$ ή την $w_n = \frac{1}{p_n}$ όπου $p_n =$ ο n-οστός πρώτος.

Παρατηρήσεις **(α)** Αν $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία και $x : \mathbb{N} \to X$ είναι ακολουθία στον X, τότε η $x \circ k : \mathbb{N} \to X$ είναι υπακολουθία της (x_n). Κάθε υπακολουθία της (x_n) είναι η σύνθεση της ακολουθίας (x_n) με μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

(β) Αν (k_n) είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, έχουμε ότι $k_n \geq n$ για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Αποδ: επαγωγή.

Παρατήρηση

Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει, μάλιστα στο ίδιο όριο: $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$

Υπακολουθίες

Παρατήρηση

Η ακολουθία (x_n) *ΔΕΝ συγκλίνει στο* x *αν και μόνον αν υπάρχει* $\varepsilon > 0$ *και υπακολουθία* (x_{k_n}) *της* (x_n) *ώστε για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *να ισχύει* $\rho(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$.

Πράγματι: $x_n \nrightarrow x \;\; \Leftrightarrow$ υπάρχει $\;\varepsilon > 0\;$ ώστε το σύνολο των δεικτών $\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, x) \geq \varepsilon\}$ να είναι άπειρο
$\Leftrightarrow$ υπάρχουν άπειροι δείκτες $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ ώστε $\rho(x_{k_n}, x) \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση

Έστω (X, ρ) *ένας μετρικός χώρος και έστω* (x_n) *ακολουθία στον* X*. Αν η* (x_n) *είναι Cauchy και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε συγκλίνει.*

Bolzano–Weierstrass

Θεώρημα (Bolzano–Weierstrass)

Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$ *(με την Ευκλείδεια μετρική) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Σε τυχόντα μετρικό χώρο η ιδιότητα Bolzano–Weierstrass δεν ισχύει πάντα:

Παράδειγμα

Θεωρούμε το χώρο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ των μηδενικών ακολουθιών με τη μετρική που επάγεται από την supremum νόρμα: αν $x = (x(n))$ και $y = (y(n))$ τότε

$$d_\infty(x, y) = \sup\{|x(n) - y(n)| : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Η (e_n) όπου

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, 0, \ldots) \\ e_2 &= (0, 1, 0, 0, \ldots) \\ e_3 &= (0, 0, 1, 0, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

είναι φραγμένη αφού $d_\infty(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\|_\infty = 1$ αν $n \neq m$. Η (e_n) δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία: θα έπρεπε οι όροι της τελικά να απέχουν απόσταση μικρότερη από 1.

Παράδειγμα: $(C[0,2], \|\cdot\|_1)$

Η μετρική δίνεται από: $d_1(f,g) = \int_0^2 |f(t) - g(t)| dt$.
Η ακολουθία (f_n) όπου

$$f_n(t) = \begin{cases} t^n & 0 \leq t \leq 1 \\ \\ 1 & 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

είναι βασική γιατί $d_1(f_n, f_m) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}$ όταν $m \geq n$, αλλά δεν συγκλίνει διότι αν υπήρχε $f \in C([0,2])$ με $\lim_n d_1(f_n, f) = 0$ θα έπρεπε η f να ικανοποιεί $f(t) = 0$ όταν $0 \leq t < 1$ και $f(t) = 1$ όταν $1 \leq t \leq 2$, πράγμα αδύνατο για συνεχή f.
Επομένως η (f_n) είναι βασική, άρα φραγμένη, και δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Συνέχεια

Υπενθύμιση: Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι μη κενό, $f : A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν:
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ορισμός

Έστω (X,ρ) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται **συνεχής στο** $x_0 \in X$ *αν*

για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \equiv \delta(x_0,\varepsilon) > 0$ ώστε:
αν $x \in X$ και $\rho(x,x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής στον X αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ συμβολίζεται $\mathscr{C}(X,Y)$. Αν $Y = \mathbb{R}$ γράφουμε $\mathscr{C}(X)$ αντί του $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$.

Παραδείγματα

Παραδείγματα

(α) *Έστω* δ *η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο* X *και* (Y,σ) *τυχών μετρικός χώρος. Κάθε συνάρτηση* $f:(X,\delta)\to(Y,\sigma)$ *είναι συνεχής.*

(β) *Κάθε ακολουθία* $f:\mathbb{N}\to X$ *είναι συνεχής συνάρτηση.*

(γ) *Η ταυτοτική συνάρτηση* $I:(c_{00},\|\cdot\|_\infty)\to(c_{00},\|\cdot\|_2)$ **δεν** *είναι συνεχής.*

Η $f:X\to Y$ *είναι ασυνεχής στο* $x_0\in X$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $\varepsilon>0$ *ώστε: για κάθε* $\delta>0$ *υπάρχει* $x\in X$ *με* $\rho(x,x_0)<\delta$ *και* $\sigma(f(x),f(x_0))\geq\varepsilon$.

Αρχή της μεταφοράς

Η συνέχεια περιγράφεται μέσω της σύγκλισης ακολουθιών, ακριβώς όπως και στην περίπτωση συναρτήσεων που ορίζονται σε υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Πρόταση (αρχή της μεταφοράς)

Έστω (X,ρ) και (Y,σ) δύο μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ και $x_0 \in X$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Η f είναι συνεχής στο x_0.*

(β) *Για κάθε ακολουθία (x_n) στοιχείων του X με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ ισχύει $f(x_n) \xrightarrow{\sigma} f(x_0)$.*

(γ) *Για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$, η $(f(x_n))$ είναι σ-συγκλίνουσα.*

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$.

(α) Η ανοικτή ρ-μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$B_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \varepsilon\}.$$

(β) Η κλειστή ρ-μπάλα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$\widehat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) \leq \varepsilon\}.$$

(γ) Η ρ-σφαίρα με κέντρο το x_0 και ακτίνα $\varepsilon > 0$ είναι το σύνολο

$$S_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) = \varepsilon\}.$$

Παραδείγματα

(α) Σε ένα σύνολο X με τη διακριτή μετρική δ, αν $r > 0$ ισχύει

$$B(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{αν } r \leq 1 \\ X, & \text{αν } r > 1 \end{cases}$$

και

$$S(x,r) = \begin{cases} X \setminus \{x\}, & \text{αν } r = 1 \\ \emptyset, & \text{αν } r \neq 1. \end{cases} .$$

(β) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική,

$$B(x,\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon), \qquad \widehat{B}(x,\varepsilon) = [x-\varepsilon, x+\varepsilon],$$
$$S(x,\varepsilon) = \{x-\varepsilon, x+\varepsilon\}.$$

(γ) Στο $\mathbb{R}^2$, έχουμε $B_1(0,\varepsilon) \subset B_2(0,\varepsilon) \subset B_\infty(0,\varepsilon)$.
$B_2(0,\varepsilon)$ είναι ο ανοικτός δίσκος κέντρου 0 και ακτίνας ε
$B_1(0,\varepsilon)$ είναι το ανοικτό εγγεγραμμένο τετράγωνο και $B_\infty(0,\varepsilon)$ είναι το ανοικτό περιγεγραμμένο τετράγωνο που εφάπτεται στον $B_2(0,\varepsilon)$ στα σημεία $(1,0),(1,1),(-1,0),(-1-1)$.

Ορισμός: ανοικτό σύνολο

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το $x \in A$ λέγεται **εσωτερικό σημείο (interior point)** του A αν υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x) \subseteq A$.

Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω $G \subseteq X$. Το G λέγεται ρ-**ανοικτό (open)** αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon_x) \subseteq G$. Δηλαδή, αν κάθε σημείο του G είναι εσωτερικό του σημείο.

Παρατήρηση Ένα σύνολο $A \subseteq X$ δεν είναι ανοικτό ανν υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ να ισχύει ότι $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$.

Παραδείγματα

(α) Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό σύνολο.

(β) Κάθε υποσύνολο ενός χώρου με τη διακριτή μετρική είναι ανοικτό.

(γ) Τα διαστήματα της μορφής $(a, b]$ στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $a < b$ δεν είναι ανοικτά.

(δ) Στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτό, διότι κάθε διάστημα περιέχει άρρητους. Ούτε το $\mathbb{Q}^c$ είναι ανοικτό...

Ανοικτά: $X, \emptyset$, αυθαίρετες ενώσεις, πεπερασμένες τομές

Πρόταση

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) *Το X και το $\emptyset$ είναι ανοικτά.*

(β) *Αν $(G_i)_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του X τότε το σύνολο $\bigcup_{i \in I} G_i$ είναι ανοικτό.*

(γ) *Αν τα $G_1, G_2, \ldots, G_n$ είναι ανοικτά τότε το $\bigcap_{i=1}^{n} G_i = G_1 \cap \cdots \cap G_n$ είναι ανοικτό.*

(Η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου (X, ρ) είναι μια **τοπολογία** στον X.)

Παρατήρηση

Η τομή μιας άπειρης οικογένειας ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο (X, ρ) δεν είναι κατ' ανάγκην ανοικτό σύνολο. Παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική η οικογένεια $G_n = (-1, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$, ικανοποιεί $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (-1, 0]$: όχι ανοικτό.

Ανοικτά σύνολα

Πρόταση

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Το G είναι ανοικτό υποσύνολο του X.*

(β) *Για κάθε $x \in G$ και για κάθε ακολουθία (x_n) στο X με $x_n \xrightarrow{\rho} x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n \geq n_0$ τότε $x_n \in G$.*

Πόρισμα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο V του X είναι ανοικτό αν και μόνον αν είναι (ενδεχομένως άπειρη) ένωση από ανοικτές μπάλες του X.

Πρόταση (ανοικτά υποσύνολα της ευθείας)

Κάθε ανοικτό σύνολο U στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ μπορεί να γραφεί ως (αριθμήσιμη) ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

Κλειστά σύνολα

Ορισμός

*Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $F \subseteq X$. Το F λέγεται ρ-**κλειστό** (**closed**) αν το συμπλήρωμά του $F^c \equiv X \setminus F$ είναι ρ-ανοικτό.*

Παραδείγματα

(α) Σε κάθε μετρικό χώρο (X,ρ) τα μονοσύνολα $\{x\}$, $x \in X$ είναι κλειστά.

(β) Σε κάθε μετρικό χώρο (X,ρ), κάθε κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x,r)$ είναι κλειστό σύνολο.
Ειδικότερα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, κάθε κλειστό διάστημα $[a,b]$ είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι κλειστό σύνολο, διότι το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν περιέχει διάστημα (ούτε ανοικτό).

Κλειστά σύνολα

Παραδείγματα

(δ) Κάθε υποσύνολο ενός χώρου με τη διακριτή μετρική είναι κλειστό (και ανοικτό!).

(ε) Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Έστω $x \in X$ και ακολουθία (x_n) στον X, ώστε $x_n \to x$. Το σύνολο

$$E = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\} \cup \{x\}$$

είναι κλειστό στον (X, d).

Παρατήρηση

Αν ένα σύνολο δεν είναι ανοικτό δεν έπεται κατ΄ ανάγκην ότι είναι κλειστό. Επίσης, ένα σύνολο που είναι ανοικτό μπορεί να είναι και κλειστό.

Κλειστά: $X, \emptyset$, πεπερασμένες ενώσεις, αυθαίρετες τομές

Πρόταση

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Τότε:

(α) Τα $X, \emptyset$ είναι κλειστά.

(β) Αν $F_1, F_2, \ldots, F_n$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε η ένωσή τους $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ είναι κλειστό σύνολο.

(γ) Αν $(E_i)_{i \in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X, τότε η τομή τους $\bigcap_{i \in I} E_i$ είναι κλειστό σύνολο.

Παρατήρηση

Η ένωση μιας άπειρης οικογένειας κλειστών συνόλων δεν είναι κατ΄ ανάγκην κλειστό σύνολο. Παράδειγμα, στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $n = 2, 3, \ldots$, τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$ που δεν είναι κλειστό.

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος,* $F \subseteq X$.

(α) Το F *είναι κλειστό.*

$$\Longleftrightarrow$$

(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του F *συγκλίνει σε στοιχείο του* F*. Δηλαδή, για κάθε ακολουθία* (x_n) *στο* F *με* $x_n \xrightarrow{\rho} x \in X$ *έπεται ότι* $x \in F$.

Αναδιατύπωση του (β): Αν $x_n \in F$ για κάθε n και αν η (x_n) συγκλίνει, τότε $\lim_n x_n \in F$.

Ισοδύναμα:

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος,* $F \subseteq X$.

(α) Το F *είναι κλειστό.*

$$\Longleftrightarrow$$

(β) Κάθε $x \in X$ *με την ιδιότητα: «για κάθε* $\varepsilon > 0$ *ισχύει* $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$*» ανήκει στο* F.

$$\Longleftrightarrow$$

(γ) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του F *συγκλίνει σε στοιχείο του* F*. Δηλαδή, για κάθε ακολουθία* (x_n) *στο* F *με* $x_n \xrightarrow{\rho} x \in X$ *έπεται ότι* $x \in F$.

Απόδειξη

(α) $\iff$ (β): F κλειστό σημαίνει εξ ορισμού F^c ανοικτό, δηλ.

ισοδύναμα

$$x \in F^c \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ τ.ω. } B(x,\varepsilon) \subseteq F^c, \text{δηλ. } B(x,\varepsilon) \cap F = \emptyset$$

ισοδύναμα

$$B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0 \implies x \in F.$$

(β) $\implies$ (γ): Έστω (x_n) τ.ω. $x_n \to x$ και $x_n \in F$ για κάθε n.
Ν.δ.ο. $x \in F$:
Αν $\varepsilon > 0$ τότε $\exists n_0$ με $x_{n_0} \in B(x,\varepsilon)$, άρα $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Από (β), έχουμε $x \in F$.

(γ) $\implies$ (β): Έστω $x \in X$ με την ιδιότητα για κάθε $\varepsilon > 0$ να έχω $B(x,\varepsilon) \cap F \neq \emptyset$. Ν.δ.ο. $x \in F$.
Για κάθε n, έχω $B(x,\frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$: πάρε ένα $x_n \in B(x,\frac{1}{n}) \cap F$. Τότε για κάθε n, έχω $x_n \in F$ και $\rho(x_n,x) < \frac{1}{n}$, άρα $x_n \to x$. Από (γ), έπεται $x \in F$. $\square$

Εσωτερικό συνόλου

Ορισμός

Έστω A ένα υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ). Το **εσωτερικό (interior)** *του A είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A και συμβολίζεται με $\operatorname{int} A$ (ή A°). Δηλαδή,*

$$A^\circ \equiv \operatorname{int} A = \{x \in A \mid \exists\, \varepsilon_x > 0 \,:\, B(x,\varepsilon_x) \subseteq A\}\,.$$

Παρατηρήσεις

(α) $x \in A^\circ \iff \exists V_x$ *ανοικτό με* $x \in V_x \subseteq A$

(β) Για κάθε $A \subseteq X$ το εσωτερικό A° του A είναι ανοικτό σύνολο.

Παραδείγματα

(α) Το εσωτερικό του $(a, b]$ στο $\mathbb{R}$ ως προς τη συνήθη μετρική είναι το (a, b).

(β) Το εσωτερικό του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ είναι το $\emptyset$.

(γ) Το εσωτερικό μιας ανοικτής μπάλας σε ένα μετρικό χώρο είναι η ίδια η μπάλα.

Ιδιότητες εσωτερικού

Πρόταση

Έστω A, B *υποσύνολα ενός μετρικού χώρου* (X, ρ). *Τότε:*

(α) $A^\circ \subseteq A$.

(β) $A^\circ = \bigcup\{V \subseteq A : V \text{ ανοικτό}\}$. *Ισοδύναμα, το εσωτερικό του* A *είναι το μέγιστο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο* A.

(γ) $A^\circ = A$ *αν και μόνον αν το* A *είναι ανοικτό.*

(δ) Αν $A \subseteq B$*, τότε* $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(ε) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(στ) $A^\circ \cup B^\circ \subseteq (A \cup B)^\circ$.

Παρατήρηση

Ο τελευταίος εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος: Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, *για* $A = [0,1]$, $B = (1,2)$ *έχουμε* $A^\circ \cup B^\circ = (0,1) \cup (1,2)$ *ενώ,* $(A \cup B)^\circ = (0,2)$. *Επίσης για* $A = \mathbb{Q}$ *και* $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *έχουμε* $A^\circ \cup B^\circ = \emptyset$, *ενώ* $(A \cup B)^\circ = \mathbb{R}$.

Σημεία επαφής

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται **σημείο επαφής** *του A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ (δηλαδή αν κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει στοιχεία του A).*

(Μπορεί το x να ανήκει στο A, μπορεί και όχι.)

Παραδείγματα

(α) Στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ θεωρούμε το σύνολο $A = (0,1]$. Το σημείο 0 είναι σημείο επαφής του A και $0 \notin A$. Το σημείο 1 είναι σημείο επαφής του A και $1 \in A$.

(β) Αν (x_n) είναι μια ακολουθία σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ) ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε το x είναι σημείο επαφής του συνόλου $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Σημεία επαφής

Παραδείγματα

(γ) Σε κάθε σύνολο X *εφοδιασμένο με τη διακριτή μετρική* δ*, αν θεωρήσουμε τυχόν* $A \subseteq X$*, τότε ένα* $x \in X$ *είναι σημείο επαφής του* A *αν και μόνον αν* $x \in A$*.*

Πρόταση

Έστω (X, ρ) *μετρικός χώρος και έστω* $A \subseteq X$*. Το* $x \in X$ *είναι σημείο επαφής του* A *αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία* (a_n) *στοιχείων του* A *ώστε* $a_n \xrightarrow{\rho} x$*.*

Κλειστή θήκη συνόλου

Ορισμός

Αν (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$, η **κλειστή θήκη** *(***closure***) $\overline{A}$ (ή $cl(A)$) του A είναι το σύνολο των σημείων επαφής του. Δηλαδή,*

$$\overline{A} \equiv \mathrm{cl}(A) = \{x \in X : \forall\, \varepsilon > 0, A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset\}.$$

Παρατήρηση

Για κάθε $A \subseteq X$ η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι κλειστό σύνολο.

Παραδείγματα

(α) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ισχύουν οι $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ και $\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
(β) Στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ τότε
$\mathrm{cl}\,(a,b) = \mathrm{cl}\,(a,b] = \mathrm{cl}\,[a,b) = [a,b]$.
(γ) Αν δ είναι η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο X, για κάθε σύνολο $A \subseteq X$ ισχύει $cl_\delta(A) = \overline{A} = A$.

Κλειστή θήκη

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος και* $A, B \subseteq X$. *Τότε:*

(α) $A \subseteq \overline{A}$.

(β) $\overline{A} = \bigcap\{F \supseteq A : F \text{ κλειστό}\}$. *Ισοδύναμα, η κλειστή θήκη του* A *είναι το ελάχιστο κλειστό υποσύνολο του* X *που περιέχει το* A.

(γ) $A = \overline{A}$ *αν και μόνον αν το* A *είναι κλειστό.*

(δ) Αν $A \subseteq B$, *τότε* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

ε) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(στ) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Παρατήρηση

Ο εγκλεισμός στην τελευταία σχέση μπορεί να είναι γνήσιος.
Παράδειγμα: στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *έχουμε* $\overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c} = \emptyset$ *ενώ* $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$.

Συνοψίζουμε

Σε ένα μετρικό χώρο (X,ρ), $A \subseteq X$:

$$A^\circ = \{x \in X | \exists \varepsilon > 0 : B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq A\}$$

: τα εσωτερικά σημεία του A.

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{x \in X | \exists (x_n) \text{ με } x_n \in A \text{ και } x_n \xrightarrow{\rho} x\} \\ &= \{x \in X | \forall \varepsilon > 0 : B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

: τα σημεία επαφής του A.

$$G \subseteq X \text{ ανοικτό} \iff G = G^\circ$$

$$F \subseteq X \text{ κλειστό} \iff F = \overline{F}$$

$$G \text{ ανοικτό}, F \text{ κλειστό}, G \subseteq A \subseteq F \implies G \subseteq A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq F$$

Κλειστή θήκη και εσωτερικό

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος,* $A, B \subseteq X$*. Τότε:*

(α) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$

(β) $X \setminus B^{\circ} = \overline{(X \setminus B)}$

Απόδειξη. (α) Έστω $x \in X$. Ένα από τα δύο:

Ή για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, $\iff$ $x \in \overline{A}$.

Ή υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x,\varepsilon) \subseteq X \setminus A$, $\iff$ $x \in (X \setminus A)^{\circ}$.

Άρα τα $\overline{A}$ και $(X \setminus A)^{\circ}$ ξένα με ένωση το X. Έπεται ότι $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^{\circ}$.

Για το (β), εφάρμοσε το (α) για $B = X \setminus A$.

Σημεία συσσώρευσης

Ορισμός (σημείο συσσώρευσης)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το $x \in X$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης** *(***accumulation point***) του A αν σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x μπορούμε να βρούμε σημείο του A διαφορετικό από το x. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Το σύνολο A' των σημείων συσσσώρευσης του A λέγεται **παράγωγο σύνολο** *του A.*

Σημεία συσσώρευσης

Πρόταση

Αν $A \subseteq X$ και $x \in X$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) Το x είναι σημείο συσσώρευσης του A.
(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ το $A \cap B(x,\varepsilon)$ είναι άπειρο σύνολο.
(γ) Υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A ώστε $a_n \xrightarrow{\rho} x$ και $a_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρήσεις

(α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Τότε, $\overline{A} = A \cup A'$. Επομένως, το A είναι κλειστό αν και μόνον αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.
(β) Το A' είναι κλειστό σύνολο (Άσκηση).

Σύνορο

Ορισμός

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος και* $A \subseteq X$. *Το* $x \in X$ *λέγεται* **συνοριακό σημείο** *(***boundary point***) του* A *αν σε κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο* x *υπαρχει* ***και*** *σημείο του* A ***και*** *σημείο του* A^c. *Δηλαδή, αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *ισχύουν οι* $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ *και* $B(x,\varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. *Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του* A *λέγεται* **σύνορο** *(***boundary***) του* A *και συμβολίζεται με* $\mathrm{bd}(A)$ *ή* $\partial(A)$.

Πρόταση (Άσκηση)

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος και* $A \subseteq X$. *Τότε,*
(α) $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$. *(β)* $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{int}(A)$ *(ξένη ένωση).*
(γ) $X = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{int}(A^c)$ *(ξένη ένωση).*
(δ) $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$. *Ισοδύναμα,* $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. *Ειδικότερα, το* $\mathrm{bd}(A)$ *είναι κλειστό σύνολο.*
(ε) Το A *είναι κλειστό αν και μόνον αν* $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$.

Σχετικώς ανοικτά και κλειστά σύνολα

Αν $A \neq \emptyset$ υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ), η $\rho_A(x,y) = \rho(x,y)$, $x,y \in A$ ορίζει μετρική στο A.

Παρατήρηση $\quad x \in A \quad \Rightarrow \quad B_{\rho_A}(x,r) = B_\rho(x,r) \cap A.$

Πρόταση

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε:
(α) Το $G \subseteq A$ είναι ανοικτό στο μ.χ. (A,ρ_A) (δηλ. ρ_A-ανοικτό) αν και μόνον αν υπάρχει ρ-ανοικτό $V \subseteq X$ ώστε $G = A \cap V$.
(β) Το $F \subseteq A$ είναι ρ_A-κλειστό αν και μόνον αν υπάρχει ρ-κλειστό $E \subseteq X$ ώστε $F = A \cap E$.

Παραδείγματα

(α) Στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ θεωρούμε το σύνολο $A = (0,1] \cup \{2\}$. Τα $(0,1]$ και $\{2\}$ είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά στο A.
(β) Στον $(\mathbb{R}^3,\|\cdot\|_2)$ θεωρούμε το xy-επίπεδο H (δηλαδή στοιχεία της μορφής $(x,y,0)$). Τότε ο ανοικτός δίσκος D του xy-επιπέδου ($D = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1\}$) είναι σχετικά ανοικτό στον H αλλά δεν είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^3$.

Παράρτημα: Πεπερασμένα, άπειρα, υπεραριθμήσιμα

Ορισμός (ισοπληθικότητα)

Έστω A, B δυο μη κενά σύνολα. Τα A, B λέγονται **ισοπληθικά** *αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : A \to B$, η οποία είναι 1-1 και επί ($f : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B$). Γράφουμε τότε $A =_c B$ ή $|A| = |B|$ ή και $A \sim B$.*

Παραδείγματα

1. $f : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow (0,2)$ με $f(x) = 2x$.
$f : (0,1) \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow (a,b)$ με $f(t) = (1-t)a + tb$.
2. $\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow A$ (:άρτιοι) με $n \mapsto 2n$.
3. $f : \mathbb{Z} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$ με $f(n) = \begin{cases} 2n, & \text{αν } n \geq 0 \\ 2|n| - 1, & \text{αν } n < 0 \end{cases}$
4. $f : [0,1] \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow [0,1)$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{αν } x \in M \text{ και } x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{αν } x \notin M \end{cases}$
($M = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$)

Πεπερασμένα και άπειρα σύνολα

Πρόταση

Έστω A, B, C μη κενά σύνολα. Τότε ισχύουν τα επόμενα
(α) $A \sim A$,
(β) *αν* $A \sim B$, *τότε* $B \sim A$ *και*
(γ) *αν* $A \sim B$ *και* $B \sim C$, *τότε* $A \sim C$.

Ορισμός

Ένα σύνολο A θα λέγεται **πεπερασμένο** *αν ή $A = \emptyset$ ή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ 1-1 και επί. Τότε, λέμε ότι ο* **πληθάριθμος** *του A είναι n ή ότι το A έχει n στοιχεία.*[3]
Γράφουμε $|A| = n$.
Ένα σύνολο A θα λέγεται **άπειρο** *αν δεν είναι πεπερασμένο.*

[3] Το κενό σύνολο έχει πληθάριθμο 0.

Πεπερασμένα και άπειρα σύνολα

Πρόταση

Έστω A σύνολο. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα
(α) *Το A είναι άπειρο.*
(β) *Υπάρχει 1-1 συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrowtail A$, δηλαδή υπάρχει $B \subseteq A$ ώστε $B \sim \mathbb{N}$.*

Παραδείγματα

1. *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο, διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.*
2. *Το σύνολο των ρητών είναι άπειρο διότι $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.*
3. *Κάθε μη τετριμμένο διάστημα στο $\mathbb{R}$ είναι άπειρο.*

Παρατήρηση

Κάθε άπειρο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του.

Αριθμήσιμα σύνολα

Ορισμός

Ένα σύνολο A λέγεται **αριθμήσιμο** *αν ή είναι πεπερασμένο ή υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$, δηλαδή αν $A \sim \mathbb{N}$. Διαφορετικά, το σύνολο A θα λέγεται* **υπεραριθμήσιμο**.

Συμβολισμός. Ο πληθάριθμος των φυσικών αριθμών συμβολίζεται ω ή $\aleph_0$ (άλεφ 0). Έτσι, αν το σύνολο A είναι άπειρο αριθμήσιμο γράφουμε $|A| = \aleph_0$.

Παραδείγματα

(α) *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι αριθμήσιμο.*

(β) *Το $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{N}\}$ είναι αριθμήσιμο.*

(γ) *Αν A, B είναι αριθμήσιμα σύνολα, τότε το $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ είναι επίσης αριθμήσιμο.*

Αριθμήσιμα σύνολα

Πρόταση

Έστω A άπειρο σύνολο. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) *Το A είναι αριθμήσιμο.*

(β) *Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$, η οποία είναι επί.*

(γ) *Υπάρχει συνάρτηση $g : A \rightarrowtail \mathbb{N}$, η οποία είναι 1-1.*

Λήμμα

Κάθε άπειρο υποσύνολο B του $\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο, άρα $B \sim \mathbb{N}$.

Παραδείγματα

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.
Κάθε ανοικτό $U \subseteq (\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων.

Θεώρημα (Cantor, 1899)

Έστω $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια αριθμήσιμων υποσυνόλων ενός συνόλου X. Αν το I είναι αριθμήσιμο, τότε και το $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι αριθμήσιμο.

Υπάρχουν κι άλλα;

Πρόταση

Το σύνολο $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ *ΔΕΝ είναι αριθμήσιμο.*

Σημείωση Κρίσιμο: πληρότητα του $\mathbb{R}$ (μέσω αρχής κιβωτισμού). Σε αντιδιαστολή, το $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο.

Πόρισμα

Το σύνολο $\mathbb{R}$ *και το σύνολο των αρρήτων* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *είναι υπεραριθμήσιμα.*

Υπεραριθμήσιμα σύνολα

Θεώρημα (Cantor)

Το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών

$$2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{x = (x(n)) : x(n) \in \{0,1\},\ n = 1,2,\dots\}$$

είναι υπεραριθμήσιμο.

Πόρισμα

Το σύνολο $\mathscr{P}(A)$ όλων των υποσυνόλων ενός ***άπειρου*** *συνόλου A είναι υπεραριθμήσιμο.*

Περίληψη: πεπερασμένα, άπειρα, αριθμήσιμα και μη

Τα A, B λέγονται **ισοπληθικά** ($A \sim B$) αν υπάρχει $f : A \to B$, που είναι 1-1 και επί ($f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\to B$).

Το A είναι **πεπερασμένο** αν $A = \emptyset$ ή $\exists n \in \mathbb{N} : A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$.

Το A είναι **άπειρο αριθμήσιμο** αν $A \sim \mathbb{N}$. [π.χ $A = \mathbb{Q}$.]

Το A είναι **αριθμήσιμο** αν είναι πεπερασμένο ή $A \sim \mathbb{N}$.

Το A είναι **υπεραριθμήσιμο** αν δεν είναι αριθμήσιμο [π.χ. $A = [0, 1]$ ή $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$].

Πυκνά υποσύνολα

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $D \subseteq X$. Το D λέγεται **πυκνό** *(***dense***) στον X, αν $\overline{D} = X$.*

Παραδείγματα

(α) Τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(β) Ο c_{00} είναι πυκνός στον $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$.

(γ) (Θεώρημα Kronecker). Έστω $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Το σύνολο

$$D(\theta) := \{(\cos(n\theta), \sin(n\theta)) : n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Πυκνά υποσύνολα

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος και έστω* $D \subseteq X$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το* D *είναι πυκνό στον* X.

(β) *Αν* F *κλειστό και* $D \subseteq F$, *τότε* $F = X$.

(γ) *Για κάθε μη κενό ανοικτό* $G \subseteq X$ *ισχύει* $G \cap D \neq \emptyset$.

(δ) *Για κάθε* $x \in X$ *και για κάθε* $\varepsilon > 0$ *ισχύει* $D \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$.

(ε) *Για κάθε* $x \in X$ *υπάρχει ακολουθία* (x_n) *στοιχείων του* D *ώστε* $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

(στ) $(X \setminus D)^\circ = \emptyset$.

Διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι

Ορισμός

Ο μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται **διαχωρίσιμος** *(***separable***) αν έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Δηλαδή, αν υπάρχει $D=\{d_1,d_2,\dots\}\subseteq X$* αριθμήσιμο *ώστε $\overline{D}=X$.*

Παραδείγματα

(α) *Ο $\mathbb{R}^d$, με οποιαδήποτε από τις p–μετρικές, είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολό του είναι το $\mathbb{Q}^d$.*

(β) *Οι χώροι ℓ^p, $1\le p<\infty$ είναι διαχωρίσιμοι.*

(γ) *Ο χώρος ℓ^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος [αποδ: αργότερα].*

(δ) *Ο κύβος του Hilbert, $\mathscr{H}^\infty$ είναι διαχωρίσιμος.*

Διαχωρισιμότητα

Λήμμα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(α) *Ο X είναι διαχωρίσιμος.*
(β) *Υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathscr{O}$ ανοικτών υποσυνόλων του X με την εξής ιδιότητα: Για κάθε ανοικτό $G \subseteq X$ και για κάθε $x \in G$ υπάρχει $U \in \mathscr{O}$ ώστε $x \in U \subseteq G$.*

Εναλλακτικά:

Λήμμα

Ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος αν και μόνον αν:
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\{X_n^\varepsilon : n \in \mathbb{N}\}$ υποσυνόλα του X με διάμετρο $\mathrm{diam}(X_n^\varepsilon) \leq \varepsilon$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^\varepsilon$.

Πρόταση

Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Κάθε υπόχωρος (A,ρ_A) του X είναι επίσης διαχωρίσιμος.

Πότε ΔΕΝ είναι διαχωρίσιμος

Πρόταση

Σε κάθε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο (X,ρ) κάθε οικογένεια από ξένα ανοικτά σύνολα είναι το πολύ αριθμήσιμη.

Αν ο (X,ρ) περιέχει μια υπεραριθμήσιμη οικογένεια $\{B(x_i,r_i) : i \in I\}$ από ξένες ανοικτές μπάλες, τότε δεν είναι διαχωρίσιμος.

Πρόταση

Έστω ότι ο X έχει ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο A με την ιδιότητα: υπάρχει $\eta > 0$ ώστε $\rho(x,y) \geq \eta$ για κάθε $x,y \in A$, $x \neq y$. Τότε δεν είναι διαχωρίσιμος.

Παραδείγματα

(α) *Ο $\ell^\infty \equiv (\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.*
(β) *Αν Γ υπεραριθμήσιμο (π.χ. $\Gamma = \mathbb{R}$), τότε ο (Γ,δ) (δηλαδή, το Γ με τη διακριτή μετρική) είναι μη διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.*

Συνεχείς συναρτήσεις

$f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνεχής σε κάποιο σημείο $x_0 \in X$:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε:
αν $x \in X$ και $\rho(x, x_0) < \delta$ τότε $\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \equiv \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ ώστε:

$$f(B_\rho(x_0, \delta)) \subseteq B_\sigma(f(x_0), \varepsilon).$$

Υπενθύμιση: Αν $f : X \to Y$ τυχαία:

$$A \subseteq X : \qquad f(A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y | \exists x \in A : f(x) = y\}$$

$$B \subseteq Y : \quad f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}.$$

(Η $f : X \to Y$ λέγεται **συνεχής στον X** αν είναι συνεχής σε κάθε $x \in X$.)

Πρόταση

Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Αν G ανοικτό στον Y, τότε $f^{-1}(G)$ ανοικτό στον X.*

(γ) *Αν F κλειστό στον Y, τότε $f^{-1}(F)$ κλειστό στον X.*

Πρόταση

Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(δ) *Για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(ε) *Για κάθε $B \subseteq Y$ ισχύει $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.*

(στ) *Για κάθε $C \subseteq Y$ ισχύει $f^{-1}(C^\circ) \subseteq (f^{-1}(C))^\circ$.*

Το λήμμα του Urysohn

Θεώρημα (Urysohn)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και A,B μη κενά κλειστά υποσύνολα του X με $A\cap B=\emptyset$. Τότε, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:X\to[0,1]$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(α) *$f(x)=0$ για κάθε $x\in A$.*
(β) *$f(x)=1$ για κάθε $x\in B$.*

$$f(x)=\frac{\mathrm{dist}(x,A)}{\mathrm{dist}(x,A)+\mathrm{dist}(x,B)}$$

Το λήμμα του Urysohn

Ορισμός

Έστω A, B *μη κενά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου* (X, ρ).

(α) *Τα* A, B **διαχωρίζονται** *αν υπάρχουν ανοικτά* G, H *ώστε* $A \subseteq G$, $B \subseteq H$ *και* $G \cap H = \emptyset$.

(β) *Τα* A, B **διαχωρίζονται πλήρως** *αν υπάρχουν ανοικτά* G, H *ώστε* $A \subseteq G$, $B \subseteq H$ *και επιπλέον ισχύει* $\overline{G} \cap \overline{H} = \emptyset$.

Πρόταση

Έστω (X, ρ) *μετρικός χώρος και* E, F *δύο ξένα κλειστά μη κενά υποσύνολα του* X. *Τότε τα* E, F *διαχωρίζονται πλήρως.*

Ομοιόμορφη συνέχεια

Ορισμός

Μία $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ *λέγεται* **ομοιόμορφα συνεχής** *αν:*
για κάθε $\varepsilon>0$ *υπάρχει* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ *ώστε:*
αν $x,y\in X$ *και* $\rho(x,y)<\delta$ *τότε* $\sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$.

f συνεχής: για κάθε $x\in X$ και $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(x,\varepsilon)>0$ ώστε αν $y\in X$ και $\rho(x,y)<\delta$ τότε $\sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Παραδείγματα

Κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι προφανώς συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Παράδειγμα: η συνάρτηση $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *με* $p(x)=x^2$ *δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής: για κάθε* $\delta>0$, *αν επιλέξουμε* $x_\delta=\frac{1}{\delta}$ *και* $y_\delta=\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2}$, *τότε* $|x_\delta-y_\delta|<\delta$ *αλλά*

$$|p(x_\delta)-p(y_\delta)|=1+\frac{\delta^2}{4}>1.$$

Ομοιόμορφη συνέχεια: Αναδιατυπώσεις

Ορισμός

Μία $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ *λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν:*
για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *ώστε:*
αν $x, y \in X$ *και* $\rho(x,y) < \delta$ *τότε* $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Ισοδύναμα,
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$:
$f(B_\rho(x,\delta)) \subseteq B_\sigma(f(x),\varepsilon)$.

Ισοδύναμα,
για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $A \subseteq X$:
$\mathrm{diam}_\rho(A) < \delta \;\Rightarrow\; \mathrm{diam}_\sigma(f(A)) < \varepsilon$.

Ομοιόμορφη συνέχεια

Παραδείγματα

(α) *Κάθε συνάρτηση* $f:(X,\delta)\to(Y,\sigma)$ *από ένα σύνολο με τη διακριτή μετρική σε τυχαίο μετρικό χώρο είναι ομοιόμορφα συνεχής.*
Κάθε ακολουθία $a:\mathbb{N}\to Y$ *είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.*

(β) *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος,* $A\subseteq X$ *και*
$d_A: X\to\mathbb{R}:\ t\mapsto \mathrm{dist}(t,A)\equiv\inf\{\rho(t,a): a\in A\}$.
Η d_A *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*
Αποδ: *για κάθε* $t,s\in X$, $\qquad |d_A(t)-d_A(s)|\le\rho(t,s)$.

(γ) *Κάθε συνεχής συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *η οποία μηδενίζεται έξω από ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, είναι ομοιόμορφα συνεχής (γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό, βλ και Κεφ. 6).*

(δ) *Κάθε συνεχής συνάρτηση* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *η οποία «μηδενίζεται στο άπειρο», δηλαδή* $\lim_{x\to\pm\infty}|f(x)|=0$, *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Ομοιόμορφη συνέχεια

Πρόταση

Έστω $(X,\rho),(Y,\sigma)$ *μετρικοί χώροι και* $f : X \to Y$. *Τότε*

(α) *Η* f *είναι ομοιόμορφα συνεχής.* $\iff$

(β) *Αν* $(x_n),(z_n)$ *στον* X *με* $\rho(x_n,z_n) \to 0$, *τότε* $\sigma(f(x_n),f(z_n)) \to 0$.

Πρόταση

Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$. *Ισχύουν οι συνεπαγωγές:*

(α) *Η* f *είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

$\Downarrow$

(β) *Η* f *απεικονίζει* ρ-*βασικές ακολουθίες σε* σ-*βασικές.*

$\Downarrow$

(γ) *Η* f *είναι συνεχής.*

Παρατήρηση: Εν γένει (γ) $\not\Rightarrow$ (β): π.χ. $f(x) = \frac{1}{x}$ στον $((0,+\infty),|\cdot|)$ και (β) $\not\Rightarrow$ (α): π.χ. $g(x) = x^2$ στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Συναρτήσεις Lipschitz

Ορισμός

Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ και $C>0$. Λέμε ότι η f είναι C–Lipschitz αν για κάθε $x,y\in X$ ισχύει

$$\sigma(f(x),f(y))\leq C\rho(x,y).$$

Λέμε ότι η f είναι Lipschitz αν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz με κάποια σταθερά $C>0$.

(α) Κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Το αντίστροφο δεν ισχύει: π.χ. $f(x)=\sqrt{x}$ στον $(\mathbb{R}_+,|\cdot|)$.

(β) Οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη παράγωγο είναι Lipschitz.

(γ) Έστω X γραμμικός χώρος. Η νόρμα $\|\cdot\|:(X,\|\cdot\|)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι 1–Lipschitz, άρα ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.

Συναρτήσεις Lipschitz

Πρόταση

Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ συνάρτηση Lipschitz. Η f απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα του X σε φραγμένα υποσύνολα του Y.

Παρατήρηση Δεν ισχύει πάντα ότι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση απεικονίζει φραγμένα υποσύνολα σε φραγμένα υποσύνολα. Π.χ.

$$id : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, |\cdot|).$$

Ισομετρίες

Ορισμός (ισομετρία)

Έστω $(X,\rho),(Y,\sigma)$ *δύο μετρικοί χώροι. Μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *λέγεται ισομετρία (isometry) αν διατηρεί τις αποστάσεις, δηλαδή*

$$\sigma(f(x),f(y)) = \rho(x,y)$$

για κάθε $x,y \in X$.

Παρατηρήσεις

(α) *Κάθε ισομετρία είναι 1-1 συνάρτηση.*

(β) *Κάθε ισομετρία είναι συνάρτηση Lipschitz.*

(γ) *Παράδειγμα: ο τελεστής της δεξιάς μετατόπισης (shift operator)* $S_r : \ell_2 \to \ell_2$ *με* $S_r(x_1,x_2,x_3,\dots) = (0,x_1,x_2,\dots)$ *είναι ισομετρία που δεν είναι επί.*

Ισοδύναμες μετρικές

Ορισμός

Έστω X ένα μη κενό σύνολο και ρ, σ δύο μετρικές στο X. Οι ρ και σ λέγονται ισοδύναμες (και γράφουμε $\rho \sim \sigma$) αν ορίζουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες. Δηλαδή $\rho \sim \sigma$ αν και μόνον αν ισχύει η ισοδυναμία

$$x_n \xrightarrow{\rho} x \iff x_n \xrightarrow{\sigma} x.$$

Ισοδύναμες μετρικές

Πρόταση

Έστω X *ένα μη κενό σύνολο και* ρ, σ *δύο μετρικές στο* X. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Οι* ρ, σ *είναι ισοδύναμες.*

(β) *Η ταυτοτική συνάρτηση* $id : (X, \rho) \to (X, \sigma)$ *είναι συνεχής και η* id^{-1} *επίσης.*

(γ) *(Κριτήριο Hausdorff) Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *και για κάθε* $x \in X$ *υπάρχουν* $\delta_1, \delta_2 > 0$ *ώστε* $B_\rho(x, \delta_1) \subseteq B_\sigma(x, \varepsilon)$ *και* $B_\sigma(x, \delta_2) \subseteq B_\rho(x, \varepsilon)$.

(δ) *Το* $G \subseteq X$ *είναι* ρ*–ανοικτό αν και μόνον αν είναι* σ*–ανοικτό.*

(ε) *Το* $F \subseteq X$ *είναι* ρ*–κλειστό αν και μόνον αν είναι* σ*–κλειστό.*

Πρόταση

Αν ρ *είναι μια μετρική στο σύνολο* X, *τότε υπάρχει ισοδύναμη μετρική* σ *στο* X *η οποία είναι φραγμένη.*

Ομοιομορφισμοί

Ορισμός

Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$. Η f λέγεται **ομοιομορφισμός** *(***homeomorphism***) αν είναι 1-1, επί και αμφισυνεχής.*
Οι μετρικοί χώροι (X,ρ) και (Y,σ) λέγονται ομοιομορφικοί αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$.
Γράφουμε $X \overset{\text{hom}}{\sim} Y$ ή $X \simeq Y$.

Παρατηρήσεις

(α) *Η σχέση ομοιομορφισμού μεταξύ μετρικών χώρων είναι σχέση ισοδυναμίας.*

(β) *Έστω ρ και σ δύο μετρικές στο σύνολο X. Αν οι ρ,σ είναι ισοδύναμες, τότε οι μετρικοί χώροι (X,ρ) και (X,σ) είναι ομοιομορφικοί. Το αντίστροφο δεν ισχύει.*

Ομοιομορφισμοί

Πρόταση

Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ *συνάρτηση 1-1 και επί. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η* f *είναι ομοιομορφισμός.*

(β) *Αν* (x_n) *είναι ακολουθία στον* X *και* $x\in X$, *τότε* $x_n \xrightarrow{\rho} x$ *αν και μόνον αν* $f(x_n)\xrightarrow{\sigma} f(x)$.

(γ) $G\subseteq X \quad \rho\text{–ανοικτό} \iff f(G)\subseteq Y \quad \sigma\text{–ανοικτό}.$

(δ) $F\subseteq X \quad \rho\text{–κλειστό} \iff f(F)\subseteq Y \quad \sigma\text{–κλειστό}.$

(ε) *Η* $d(x,y)=\sigma(f(x),f(y))$ *είναι μετρική στο* X *ισοδύναμη με την* ρ.

Πρόταση

Κάθε μετρικός χώρος (X,ρ) *είναι ομοιομορφικός με έναν φραγμένο μετρικό χώρο.*

Συνοψίζουμε:

$f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$.

- Η f λέγεται ομοιομορφισμός : 1-1, επί, συνεχής και $f^{-1}:(Y,\sigma)\to(X,\rho)$ συνεχής.
- $X\simeq Y$ (ομοιομορφικοί) αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$.
- (Αν $X=Y$) $\rho\sim\sigma$ (ισοδύναμες) αν $id:(X,\rho)\to(X,\sigma):x\to x$ ομοιομορφισμός.
- (Αν $C>0$), η f είναι C–Lipschitz αν για κάθε $x,y\in X$ ισχύει

$$\sigma(f(x),f(y))\leq C\rho(x,y).$$

- f ισομετρία αν για κάθε $x,y\in X$

$$\sigma(f(x),f(y))=\rho(x,y).$$

Χώροι ομοιομορφικοί και μη

(α) $\mathbb{R} \not\simeq \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R} \not\simeq \mathbb{Q}$

(β) $\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Q}$

(γ) Τα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $\mathbb{R}$ (και τα δύο με τη συνήθη μετρική) είναι ομοιομορφικά μέσω της συνάρτησης $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, όμως δεν είναι ισομετρικά διότι $diam((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) = \pi$ ενώ $diam(\mathbb{R}) = \infty$.

(δ) $(0,1) \simeq (a,b)$, $[0,1) \simeq [a,b) \simeq (c,d]$ και $[0,1] \simeq [a,b]$.

(ε) Το $(0,1)$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $(a,b) \cup (c,d)$ (όπου $b \leq c$).

(στ) Το $(0,1)$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $[0,1)$.

Πλήρεις μετρικοί χώροι

Ορισμός

Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται **πλήρης** *(***complete***) αν κάθε ρ–βασική ακολουθία (x_n) στον X είναι ρ–συγκλίνουσα.*

Δηλαδή, αν μια ακολουθία (x_n) ικανοποιεί:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \textbf{αν } m,n \geq n_0 \textbf{ τότε } \rho(x_n,x_m) < \varepsilon$$

τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $\rho(x_n,x) \to 0$.

Παραδείγματα (πλήρεις χώροι)

(α) *Αν δ η διακριτή μετρική στο X, ο χώρος (X,δ) είναι πλήρης.*

(β) *Ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος (Απειρ Ι).*

(γ) *Ο $(\mathbb{R}^m,\rho_2)$, όπου ρ_2 η Ευκλείδεια μετρική, είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Παραδείγματα

Παραδείγματα (πλήρεις χώροι)

(δ) *Έστω* $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^k$ *πεπερασμένη ακολουθία μετρικών χώρων. Ο χώρος* $(\prod_{i=1}^k X_i, \sum_{i=1}^k d_i)$ *είναι πλήρης αν και μόνο αν οι* (X_i, d_i) *είναι πλήρεις για* $i = 1, 2, \ldots, k$.

(ε) *Έστω* $\{(X_n, d_n)\}_{n=1}^\infty$ *ώστε* $d_n(x,y) \leq 1$ *για κάθε* $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. *Έστω* $X = \prod_{n=1}^\infty X_n$ *με μετρική την*

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n))$$

όπου $x = (x(1), \ldots, x(n), \ldots) \in X$. *Αν οι* X_n *είναι πλήρεις μετρικοί χώροι τότε και ο* (X, d) *είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Παραδείγματα

Παραδείγματα (μη πλήρεις χώροι)

(α) *Ο* $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ *δεν είναι πλήρης.*

(β) *Ο χώρος* $(\mathbb{R}, \sigma)$ *με τη μετρική* $\sigma(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ *δεν είναι πλήρης:*
Η ακολουθία $x_n = n$ *είναι* σ*-βασική, αλλά δεν είναι* σ*-συγκλίνουσα. Οι ομοιομορφισμοί δεν διατηρούν κατ΄ ανάγκη πληρότητα.*

Χώροι Banach

Ορισμός

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Ο X λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που επάγεται από τη νόρμα, δηλαδή αν ο (X, d) όπου $d(x,y) = \|x - y\|$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Πρόταση

Έστω Γ μη κενό σύνολο. Ο χώρος $\ell_\infty(\Gamma)$ των φραγμένων συναρτήσεων $x : \Gamma \to \mathbb{R}$, με μετρική την

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|x(i) - y(i)| : i \in \Gamma\}$$

είναι πλήρης.

Πόρισμα

Ο χώρος ℓ_∞ των φραγμένων ακολουθιών με μετρική την d_∞ είναι πλήρης.

Πλήρεις μετρικοί χώροι

Λήμμα

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος και* $F \subseteq X$. *Αν ο* $(F,\rho|_F)$ *είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε το* F *είναι κλειστό στον* X.

Λήμμα

Έστω (X,ρ) ***πλήρης*** *μετρικός χώρος και έστω* $F \subseteq X$. *Αν το* F *είναι κλειστό στον* X *τότε ο* $(F,\rho|_F)$ *είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Επομένως:

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *πλήρης μετρικός χώρος και* $F \subseteq X$. *Το* F *είναι κλειστό στον* X *αν και μόνον αν ο* $(F,\rho|_F)$ *είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Πλήρεις μετρικοί χώροι

Πόρισμα

Ο χώρος c_0 των μηδενικών ακολουθιών με τη μετρική d_∞ (που επάγεται από τον ℓ_∞) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Πόρισμα

Ο χώρος $C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} | \text{συνεχής}\}$ με τη μετρική d_∞ (που επάγεται από τον $\ell_\infty([a,b])$) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστοί υπόχωροι του αντίστοιχου $\ell_\infty(\Gamma)$.

Θεώρημα Cantor

Γενικεύει: αρχή κιβωτισμού στο $(\mathbb{R},|\cdot|)$.

Θεώρημα (Cantor–Fréchet)

Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος. Τότε:
Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X με $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$, ισχύει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.
Μάλιστα, υπάρχει $x\in X$ ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$.

Αναγκαιότητα υποθέσεων: Πρδγ: Στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$:

- $F_n=(0,\frac{1}{n})$: φθίνουν, $\mathrm{diam}(F_n)\to 0$, αλλά $\bigcap_n F_n=\emptyset$: όχι κλειστά!
- $F_n=[n,\infty)$: φθίνουν, κλειστά, αλλά $\bigcap_n F_n=\emptyset$: $\mathrm{diam}(F_n)\not\to 0$.

Θεώρημα Cantor

Πρόταση (Αντίστροφο)

Αν στον (X,ρ) κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X με $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$ έχει $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, τότε ο (X,ρ) είναι πλήρης.

Σε μη πλήρη, π.χ. $(\mathbb{Q}^c, |\cdot|)$:

- $F_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$: φθίνουν, $\operatorname{diam}(F_n)\to 0$, αλλά $\bigcap_n F_n = \emptyset$.

Θεώρημα Cantor (Απόδειξη)

Παρατήρηση

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος και* $\{A_n\}$ *ακολουθία υποσυνόλων του* X *με* $\mathrm{diam}(A_n) \to 0$.
Τότε, το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *περιέχει το πολύ ένα στοιχείο.*

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X.
Η ουρά της (x_n):

$$R_n = \{x_k : k \geq n\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Λήμμα

Στον (X,ρ) *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για την* (x_n)*:*

(α) *Η ακολουθία* (x_n) *είναι βασική.*

(β) $\mathrm{diam}(R_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

Το θεώρημα κατηγορίας του Baire

Αν $G_1, G_2, \ldots, G_m$ ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του (X,ρ), το $\bigcap_{i=1}^m G_i$ είναι πυκνό (και φυσικά, ανοικτό). [Εξηγείστε γιατί]
Για άπειρα: όχι πάντα.
Παράδειγμα: στον $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ θεωρούμε μια αρίθμηση (q_n) του $\mathbb{Q}$ και ορίζουμε $G_n = \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}$. Τα G_n είναι ανοικτά και πυκνά στον $\mathbb{Q}$, αλλά η τομή τους είναι κενή.

Θεώρημα (Baire)

Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος. Αν (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X, τότε $\bigcap_{n=1}^\infty G_n \neq \emptyset$. Μάλιστα, είναι πυκνό στον X.

Αναδιατύπωση:

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος. Αν (F_n) ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcup_{n=1}^\infty F_n = X$, τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}(F_k) \neq \emptyset$.

Θεώρημα κατηγορίας Baire: Απόδειξη

Έστω $V \subseteq X$ ανοικτό μη κενό. Ν.δ.ο. $V \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n) \neq \emptyset$.
$\overline{G}_1 = X \;\Rightarrow\; V \cap G_1 \neq \emptyset$ και ανοικτό, άρα

υπάρχει κλειστή $\hat{B}(x_1, r_1) \subseteq V \cap G_1$ με $0 < r_1 < 1$.

$\overline{G}_2 = X \;\Rightarrow\; G_2 \cap B(x_1, r_1) \neq \emptyset$ και ανοικτό άρα

υπάρχει $\hat{B}(x_2, r_2) \subseteq G_2 \cap B(x_1, r_1) \subseteq V \cap G_1 \cap G_2$ με $0 < r_2 < 1/2$.

Επαγωγή: για κάθε n υπάρχει $\hat{B}(x_n, r_n)$:

- $\mathrm{diam}(\hat{B}(x_n, r_n)) \leq \frac{2}{n}$
- $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$, άρα $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq \hat{B}(x_{n-1}, r_{n-1})$ και
- $\hat{B}(x_n, r_n) \subseteq V \cap G_1 \cap \cdots \cap G_n$.

Cantor: υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, r_n)$. Τότε $x \in V \cap G_1 \cap \ldots \cap G_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σύνολα G_δ και F_σ

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και έστω $A\subseteq X$.

(α) Το A λέγεται σύνολο G_δ αν μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών υποσυνόλων του X.
(β) Το A λέγεται σύνολο F_σ αν μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του X.

Παραδείγματα Στον $(\mathbb{R},|\cdot|)$: (α) Το $(a,b]$ είναι F_σ και G_δ: Αν $k\in\mathbb{N}$, αρκετά μεγάλο:

$$(a,b]=\bigcup_{n=k}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n},b\right]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a,b+\frac{1}{n}\right).$$

(β) Το $\mathbb{Q}$ είναι F_σ (προφ.) αλλά όχι G_δ (αποδ.: σε λίγο!)

Θεώρημα κατηγορίας Baire

Πόρισμα

Έστω G πυκνό και G_δ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, το G είναι υπεραριθμήσιμο.

Πόρισμα

Το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

…γιατί είναι πυκνό και αριθμήσιμο.

Θεώρημα κατηγορίας Baire

Ορισμός

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος.

(α) Ένα υποσύνολο A του X λέγεται **πουθενά πυκνό** *ή* **αραιό** *αν ισχύει $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$. (Δεν αρκεί $\mathrm{int}(A) = \emptyset$: π.χ. $\mathbb{Q}$ στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.)*

(β) Ένα υποσύνολο B του X λέγεται **πρώτης κατηγορίας** *(στον X) αν μπορεί να γραφεί ως αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων του X, δηλαδή αν υπάρχουν E_n, $n = 1, 2, \ldots$ πουθενά πυκνά υποσύνολα του X, ώστε $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.*

(γ) Ένα υποσύνολο C του X λέγεται **δεύτερης κατηγορίας** *(στον X) αν δεν είναι πρώτης κατηγορίας.*

Το θεώρημα Baire διατυπώνεται ως εξής:

> *Κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι σύνολο δεύτερης κατηγορίας (στον εαυτό του).*

Δυο εφαρμογές

Θεώρημα (Osgood)

Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι για κάθε* $t \in [0,1]$ *η ακολουθία* $(f_n(t))$ *είναι (κ.σ.) φραγμένη, δηλ.* $\sup_n |f_n(t)| \equiv M_t < \infty$. *Τότε, υπάρχουν* $a < b$ *στο* $[0,1]$ *και* $M > 0$ *ώστε, για κάθε* $t \in [a,b]$ *και κάθε* $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(t)| \leq M.$$

Δηλαδή, υπάρχει $[a,b]$ *ώστε η* (f_n) *να είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο* $[a,b]$.

Θεώρημα

Θεωρούμε τον χώρο $\mathscr{C}([0,1])$ *των συνεχών συναρτήσεων στο* $[0,1]$ *με μετρική την* $d_\infty(f,g) = \max_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)|$ *(είναι πλήρης). Το σύνολο* M *των* $f \in \mathscr{C}([0,1])$ *που δεν έχουν παράγωγο σε κανένα σημείο του* $[0,1]$ *είναι πυκνό στον* $\mathscr{C}([0,1])$.

(Η απόδειξη παραλείπεται.)

Ταλάντωση

Ορισμός

Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ *μια συνάρτηση. Αν* $x\in X$, *η* **ταλάντωση** *της* f *στο* x *ορίζεται ως εξής:*

$$\begin{aligned}\tau_f(x) &= \inf\{\mathrm{diam}(f(B_\rho(x,\delta))) : \delta>0\}\\ &= \lim_{\delta\downarrow 0}\mathrm{diam}(f(B_\rho(x,\delta)))\in[0,+\infty].\end{aligned}$$

Πρόταση

Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ *και* $x\in X$. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η* f *είναι συνεχής στο* x.

(β) $\tau_f(x)=0$.

Σημεία συνέχειας

Θεώρημα

Το σύνολο $C(f)$ των σημείων συνέχειας μιας $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ είναι G_δ–υποσύνολο του X.

Γιατί το $D(f)$ είναι F_σ:

$$D(f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in X:\tau_f(x)\geq\frac{1}{n}\}$$

Παρατήρηση: Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής σε κάθε άρρητο και ασυνεχής σε κάθε ρητό (δηλ. $C(f)=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$).
(Στο $[0,1]$: $f(\frac{m}{n})=\frac{1}{n}$ όταν $(m,n)=1$ και $f(x)=0$ όταν $x\notin\mathbb{Q}$).

Πόρισμα

Δεν υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $C(f)=\mathbb{Q}$.

… γιατί το $\mathbb{Q}$ δεν είναι G_δ.

Το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

Ορισμός (σταθερό σημείο)

Έστω $f : X \to X$ *συνάρτηση και έστω* $x_0 \in X$. *Το* x_0 *λέγεται* **σταθερό σημείο** *της* f *αν ισχύει* $f(x_0) = x_0$.
Συμβολίζουμε με $\mathrm{Fix}(f)$ *το σύνολο των σταθερών σημείων της* f.

Αν f συνεχής, το $\mathrm{Fix}(f)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

Θεώρημα (Banach)

Έστω (X, ρ) *πλήρης μετρικός χώρος και* $T : X \to X$ *συνάρτηση με την ιδιότητα: υπάρχει* $0 < c < 1$ *ώστε*

$$\rho(T(x), T(y)) \leq c \cdot \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. *Τότε, υπάρχει μοναδικό* $z \in X$ *ώστε* $T(z) = z$.

(α) Σφάλμα στο n-οστό βήμα:

$$\rho(T^n(x), z) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot \rho(x, T(x)).$$

(β) Η συνάρτηση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = \log(1 + e^x)$ ικανοποιεί την $|T(x) - T(y)| < |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, αλλά δεν έχει σταθερό σημείο.

(γ) Η πληρότητα του (X, ρ) δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παράδειγμα: αν $f : (0,1) \to (0,1)$ με $f(x) = \frac{x}{2}$ τότε $|f(x) - f(y)| \leq \frac{6}{7}|x - y|$ για κάθε $x, y \in (0,1)$, αλλά η f δεν έχει σταθερό σημείο.

Πλήρωση μετρικού χώρου

Ορισμός (πλήρωση μετρικού χώρου)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ένας πλήρης μετρικός χώρος (Y,σ) λέγεται **πλήρωση** *του X αν υπάρχει ισομετρία $T: X \to Y$ για την οποία ο $T(X)$ είναι πυκνός υπόχωρος του Y.*

Θεώρημα (ύπαρξη πλήρωσης)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε, υπάρχουν πλήρης μετρικός χώρος $(\tilde{X},\tilde{\rho})$ και $T: X \to \tilde{X}$ ισομετρία ώστε ο $T(X)$ να είναι πυκνός υπόχωρος του $\tilde{X}$.

Λήμμα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τότε υπάρχει ισομετρική εμφύτευση $T:(X,\rho) \to (\ell^\infty(X), d_\infty)$.

$$T: x \to f_x \quad \text{όπου} \quad f_x(t) = \rho(t,x) - \rho(t,a), \quad t \in X.$$

Πλήρωση μετρικού χώρου

Θεώρημα (Ουσιαστική μοναδικότητα πλήρωσης)

Έστω $(\tilde{X}_1, \rho_1)$ *και* $(\tilde{X}_2, \rho_2)$ *δύο πληρώσεις του ίδιου μετρικού χώρου* (X, ρ). *Τότε, υπάρχει* $\tau : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$, *ισομετρία επί, τέτοια ώστε* $\tau(T_1(x)) = T_2(x)$ *για κάθε* $x \in X$.

$$
\begin{array}{ccc}
\tilde{X}_1 & \xrightarrow{\tau} & \tilde{X}_2 \\
\cup & & \cup \\
T_1(X) & \longrightarrow & T_2(X) \\
\uparrow T_1 & & \uparrow T_2 \\
X & \xrightarrow{i} & X
\end{array}
$$

(Η απόδειξη παραλείπεται.)

Συμπάγεια

Ορισμός (ανοικτό κάλυμμα)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Μια οικογένεια $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X λέγεται **ανοικτό κάλυμμα** *του A, αν $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$.*
Αν υπάρχει $J \subseteq I$ με $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$, τότε η $\{U_i\}_{i\in J} \subseteq \mathscr{U}$ λέγεται **υποκάλυμμα του** $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ **για το** A.

Ορισμός (συμπάγεια)

Ένας (X,ρ) μετρικός χώρος λέγεται **συμπαγής (compact)** *αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Με άλλα λόγια, αν ισχύει το εξής:*

> *Για κάθε οικογένεια $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X ώστε $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων $U_{i_1}, \ldots, U_{i_m}$ του καλύμματος $\mathscr{U}$ ώστε $X = U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}$.*

Συμπάγεια

Ορισμός (συμπάγεια)

Ένα υποσύνολο K του (X,ρ) λέγεται συμπαγές, αν είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική ρ_k.

Πρόταση

Ένα υποσύνολο K του (X,ρ) είναι συμπαγές αν και μόνον αν για κάθε κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K από ρ-ανοικτά υποσύνολα του X, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $(V_{i_j})_{j=1}^m$ του $(V_i)_{i\in I}$ που καλύπτει: $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_{i_j}$.

Παραδείγματα

(α) *Αν δ είναι η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο X, ο χώρος (X,δ) είναι συμπαγής αν και μόνον αν το X είναι πεπερασμένο.*

(β) *Ο $(\mathbb{R},|\cdot|)$ δεν είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Συμπάγεια

Παραδείγματα

(γ) *Το σύνολο* $S_{\ell_\infty} = \{x = (x(n)) \in \ell_\infty : \|x\|_\infty = 1\}$ *δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του* ℓ_∞.

(δ) *Αν* (X,ρ) *μετρικός χώρος,* $x \in X$ *και* (x_n) *στον* X *ώστε* $x_n \to x$, *το* $K = \{x_n : n = 1,2,\dots\} \cup \{x\}$ *είναι συμπαγές στον* X.

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος και έστω* K *συμπαγές υποσύνολο του* X. *Τότε, το* K *είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του* X.

Αντίστροφο όχι πάντα: δες το Παράδειγμα (γ).

Πρόταση

Έστω (X,ρ) *συμπαγής μετρικός χώρος και* F *κλειστό υποσύνολο του* X. *Τότε, το* F *είναι συμπαγές.*

Χαρακτηρισμός της συμπάγειας

Ορισμός (ακολουθιακά συμπαγής χώρος)

Ένας (X,ρ) μετρικός χώρος λέγεται **ακολουθιακά συμπαγής** *(***sequentially compact***) αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει υπακολουθία (x_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$.*

Ορισμός (ολικά φραγμένος χώρος)

Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται **ολικά φραγμένος** *(***totally bounded***) αν καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος από «οσοδήποτε μικρές μπάλες», δηλ. αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_m \in X$ ώστε*

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon).$$

Γενικότερα, ένα $A \subseteq X$ λέγεται ολικά φραγμένο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_m \in X$ ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon).$$

Χαρακτηρισμός της συμπάγειας

Παρατηρήσεις

1. Αν $A \subseteq X$ ολικά φραγμένο, κάθε $B \subseteq A$ είναι ολικά φραγμένο.
2. Μπορούμε να πετύχουμε τα «κέντρα» x_i να είναι στο A (αν $A \neq \emptyset$).

Παραδείγματα

(α) *Ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ δεν είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος (ενώ το $(0,1)$ είναι).*

(β) *Αν δ είναι η διακριτή μετρική σε ένα σύνολο X, ο χώρος (X, δ) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν το X είναι πεπερασμένο σύνολο.*

(δ) *Ο χώρος [4] $(S_{\ell_\infty}, d_\infty)$ είναι φραγμένος, αλλά όχι ολικά φραγμένος.*

---

[4] $S_{\ell_\infty} = \{x = (x(n)) \in \ell_\infty : \|x\|_\infty = 1\}$

Χαρακτηρισμός της συμπάγειας

Θεώρημα (χαρακτηρισμός της συμπάγειας)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Ο (X,ρ) είναι συμπαγής.*
2. *Κάθε άπειρο υποσύνολο A του X έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης στο X (δηλαδή, $A' \neq \emptyset$).*
3. *Ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής.*
4. *Ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος.*

Βασικές ιδιότητες συμπαγών συνόλων

Πρόταση

Έστω $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ μετρικοί χώροι. Αν $A \subseteq X_1$, $B \subseteq X_2$ είναι συμπαγή, τότε το $A \times B \subseteq X_1 \times X_2$ είναι συμπαγές ως προς οποιαδήποτε μετρική γινόμενο στον $X_1 \times X_2$.

Το επόμενο είναι άμεση συνέπεια:

Θεώρημα

Έστω $(X_i, d_i)_{i=1}^m$ συμπαγείς μετρικοί χώροι. Αν $X = \prod_{i=1}^m X_i$ είναι ο χώρος γινόμενο των X_i και d είναι οποιαδήποτε μετρική γινόμενο στο X, τότε ο (X, d) είναι συμπαγής.

Βασικές ιδιότητες συμπαγών συνόλων

Αν $K \subseteq X$ είναι συμπαγές, τότε είναι κλειστό και φραγμένο.
Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα: στον $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$, η $\hat{B}(0,1)$ είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο, αλλά όχι συμπαγές: η $(e_n)_n$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, με την Ευκλείδεια μετρική. Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Βασικές ιδιότητες συμπαγών συνόλων

Θεώρημα

Κάθε ολικά φραγμένος μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος. Ειδικότερα, κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.

Ορισμός (ιδιότητα πεπερασμένων τομών)

Μια οικογένεια $(F_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων ενός συνόλου $X \neq \emptyset$ έχει την **ιδιότητα πεπερασμένων τομών** *αν για κάθε μη κενό πεπερασμένο $J \subseteq I$ ισχύει*

$$\bigcap_{i\in J} F_i \neq \emptyset.$$

Παράδειγμα: (α) Η οικογένεια $\{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. (β) Η οικογένεια όλων των $A \subseteq \mathbb{N}$ με $\mathbb{N} \setminus A$ πεπερασμένο.

Θεώρημα

Ο (X,ρ) είναι συμπαγής $\iff$ Αν $F_i \subseteq X$ κλειστά και η $(F_i)_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, τότε

$$\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset.$$

Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή σύνολα

Θεώρημα

Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ *συνεχής.*
(X,ρ) *συμπαγής* $\implies$ f *ομοιόμορφα συνεχής.*

Θεώρημα

Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ *συνεχής.*
$K\subseteq X$ *συμπαγές* $\implies$ $f(K)\subseteq Y$ *συμπαγές.*

Πρόταση

Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ *συνεχής,* $1-1$ *και επί.*
(X,ρ) *συμπαγής* $\implies$ f *ομοιομορφισμός.*

Σημείωση. Η υπόθεση: «(X,ρ) συμπαγής» δεν μπορεί να παραλειφθεί. Παράδειγμα, η συνάρτηση $f:[0,1)\cup[2,3]\to[0,2]$ με $f(x)=x$ αν $0\leq x<1$ και $f(x)=x-1$ αν $2\leq x\leq 3$. Η f είναι συνεχής, 1-1, επί, όμως η f^{-1} δεν είναι συνεχής (στο σημείο $y=1$).

Συνεχείς συναρτήσεις σε συμπαγή σύνολα

Πόρισμα

Ειδικότερα αν $f:(X,\rho)\to(Y,\sigma)$ *συνεχής και* (X,ρ) *συμπαγής, τότε* $f(X)\subseteq Y$ *συμπαγές.*

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) *συμπαγής μετρικός χώρος και* $f:X\to\mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Τότε, η* f *παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Ακολουθίες συναρτήσεων: Υπενθύμιση

Έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Θεωρούμε την ακολουθία (x^n).
Συγκλίνει; Αν ναι, πού;
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g_n : [0,1] \to \mathbb{R} \quad \text{με} \quad g_n(x) = x^n.$$

Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (g_n).
Για κάθε $x \in [0,1]$, η ακολουθία αριθμών $(g_n(x))$ συγκλίνει.
Συγκλίνει «εξ ίσου γρήγορα» σε όλα τα x;

Υπενθύμιση II

$$x \in \mathbb{R}, x \neq 1:$$
$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1-x^{n+1}$$
$$\textit{άρα} \quad 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

άρα, αν $|x|<1$, $\qquad 1+x+x^2+\cdots+x^n \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{1-x}$

Αν όμως $|x| \geq 1$ η σειρά $\quad 1+x+x^2+\cdots+x^n+\ldots$ αποκλίνει.

Γράψε $f_n(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n$, $(n \in \mathbb{N})$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Πού ορίζονται; Τι σχέση έχουν;

Ακολουθίες (και σειρές) συναρτήσεων

Έστω X σύνολο, (Y,ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός (κατά σημείο σύγκλιση)

Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει **κατά σημείο** *(***pointwise***) στην f αν: Για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ συγκλίνει στο $f(x) \in Y$, δηλ. $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n(x), f(x)) = 0$. Αναλυτικά: Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.*

Πρόταση

Έστω X σύνολο, $f_n, f, g_n, g : X \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \xrightarrow{k.s.} f$ κατά σημείο και $g_n \xrightarrow{k.s.} g$, τότε: **(i)** *για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύει $af_n + bg_n \xrightarrow{k.s.} af + bg$ και* **(ii)** *$f_n g_n \xrightarrow{k.s.} fg$ κατά σημείο.*

Κατά σημείο σύγκλιση

Πρόβλημα (1)

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

Όχι: π.χ. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : f_n(t) = t^n$: συνεχείς.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases} \qquad \text{ασυνεχής.}$$

Κατά σημείο σύγκλιση

Πρόβλημα (2)

Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \xrightarrow{k.s.} f$ και κάθε f_n είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, είναι σωστό
(α) ότι η f είναι R–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$;
(β) (όταν είναι R-ολοκλ.) ότι $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$;

(α) Όχι: αν π.χ. $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$, $f_n = \chi_{\{q_1,\dots,q_n\}} \xrightarrow{k.s.} f = \chi_{\mathbb{Q}}$, η f δεν είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
(β) Όχι: π.χ. $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R} :\ f_n(t) = n^2 t(1-t)^n$, $f(t) = 0$.

Κατά σημείο σύγκλιση

Πρόβλημα (3)

Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I, ισχύει
(α) ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I;
(β) (όταν είναι) ότι $f_n' \to f'$ κατά σημείο;

(α) Όχι: αν $f_n(t) = t^n$ στο $[0,1]$, η f με $f(t) = \lim_n f_n(t)$ δεν είναι καν συνεχής.
(β) Όχι: π.χ. (ι) $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R} : f_n(t) = \frac{t}{1+nt}, f(t) = 0.$
π.χ. (ιι) $g_n, g : (0,\pi) \to \mathbb{R} : g_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n}, g(t) = 0.$

Κατά σημείο σύγκλιση

Παραδείγματα (εναλλαγή ορίων)

(α) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f_n(t) = t^n$

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{t\to 1} f_n(t)) = 1 \neq 0 = \lim_{t\to 1}(\lim_{n\to\infty} f_n(t)).$$

Εδώ $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t = 1. \end{cases}$

(β) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *με* $f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/n \\ \sin(\pi/t), & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}$

Εδώ $\lim_{n\to\infty}(\lim_{t\to 0} f_n(t)) = 0$ *ενώ το* $\lim_{t\to 0}(\lim_{n\to\infty} f_n(t))$ *ΔΕΝ υπάρχει.*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sin(\pi/t), & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Ακολουθίες (και σειρές) συναρτήσεων

Έστω X σύνολο, (Y,ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός (κατά σημείο σύγκλιση)

Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει **κατά σημείο** *(***pointwise***) στην f αν:*
Για κάθε $x \in X$ η ακολουθία $(f_n(x))$ συγκλίνει στο $f(x) \in Y$, δηλ. $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n(x), f(x)) = 0$. *Αναλυτικά:*
Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(x,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Ορισμός (ομοιόμορφη σύγκλιση)

Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει **ομοιόμορφα** *(***uniformly***) στην f αν:*
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ να ισχύει $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

$$f_n \xrightarrow{om.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{k.s.} f$$

αλλά $\quad f_n \xrightarrow{k.s.} f \not\Rightarrow f_n \xrightarrow{om.} f \quad$ π.χ. $\; f_n(t) = t^n,\ t \in (0,1)$

γιατί $\quad \sup\{t^n : t \in (0,1)\} = 1$ για κάθε n.

Έστω X σύνολο, (Y,ρ) μετρικός χώρος, $f_n, f : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός (ομοιόμορφη σύγκλιση)

Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει **ομοιόμορφα** *(***uniformly***) στην f αν:*
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ να ισχύει $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Όταν $(Y,\rho) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$:

> *Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ (η $f - f_n$ είναι φραγμένη και) ισχύει $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.*

Γεωμετρικά:
για $n \geq n_0$, τα γραφήματα όλων των f_n βρίσκονται ολόκληρα μέσα στη ζώνη κατακόρυφου πλάτους 2ε γύρω από το γράφημα της f.

Μελέτη ομοιόμορφης ή μη σύγκλισης

Διαδικασία:
Δίδεται ακολουθία (f_n) όπου $f_n : X \to \mathbb{R}$.

1. *Υπάρχει f ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο;*
   Για κάθε $x \in X$ έχουμε $(f_n(x))$: ακολουθία *αριθμών*.
   Αν για κάθε $x \in X$ το $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ υπάρχει, ορίζουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
2. *Εξετάζουμε αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα:*
   Για τη συνάρτηση $f_n - f$ βρίσκουμε το $\|f_n - f\|_\infty \in [0, +\infty]$:
   Ισχύει $f_n \xrightarrow{om.} f$ ανν η ακολουθία $(\|f_n - f\|_\infty)$ συγκλίνει στο 0 όταν $n \to \infty$.

Παραδείγματα

(α) (X,d) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \to x$, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = d(t,x_n)$ και $f(t) = d(t,x)$ για $t \in X$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη: $|f_n(t) - f(t)| \leq d(x_n,x)$ ανεξ. του t.

(β) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Είδαμε ότι $f_n \to 0$ κατά σημείο.
Όμως,

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup\left\{\frac{|x|}{n} : x \in \mathbb{R}\right\} = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(γ) $f_n, f : [0,M] \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$, $f(t) = e^t$.
Γνωστό: Για κάθε $t \geq 0$, $f_n(t) \nearrow f(t)$.

$$\|f - f_n\|_\infty \stackrel{?}{=} e^M - \left(1 + \frac{M}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_n \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

(δ) $h_n, h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $h_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$, $h(t) = e^t$.

$$\|h - h_n\|_\infty \geq e^n - \left(1 + \frac{n}{n}\right)^n = e^n - 2^n \to +\infty.$$

Παραδείγματα

(ε) $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{n}{x+n^2}$. Για κάθε $x \geq 0$ έχουμε

$$|f_n(x)| = \frac{n}{x+n^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} : \quad \text{ομοιόμορφη.}$$

(στ) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Είδαμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases} \qquad \text{όχι ομοιόμορφη.}$$

(ζ) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ \frac{nx}{2}, & 0 \leq x < \frac{1}{n}. \end{cases} \overset{k.s.}{\to} 0$.

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n(1/n) = 1/2 : \qquad \text{όχι ομοιόμορφη.}$$

(η) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)x-1}, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \\ n^2 x, & 0 \leq x < \frac{1}{n} \end{cases} \overset{k.s.}{\to} 0$.

$$\|f_n - 0\|_\infty = f_n(1/n) = n \to \infty \qquad \text{όχι ομοιόμορφη.}$$

Πρόταση

Έστω X σύνολο, $f,g : X \to \mathbb{R}$ και (f_n), (g_n) ακολουθίες συναρτήσεων $X \to \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$.

(α) *Αν $f_n \xrightarrow{om} f$ και $g_n \xrightarrow{om} g$, τότε $af_n + bg_n \xrightarrow{om} af + bg$.*

(β) *Αν, επιπλέον, όλες οι f_n και g_n είναι φραγμένες στο X, τότε (οι f, g είναι φραγμένες και) $f_n g_n \xrightarrow{om} fg$.*

Στο (β), η «επιπλέον» υπόθεση δεν μπορεί εν γένει να παραλειφθεί.

Αντιπαράδειγμα: $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου $f_n(t) = t + \frac{1}{n}$, $g_n(t) = t$

$f_n \to f$ ομοιόμορφα όπου $f(t) = t$

$g_n \to g = f$ ομοιόμορφα

$(f_n g_n) \to fg$ κατά σημείο, όχι ομοιόμορφα.

Θεώρημα (κριτήριο Cauchy)

Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}\,(n \in \mathbb{N})$. *Υπάρχει* $f : X \to \mathbb{R}$ *ώστε* $f_n \xrightarrow{om} f$
$\iff$ *για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *ώστε:*
αν $n, m \geq n_0$ *τότε* $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.

Αποδ:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \text{ αν } n \geq n_0 \text{ τότε } \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$$
$$\Rightarrow \text{ αν } n, m \geq n_0 \text{ τότε } \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$$

Αντίστροφα: Αν $g_n = f_n - f_{n_0}\,(n \geq n_0)$ τότε $g_n \in \ell^\infty(X)$ και (g_n) είναι $\|\cdot\|_\infty$–βασική, άρα (αφού $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ πλήρης) $\exists g \in \ell^\infty(X)$ ώστε $\|g_n - g\|_\infty \to 0$, οπότε αν $f = g + f_{n_0}$ τότε $f_n \xrightarrow{om} f$.

Κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης

Πρόταση

Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $f_n : X \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f_n \xrightarrow{o\mu} f$. Τότε, για κάθε $x_0 \in X$ και κάθε ακολουθία (x_n) του X με $x_n \to x_0$ ισχύει $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

Αποδ: $|f_n(x_n) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x_0)|$.

Θεώρημα (Dini)

Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $f_n : X \to \mathbb{R}$ μονότονη ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$. Τότε, $f_n \xrightarrow{om} f$.

Αποδ: Αν $\varepsilon > 0$, βάλε $K_n(\varepsilon) = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$ κλειστό. Δείξε ότι $K_n(\varepsilon) \supseteq K_{n+1}(\varepsilon)$ και $\bigcap_n K_n(\varepsilon) = \emptyset$.

Συνέχεια

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) *μετρικός χώρος,* $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ *και* $x_0 \in X$.
Υποθέτουμε ότι:

1. $f_n \to f$ *ομοιόμορφα στο* X, *και*
2. *κάθε* f_n *είναι συνεχής στο* x_0.

Τότε, η f *είναι κι αυτή συνεχής στο* x_0.
Ειδικότερα, αν κάθε f_n *είναι συνεχής στο* X, *τότε η* f *είναι συνεχής στο* X.

Άρα, αν f_n συνεχείς, $f_n \to f$ και f όχι συνεχής, τότε σύγκλιση όχι ομοιόμορφη.

Ολοκλήρωμα

Θεώρημα

Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων ορισμένες σε κλειστό διάστημα $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Τότε,
(α) η f είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$
και (β) $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

(Η απόδειξη του (α) παραλείπεται.)

Παράγωγος

Παράδειγμα: (f_n) στο $(0,\pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \xrightarrow{om} 0$ αλλά (f_n') δεν συγκλίνει ούτε κ.σ.

Πρόταση

Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f_n \to f$ κατά σημείο. Υποθέτουμε ότι
(α) κάθε f_n παραγωγίσιμη στο $[a,b]$
(β) κάθε f_n' συνεχής στο $[a,b]$
(γ) η (f_n') συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,b]$.
Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f' = \lim f_n'$.

Παρατήρηση: Μάλιστα έπεται ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

Παράγωγος

Ισχύει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Θεώρημα

Έστω $f_n, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι*
(α) κάθε f_n *παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$
(β) κάθε f_n' *συνεχής στο* $[a, b]$
(γ) $f_n' \to g$ *ομοιόμορφα στο* $[a, b]$, *και*
(δ) υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ *ώστε η* $(f_n(x_0))$ *να συγκλίνει (στο* $\mathbb{R}$*).*
Τότε η (f_n) *συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση*
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$ *και* $f' = g$.

Σειρές Συναρτήσεων

Ορισμός

Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *θεωρούμε τη συνάρτηση* $s_n : X \to \mathbb{R}$ *με*

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : X \to \mathbb{R}$ *ώστε* $s_n \xrightarrow{k.s.} s$ *στο* X, *λέμε ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **συγκλίνει κατά σημείο στην** s **στο** X *και γράφουμε*

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k.$$

Αν $s_n \xrightarrow{om} s$, *λέμε ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **συγκλίνει ομοιόμορφα στην** s **στο** X.

Παραδείγματα

(α) *Η γεωμετρική σειρά* $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{για κάθε } x \in (-1,1).$$

Όμως

$$\sup\{|s_n(x) - s(x)| : x \in (-1,1)\} = +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$*: **σύγκλιση όχι ομοιόμορφη**.*

(β) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$.

Σύγκλιση ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{R}$, ***όχι όμως σε ολόκληρο το*** $\mathbb{R}$.

Σειρές Συναρτήσεων

Πρόταση

Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* s *στο* X, *τότε συγκλίνει κατά σημείο στην* s *στο* X.

Πρόταση

Έστω $f_k, g_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ *και* $a, b \in \mathbb{R}$. *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} g_k = g$ *ομοιόμορφα στο* X, *τότε* $\sum_{k=1}^{\infty}(af_k + bg_k) = af + bg$ *ομοιόμορφα στο* X. *Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.*

Πρόταση (κριτήριο Cauchy)

Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο* X *αν και μόνον αν ισχύει το εξής: για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε: για κάθε* $n > m \geq n_0$ *και για κάθε* $x \in X$,

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Θεώρημα (κριτήριο Weierstrass)

Έστω $f_k : X \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις, $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι

$$\sup\{|f_k(x)| : x \in X\} \leq M_k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

δηλαδή ότι ο M_k είναι άνω φράγμα της $|f_k|$, και ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X.

Μάλιστα $\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_\infty$.

Παράδειγμα

Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$. συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, μάλιστα συνεχή.

Θεώρημα

Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $f, f_k : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$. Αν

1. *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X, και*
2. *κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0.*

Τότε η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0.
Ειδικότερα, αν κάθε f_k είναι συνεχής στο X, τότε η f είναι συνεχής στο X.

Θεώρημα

Έστω (f_k) ακολουθία συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Έστω ότι κάθε $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann–ολοκληρώσιμη και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a,b]$.
Τότε η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x) \right) dx.$$

Σειρές Συναρτήσεων

Παράδειγμα (Weierstrass, 1872): $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cos(10^k \pi x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα αλλά δεν παραγωγίζεται πουθενά!

Θεώρημα

Έστω $f_k, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ώστε* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f$ *κατά σημείο.*

Υποθέτουμε ότι

(α) *κάθε* f_k *παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$

(β) *η* f_k' *συνεχής στο* $[a, b]$

(γ) *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[a, b]$

Τότε *η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$ *και*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'.$$

Μάλιστα έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

Ισχύει το εξής ισχυρότερο αποτέλεσμα:

Θεώρημα

Έστω $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι*
(α) κάθε f_k *παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$
(β) η f_k' *συνεχής στο* $[a, b]$
(γ) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* $[a, b]$, *και*
(δ) υπάρχει $x \in [a, b]$ *ώστε η* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *να συγκλίνει (στο* $\mathbb{R}$*).*
Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *η* f *είναι παραγωγίσιμη στο* $[a, b]$ *και*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'.$$

Ο χώρος $\mathscr{C}(K)$ όπου (K,d) συμπαγής

• Ο χώρος $\ell_\infty(K)$ των *φραγμένων συναρτήσεων* $f : K \to \mathbb{R}$ με νόρμα την $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ είναι πλήρης.

• $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ αν και μόνο αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K.

• Ο χώρος $(\mathscr{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι υπόχωρος του $(\ell_\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$.
(Συνεχής σε συμπαγές $\Longrightarrow$ φραγμένη.)

• Ο χώρος $(\mathscr{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $(\ell_\infty(K), \|\cdot\|_\infty)$.
(Ομοιόμορφο όριο συνεχών είναι συνεχής.)

Θεώρημα

Έστω (K,d) συμπαγής μετρικός χώρος. Ο χώρος $(\mathscr{C}(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

Το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass

Θεώρημα (Weierstrass)

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει πολυώνυμο* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ώστε ο περιορισμός του* p *στο* $[a, b]$ *να ικανοποιεί την*

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p(x)| \leq \varepsilon.$$

Αναδιατύπωση:

Θεώρημα (Weierstrass)

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων* (p_n) *ώστε* $p_n \to f$ *ομοιόμορφα στο* $[a, b]$.