Κεφάλαιο 6

Συμπαγείς μετρικοί χώροι

Ομάδα Α΄

6.1. *Ένα υποσύνολο K του X λέγεται συμπαγές, αν είναι συμπαγής μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική. Δείξτε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K υπάρχουν $i_1,\ldots,i_m\in I$ ώστε $K\subseteq\bigcup_{j=1}^m V_{i_j}$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι συμπαγές (με τη σχετική μετρική). Έστω $(V_i)_{i\in I}$ ανοικτό κάλυμμα του K. Τότε, τα $(K\cap V_i)_{i\in I}$ είναι ανοικτά στον $(K,\rho|_K)$ και $K=\bigcup_{i\in I}K\cap V_i$. Αφού ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής, υπάρχουν $i_1,\ldots,i_n\in I$ ώστε $K=\bigcup_{j=1}^n K\cap V_{i_j}$. Τότε, $K\subseteq\bigcup_{j=1}^n V_{i_j}$.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του K υπάρχουν $i_1,\ldots,i_n\in I$ ώστε $K\subseteq\bigcup_{j=1}^n V_{i_j}$. Θα δείξουμε ότι ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Θεωρούμε τυχόν κάλυμμα $(W_i)_{i\in I}$ του K από ανοικτά σύνολα W_i στο K. Τότε, υπάρχουν (U_i) ανοικτά στον X ώστε $W_i=K\cap U_i$ για κάθε $i\in I$. Έχουμε $K=\bigcup_{i\in I}W_i=\bigcup_{i\in I}(K\cap U_i)\subseteq\bigcup_{i\in I}U_i$. Από την υπόθεση υπάρχουν $i_1,\ldots,i_n\in I$ ώστε $K\subseteq\bigcup_{j=1}^n U_{i_j}$. Τότε, $K=\bigcup_{j=1}^n(K\cap U_{i_j})=\bigcup_{j=1}^n W_{i_j}$. Συνεπώς, ο $(K,\rho|_K)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

6.2. *Έστω $a<b$ στο $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του συμπαγούς μετρικού χώρου δείξτε ότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, ενώ τα διαστήματα (a,b), $[a,b)$ και $[a,\infty)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική.*

Υπόδειξη. Η περίπτωση του $[a,b]$ είναι το θεώρημα Heine–Borel: κάθε ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i\in I}$ του $[a,b]$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Για την απόδειξη, θεωρούμε το σύνολο

$$A=\{x\in[a,b]:[a,x]\ \text{καλύπτεται από πεπερασμένα από τα}\ V_i\}.$$

Προφανώς, $A\neq\emptyset$ (διότι $a\in A$) και το A είναι άνω φραγμένο. Από το αξίωμα της πληρότητας των πραγματικών αριθμών έχουμε ότι υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε $s = \sup A$. Εύκολα βλέπουμε ότι $a < s \leq b$ και αν $a \leq x < s$ τότε $x \in A$.

Ισχυρισμός 1. Είναι $b = s$.

Αν υποθέσουμε ότι $s = \sup A < b$, τότε υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $s \in V_{i_0}$. Αφού το V_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(s-\delta, s+\delta) \subseteq V_{i_0} \cap [a,b]$. Άρα, το $[a, s-\delta/2]$ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα V_i και το $[s-\delta/2, s+\delta/2]$ περιέχεται στο V_{i_0}. Έπεται ότι το $[a, s+\delta/2]$ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα V_i, το οποίο είναι άτοπο διότι $s = \sup A$. Συνεπώς, $b = s$.

Ισχυρισμός 2. Ισχύει $b \in A$.

Πράγματι· υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $b \in V_{i_0}$ και αφού το V_{i_0} είναι ανοικτό υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $a < b-\varepsilon$ και $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq V_{i_0}$. Από τον ισχυρισμό 1 έχουμε ότι $b-\varepsilon \in A$, άρα το διάστημα $[a, b-\varepsilon]$ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα V_i. Αφού $[b-\varepsilon, b] \subseteq V_{i_0}$, συμπεραίνουμε ότι το $[a,b]$ καλύπτεται από πεπερασμένα από τα V_i. Συνεπώς, $b \in A$.

Από τον Ισχυρισμό 2 έπεται ότι το $[a,b]$ είναι συμπαγές.

Το (a,b) δεν είναι συμπαγές αφού αν θεωρήσουμε το ανοικτό κάλυμμα (V_n) με $V_n = (a, b - \frac{b-a}{2n})$, $n = 1, 2\ldots$ αυτό δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (παρατηρήστε ότι $V_n \subseteq V_{n+1}$). Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι τα διαστήματα $[a,b)$ και $[a,\infty)$ δεν είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ θεωρώντας αντίστοιχα τα ανοικτά καλύμματα (G_n) και (W_n), όπου $G_n = (a-1, b-\frac{b-a}{2n})$ και $W_n = (a-1, a+n)$.

6.3. *Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X,ρ), αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι συμπαγές.*

Υπόδειξη. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ ένα ανοικτό κάλυμμα του $A\cup B$. Τότε αυτό είναι ανοικτό κάλυμμα για καθένα από τα συμπαγή A και B. Έτσι, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο I_A του I ώστε $A \subseteq \bigcup_{i\in I_A} U_i$ και υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο I_B του I ώστε $B \subseteq \bigcup_{i\in I_B} U_i$. Τώρα βλέπουμε αμέσως ότι το σύνολο $J := I_A \cup I_B$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του I και ισχύει $A \cup B \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$.

6.4. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και E, F υποσύνολα του X ώστε το E να είναι συμπαγές, το F κλειστό και $E \cap F = \emptyset$. Αποδείξτε ότι $\mathrm{dist}(E,F) > 0$.*

Δείξτε επίσης ότι υπάρχουν A, B κλειστά, ξένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ ώστε $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \mathrm{dist}(x,F)$. Έχουμε δει ότι η f είναι συνεχής συνάρτηση (μάλιστα είναι 1–Lipschitz). Αφού το E είναι συμπαγές, η f παίρνει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή, υπάρχει $x_0 \in E$ ώστε

$$f(x_0) = \min_{x\in E} f(x) = \inf\{\mathrm{dist}(x,F) : x \in E\} = \mathrm{dist}(E,F).$$

Παρατηρήστε ότι $x_0 \notin F$ (αφού $E\cap F = \emptyset$). Αφού το F είναι κλειστό, έχουμε $\mathrm{dist}(E,F) = f(x_0) > 0$.

Για το παράδειγμα, θεωρούμε τα ξένα κλειστά υποσύνολα $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $B = \{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\}$ του $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mathrm{dist}(A, B) \leq \frac{1}{|x|}$$

για κάθε $x \neq 0$, άρα $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.

6.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν $x \in X$ και A συμπαγές υποσύνολο του X, τότε υπάρχει $y \in A$ ώστε $\mathrm{dist}(x, A) = \rho(x, y)$.*

(β) *Αν A, B είναι συμπαγή υποσύνολα του X τότε, υπάρχουν $x \in A, y \in B$ ώστε $\mathrm{dist}(A, B) = \rho(x, y)$.*

Υπόδειξη. (α) Σταθεροποιούμε $x \in X$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f_x : A \to \mathbb{R}$ με $f_x(t) = \rho(t, x)$. Η f_x είναι συνεχής και το A είναι συμπαγές, άρα η f_x παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο $y \in A$. Τότε, $\rho(x, y) = f_x(y) = \inf_{t \in A} f_x(t) =: \mathrm{dist}(x, A)$.

(β) Από τον ορισμό της απόστασης συνόλων υπάρχουν ακολουθίες (a_n) και (b_n) στο A και B αντιστοίχως ώστε $\rho(a_n, b_n) \to \mathrm{dist}(A, B)$. Επειδή το A είναι ακολουθιακά συμπαγές υπάρχουν $x \in A$ και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Η (b_{k_n}) είναι ακολουθία στο συμπαγές B, άρα υπάρχουν $y \in B$ και υπακολουθία $(b_{k_{\lambda_n}})$ της (b_n) ώστε $b_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho} y$. Τότε, επειδή η $(a_{k_{\lambda_n}})$ είναι υπακολουθία της (a_{k_n}) έχουμε ότι $a_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{\rho} x$. Έπεται ότι $\rho(a_{k_{\lambda_n}}, b_{k_{\lambda_n}}) \to \rho(x, y)$. Αφού η $(\rho(a_{k_{\lambda_n}}, b_{k_{\lambda_n}}))$ είναι υπακολουθία της $(\rho(a_n, b_n))$, έπεται ότι $\mathrm{dist}(A, B) = \rho(x, y)$.

Σημείωση. Με ένα παρόμοιο επιχείρημα ακολουθιακής συμπάγειας θα μπορούσε να αποδειχθεί και το (α).

6.6. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.*

(α) *Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\overline{B}(x, \varepsilon)$ να είναι συμπαγές. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

(β) *Αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε το σύνολο $\overline{B}(x, \varepsilon)$ να είναι συμπαγές, τότε είναι ο X κατ' ανάγκην πλήρης;*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) μια βασική ακολουθία στον (X, ρ). Θεωρούμε το $\varepsilon > 0$ της υπόθεσης. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Από την υπόθεση, το σύνολο $K = \overline{B}(x_{n_0}, \varepsilon)$ είναι συμπαγές και η $(x_n)_{n \geq n_0}$ περιέχεται σε αυτό. Άρα, υπάρχουν $x \in K$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της $(x_n)_{n \geq n_0}$, η οποία συγκλίνει στο x. Παρατηρήστε ότι η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n). Αφού η (x_n) είναι βασική, έπεται ότι $x_n \to x$. Αυτό αποδεικνύει ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης.

(β) *Λάθος.* Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $X = (0, 1)$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, για κάθε $x \in (0, 1)$ υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $\hat{B}(x, \varepsilon_x) = [x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x] \subseteq (0, 1)$ και κάθε $\hat{B}(x, \varepsilon_x)$ είναι συμπαγές. Όμως, ο $(X, |\cdot|)$ δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος.

6.7. *Έστω (X,ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to Y$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Η συνάρτηση γράφημα $G_f : X \to X \times Y$ με $G_f(x) = (x, f(x))$ είναι συνεχής.*

(γ) *Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ είναι συμπαγές στον $X \times Y$.*

Είναι αναγκαία υπόθεση ο μετρικός χώρος X να είναι συμπαγής;

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Αυτή η συνεπαγωγή ισχύει γενικά: δεν χρησιμοποιούμε την υπόθεση της συμπάγειας του X. Έστω $x \in X$ και (x_n) ακολουθία στο X ώστε $x_n \to x$. Από τη συνέχεια της f έχουμε ότι $f(x_n) \to f(x)$. Άρα,

$$G_f(x_n) = (x_n, f(x_n)) \to (x, f(x)) = G_f(x).$$

Από την αρχή της μεταφοράς έπεται ότι η G_f είναι συνεχής.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Αφού η $G_f : X \to X \times Y$ είναι συνεχής και το X είναι συμπαγές, έπεται ότι $G_f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X \times Y$. Όμως, το $G_f(X)$ είναι ακριβώς το γράφημα της f, δηλαδή $G_f(X) \equiv \mathrm{Gr}(f)$.

(γ) $\Rightarrow$ (α). Έστω $x_0 \in X$ και $x_n \to x_0$. Για να δείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία της $(f(x_n))$ έχει περαιτέρω υπακολουθία, η οποία συγκλίνει στο $f(x_0)$. Έστω λοιπόν $(f(x_{k_n}))$ υπακολουθία της $(f(x_n))$. Η $((x_{k_n}, f(x_{k_n})))$ είναι ακολουθία στο συμπαγές σύνολο $\mathrm{Gr}(f)$. Άρα, υπάρχουν $z \in X$ και υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}})$ της (x_{k_n}) ώστε $(x_{k_{\lambda_n}}, f(x_{k_{\lambda_n}})) \to (z, f(z))$. Επειδή, ο $X \times Y$ είναι εφοδιασμένος με κάποια από τις γνωστές μετρικές γινόμενο έπεται ότι $x_{k_{\lambda_n}} \to z$ και $f(x_{k_{\lambda_n}}) \to f(z)$. Αλλά, $x_{k_{\lambda_n}} \to x_0$, αφού η $(x_{k_{\lambda_n}})$ είναι υπακολουθία της (x_n). Οπότε $z = x_0$ και έχουμε ότι $f(x_{k_{\lambda_n}}) \to f(x_0)$.

Η υπόθεση της συμπάγειας του πεδίου ορισμού είναι απαραίτητη: Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1/x$ τότε αυτή είναι συνεχής στο $(0,1]$ με τη συνήθη μετρική, αλλά το γράφημά της δεν είναι φραγμένο στον $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, άρα ούτε και συμπαγές. Παρατηρήστε ότι το $(0,1]$ δεν είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική).

6.8. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $F \subseteq X$. Αποδείξτε ότι το F είναι κλειστό αν και μόνον αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X το $F \cap K$ είναι κλειστό.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το F είναι κλειστό και θεωρούμε ένα K συμπαγές. Τότε, το $K \cap F$ είναι κλειστό ως τομή τέτοιων.

Αντίστροφα: έστω ότι για κάθε συμπαγές K, το $K \cap F$ είναι κλειστό. Θα δείξουμε ότι το F είναι κλειστό. Θεωρούμε μια ακολουθία (x_n) στο F ώστε $x_n \to x \in X$. Θα δείξουμε ότι το $x \in F$. Πράγματι· αν θεωρήσουμε το συμπαγές $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, τότε το $K \cap F$ είνα κλειστό. Όμως, η (x_n) περιέχεται στο $K \cap F$ και συγκλίνει στο x. Έπεται ότι $x \in K \cap F$, ειδικότερα, $x \in F$.

6.9. *Γνωρίζουμε ότι κάθε συμπαγές υποσύνολο K ενός μετρικού χώρου (X,ρ) είναι φραγμένο. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $\rho(x,y) = \mathrm{diam}(K)$.*

Υπόδειξη. 1η Απόδειξη. Υπάρχουν $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στο K ώστε $\rho(x_n, y_n) \to \mathrm{diam}(K)$. Επειδή το K είναι συμπαγές υπάρχουν $x, y \in K$ και υπακολουθίες (x_{k_n}), (y_{k_n}) των (x_n), (y_n) αντίστοιχα ώστε $x_{k_n} \to x$ και $y_{k_n} \to y$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\rho(x_{k_n}, y_{k_n}) \to \rho(x, y)$. Επειδή, η $(\rho(x_{k_n}, y_{k_n}))$ είναι υπακολουθία της $(\rho(x_n, y_n))$ έπεται ότι $\mathrm{diam}(K) = \rho(x, y)$.

2η Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : K \times K \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \rho(x, y)$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής και ότι το $K \times K$ είναι συμπαγές. Άρα, η f παίρνει μέγιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν $x, y \in K$ ώστε $\max f = f(x, y)$. Τότε,

$$\rho(x, y) = \max_{(t,s) \in K \times K} f(t, s) = \sup\{f(t, s) : (t, s) \in K \times K\} = \mathrm{diam}(K).$$

6.10. *Έστω (X, d), (Y, ρ) μετρικοί χώροι με τον Y συμπαγή και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι συνεχής.*

(β) *Το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$ της f είναι κλειστό στον $(X \times Y, \rho_1)$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Όπως είδαμε στην Άσκηση 7, αυτή η συνεπαγωγή ισχύει γενικά (χωρίς την υπόθεση της συμπάγειας του Y).

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω $x_0 \in X$ και (x_n) ακολουθία στο X ώστε $x_n \to x_0$. Για να δείξουμε ότι η $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία $(f(x_{k_n}))$ της $(f(x_n))$ έχει περαιτέρω υπακολουθία, η οποία συγκλίνει στο $f(x_0)$. Έστω λοιπόν μια υπακολουθία $(f(x_{k_n}))$ της $(f(x_n))$. Η $(f(x_{k_n}))$ περιέχεται στο συμπαγές Y. Άρα, υπάρχουν $y \in Y$ και υπακολουθία $(f(x_{k_{\lambda_n}}))$ της $(f(x_{k_n}))$ ώστε $f(x_{k_{\lambda_n}}) \to y$. Τότε, $(x_{k_{\lambda_n}}, f(x_{k_{\lambda_n}})) \xrightarrow{\rho_1} (x_0, y)$. Επειδή, η $((x_{k_{\lambda_n}}, f(x_{k_{\lambda_n}})))$ περιέχεται στο κλειστό $\mathrm{Gr}(f)$ έχουμε ότι $(x_0, y) \in \mathrm{Gr}(f)$, δηλαδή $y = f(x_0)$. Άρα, $f(x_{k_{\lambda_n}}) \to f(x_0)$.

6.11. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν $A_1, \ldots, A_m$ είναι ολικά φραγμένα υποσύνολα του X τότε το $A_1 \cup \cdots \cup A_m$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.*

(β) *Αν A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του X τότε το $\overline{A}$ είναι επίσης ολικά φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να το δείξουμε για δυο σύνολα A_1, A_2. Κατόπιν επαγωγικά θα έχουμε το συμπέρασμα. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το A_1 είναι ολικά φραγμένο υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in A_1$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$. Ομοίως, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in A_2$ ώστε $A_2 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon)$. Θέτουμε $\mathcal{Z} = \{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n\} \subseteq A_1 \cup A_2$ με $\mathrm{card}(\mathcal{Z}) < \infty$ και $A_1 \cup A_2 \subseteq \bigcup_{z \in \mathcal{Z}} B(z, \varepsilon)$.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το A είναι ολικά φραγμένο υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in X$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon/2)$. Τότε, $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B(x_i, \varepsilon/2}$. Από την $\overline{B(x_i, \varepsilon/2)} \subseteq B(x_i, \varepsilon)$ έπεται ότι $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon)$.

6.12. (α) *Έστω $f : (X, \rho) \to (Y, \sigma)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f στέλνει τα ολικά φραγμένα υποσύνολα του X σε ολικά φραγμένα υποσύνολα του Y.*

(β) *Δείξτε ότι η ιδιότητα του ολικά φραγμένου δεν διατηρείται από ομοιομορφισμούς. (Υπόδειξη: Τα $\mathbb{R}$ και $(0,1)$ είναι ομοιομορφικά.)*

Υπόδειξη. (α) Έστω $A \subseteq X$ ολικά φραγμένο και έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $x \in X$, $f(B(x,\delta)) \subseteq B(f(x),\varepsilon)$. Το A είναι ολικά φραγμένο, άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in X$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i,\delta)$. Τότε,

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k f(B(x_i),\delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(f(x_i),\varepsilon).$$

Έπεται ότι το $f(A)$ είναι ολικά φραγμένο.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{1-t} - \frac{1}{t}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα συνεχής και επί. Άρα, είναι ομοιομορφισμός. Παρατηρήστε ότι το $(0,1)$ είναι ολικά φραγμένο, ενώ το $\mathbb{R}$ δεν είναι.

6.13. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και (x_n) βασική ακολουθία στον X. Δείξτε ότι το σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x_{n_0},\varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} B(x_j,\varepsilon).$$

Ομάδα Β′

6.14. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Κάθε ισομετρία $f : X \to X$ είναι επί.*

(β) *Αν (Y, σ) είναι μετρικός χώρος ώστε να υπάρχουν ισομετρίες $g : X \to Y$ και $h : Y \to X$, τότε και ο Y είναι συμπαγής.*

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \notin f(X)$. Αφού η f είναι συνεχής και ο X συμπαγής, το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του X, άρα $\delta := \mathrm{dist}(x, f(X)) > 0$. Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) η οποία ορίζεται αναδρομικά από τις $x_0 = x$ και $x_n = f(x_{n-1})$ για $n = 1, 2, \ldots$. Παρατηρούμε ότι η $(x_n)_{n\geq 1}$ περιέχεται στο $f(X)$. Από την ακολουθιακή συμπάγεια του $f(X)$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν x_n, x_m με $m > n \geq 1$ ώστε $\rho(x_m, x_n) < \delta$ (εξηγήστε γιατί). Από το γεγονός ότι η f είναι ισομετρία προκύπτει ότι

$$\rho(x_m, x_n) = \rho(f(x_{m-1}), f(x_{n-1})) = \rho(x_{m-1}, x_{n-1}) = \cdots = \rho(x_{m-n}, x).$$

Αλλά $x_{m-n} \in f(X)$, οπότε $\mathrm{dist}(x, f(X)) \leq \rho(x_m, x_n) < \delta$, άτοπο.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h \circ g : X \to X$ η οποία είναι ισομετρία ως σύνθεση ισομετριών. Επειδή ο X είναι συμπαγής, από το (α) έπεται ότι είναι και επί. Τότε, η $h : Y \to X$ είναι επί: αν $x \in X$ επειδή η $h \circ g$ είναι επί υπάρχει $z \in X$ ώστε $(h \circ g)(z) = x$. Για $y = g(z) \in Y$ έχουμε $h(y) = x$. Άρα, η $h : Y \to X$ είναι ισομετρία επί. Εφόσον, οι χώροι X, Y είναι ισομετρικοί και ο X είναι συμπαγής, έπεται το ζητούμενο.

6.15. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και (F_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν G είναι ανοικτό υποσύνολο του X ώστε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq G$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $F_{n_0} \subseteq G$.*

(β) *Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, τότε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{m_0} = \emptyset$.*

(γ) *Αν $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ είναι μονοσύνολο, τότε $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.*

Υπόδειξη. (α) Παίρνοντας συμπληρώματα στη δοθείσα σχέση, έχουμε $G^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$. Τότε, τα $\{F_n^c\}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του G^c και αυτό είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς μετρικού χώρου. Άρα, υπάρχουν $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ ώστε $G^c \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} F_{n_j}^c$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ και παρατηρούμε ότι $\bigcup_{j=1}^{k} F_{n_j}^c = F_{n_0}^c$. Άρα, $G^c \subseteq F_{n_0}^c$, ή ισοδύναμα, $F_{n_0} \subseteq G$.

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α) αν θέσουμε $G = \emptyset$.

(γ) Έστω $x \in X$ με $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x\}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq B(x, \varepsilon/3)$. Από το (α) υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $F_{n_0} \subseteq B(x, \varepsilon/3)$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\mathrm{diam}(F_n) \leq \mathrm{diam}(F_{n_0}) \leq \mathrm{diam}(B(x, \varepsilon/3)) < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

6.16. *Έστω $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ συνεχής και $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \ldots$ ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι*

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(K_n).$$

Υπόδειξη. Ο εγκλεισμός $f(\cap_{n=1}^{\infty} K_n) \subseteq \cap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$ είναι προφανής. Έστω $y \in \cap_{n=1}^{\infty} f(K_n)$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in K_n$ ώστε $y = f(x_n)$. Η ακολουθία (x_n) περιέχεται στο συμπαγές K_1, άρα υπάρχουν $x \in K_1$ και (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x$.

Ισχυρισμός. $x \in \cap_{n=1}^{\infty} K_n$.

Πράγματι, αν $m \in \mathbb{N}$, τότε $K_{k_m} \subseteq K_m$. Η υπακολουθία $(x_{k_n})_{n \geq m}$ της (x_{k_n}) περιέχεται στο K_{k_m} και συγκλίνει στο x. Επειδή το K_{k_m} είναι κλειστό, έχουμε $x \in K_{k_m}$, δηλαδή $x \in K_m$. Αφού το $m \in \mathbb{N}$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $x \in \cap_{m=1}^{\infty} K_m$.

Έχουμε λοιπόν ότι $f(x) \in f(\cap_{n=1}^{\infty} K_n)$. Η f είναι συνεχής, οπότε $f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(x_n) = y$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $y = f(x)$ και έχουμε το συμπέρασμα.

6.17. *Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μη συμπαγές. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ η οποία:*

(α) *δεν είναι φραγμένη.*

(β) *είναι φραγμένη αλλά δεν παίρνει μέγιστη τιμή.*

Υπόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Το E δεν είναι κλειστό. Τότε υπάρχει $x \in E'$ με $x \notin E$. Για το (α) θεωρούμε τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(t) = \frac{1}{|t-x|}$, η οποία είναι συνεχής, αλλά όχι φραγμένη. Για το (β) θεωρούμε τη συνάρτηση $g : E \to \mathbb{R}$ με $g(t) = \frac{1}{1+|t-x|}$, η οποία είναι συνεχής, φραγμένη αλλά δεν παίρνει μέγιστη τιμή.
- Το E δεν είναι φραγμένο. Για το (α) θεωρούμε τη συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t$ ενώ για το (β) θεωρούμε τη $g : E \to \mathbb{R}$ με $g(t) = \frac{|t|}{1+|t|}$. Αυτή είναι συνεχής, φραγμένη με $0 < g < 1$ και δεν παίρνει μέγιστη τιμή, διότι $\sup_{t\in E} g(t) = 1$. (Παρατηρήστε ότι, αφού το E δεν είναι φραγμένο, υπάρχει ακολουθία $(t_n) \subseteq E$ με $|t_n| \to \infty$, άρα $g(t_n) \to 1$.)

6.18. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και συνάρτηση $f : X \to X$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$. Αποδείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν έχει σταθερό σημείο. Τότε $\rho(x, f(x)) > 0$ για κάθε $x \in X$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \rho(x, f(x))$. Ο X είναι συμπαγής, άρα υπάρχει $x_0 \in X$ ώστε $g(x) \geq g(x_0)$ για κάθε $x \in X$. Για το $f(x_0) \in X$ παρατηρούμε ότι $f(x_0) \neq x_0$ και

$$g(f(x_0)) = \rho(f(x_0), f(f(x_0))) < \rho(x_0, f(x_0)) = g(x_0).$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα η f έχει σταθερό σημείο, το οποίο είναι μοναδικό αφού για $x \neq y$ ισχύει $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$.

6.19. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι συμπαγής.*

(β) *Κάθε φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών, κλειστών υποσυνόλων του X έχει μη κενή τομή, δηλαδή $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε υπάρχει φθίνουσα ακολουθία (F_n) μη κενών κλειστών υποσυνόλων του X με $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Παίρνοντας συμπληρώματα έχουμε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c$. Τα (F_n^c) είναι ανοικτά και καλύπτουν τον συμπαγή μετρικό χώρο X. Άρα, υπάρχουν $n_1, \ldots, n_k$ ώστε $X = \bigcup_{j=1}^{k} F_{n_j}^c$, ή ισοδύναμα,

$\bigcap_{j=1}^k F_{n_j} = \emptyset$. Αν πάρουμε $N = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ τότε $F_N = \bigcap_{j=1}^k F_{n_j} = \emptyset$ κι έχουμε άτοπο.

(β) $\Rightarrow$ (α). Θα δείξουμε ότι ο X είναι πλήρης και ολικά φραγμένος. Από την υπόθεση και το Θεώρημα του Cantor έχουμε ότι ο X είναι πλήρης. Αν ο X δεν είναι ολικά φραγμένος τότε υπάρχουν $\delta > 0$ και ακολουθία (x_n) στον X με $\rho(x_n, x_m) \geq \delta$ για $n \neq m$ (εξηγήστε γιατί). Θέτουμε $F_n = \{x_k : k \geq n\}$ και παρατηρούμε ότι η $\{F_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών και κλειστών υποσυνόλων του X. Αλλά, $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$ κι έχουμε αντίφαση.

6.20. (α) *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Δείξτε ότι το A είναι συμπαγές αν και μόνον αν είναι κλειστό και ολικά φραγμένο.*

(β) *Έστω (X, ρ) ολικά φραγμένος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι η πλήρωσή του $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι το A είναι συμπαγές. Τότε (πάντοτε) ο $(A, \rho|_A)$ είναι πλήρης και ολικά φραγμένος μετρικός υπόχωρος. Συνεπώς, το A είναι κλειστό και ολικά φραγμένο υποσύνολο του X.

Αντίστροφα· υποθέτουμε ότι το A είναι κλειστό και ολικά φραγμένο. Αφού ο X είναι πλήρης και το A κλειστό, έχουμε ότι ο $(A, \rho|_A)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος. Επιπλέον, είναι ολικά φραγμένος, άρα συμπαγής.

(β) Ο X είναι πυκνός στον $\tilde{X}$. Αφού ο X είναι ολικά φραγμένος, έπεται ότι ο $\tilde{X}$ είναι ολικά φραγμένος (δείτε την Άσκηση 22(β)). Όμως, ο $\tilde{X}$ είναι και πλήρης, άρα είναι συμπαγής.

6.21. *Δείξτε ότι ο μετρικός χώρος (X, d) είναι ολικά φραγμένος αν και μόνον αν ο (X, ρ) είναι ολικά φραγμένος, όπου $\rho = \frac{d}{1+d}$.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, d) \to (X, \rho)$. Σύμφωνα με την Άσκηση 23(α) αρκεί να δείξουμε ότι οι I, I^{-1} είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Αυτό όμως είναι άμεσο (εξηγήστε γιατί): αρκεί να παρατηρήσουμε ότι (για μια ακολουθία (a_n) θετικών πραγματικών αριθμών) ισχύει $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$.

6.22. (α) *Έστω $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ πεπερασμένη οικογένεια ολικά φραγμένων μετρικών χώρων. Δείξτε ότι ο χώρος (X, ρ_1), όπου $X = \prod_{i=1}^k X_i$ και $\rho_1 = \sum_{i=1}^k d_i$ είναι ολικά φραγμένος μετρικός χώρος.*

(β) *Δείξτε ότι ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^k$ είναι ολικά φραγμένο αν και μόνον αν είναι φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) ακολουθία στον X, δηλαδή $x_n = (x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(k))$ για $n = 1, 2, \ldots$. Επειδή, ο X_1 είναι ολικά φραγμένος, η $(x_n(1))$ έχει βασική υπακολουθία, δηλαδή υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε η $(x_n(1))_{n \in M_1}$ να είναι βασική. Η ακολουθία $(x_n(2))_{n \in M_1}$ βρίσκεται στον ολικά φραγμένο χώρο X_2. Άρα, υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο ώστε η $(x_n(2))_{M_2}$ να είναι βασική. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε μια φθίνουσα πεπερασμένη ακολουθία $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_k$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $1 \leq i \leq k$, η $(x_n(i))_{n \in M_i}$ είναι βασική. Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n \in M_k}$.

Τότε η $(x_n)_{n\in M_k}$ είναι ρ_1–βασική: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η $(x_n(1))_{n\in M_k}$ είναι υπακολουθία της $(x_n(1))_{n\in M_1}$ είναι βασική, άρα υπάρχει $n_1 \in M_k$ ώστε $d_1(x_n(1), x_m(1)) < \varepsilon/k$ για κάθε $m, n \in M_k$ με $m, n \geq n_1$. Επειδή, η $(x_n(2))_{n\in M_k}$ είναι υπακολουθία της $(x_n(2))_{n\in M_2}$, είναι βασική. Άρα, υπάρχει $n_2 \in M_k$ ώστε $d_2(x_n(2), x_m(2)) < \varepsilon/k$ για κάθε $m, n \in M_k$ με $m, n \geq n_2$. Συνεχίζοντας με το ίδιο τρόπο βρίσκουμε $n_1, \ldots, n_k \in M_k$ ώστε $d_i(x_n(i), x_m(i)) < \varepsilon/k$ για κάθε $m, n \in M_k$ με $m, n \geq n_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ και έχουμε: αν $m, n \in M_k$ και $m, n \geq n_0$ τότε

$$\rho_1(x_n, x_m) = \sum_{i=1}^{k} d_i(x_n(i), x_m(i)) < \sum_{i=1}^{k} \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Επομένως, ο (X, ρ_1) είναι ολικά φραγμένος.

(β) Αρκεί να εξετάσουμε την κατεύθυνση όπου το A είναι φραγμένο (η άλλη ισχύει πάντοτε). Επίσης, παρατηρήστε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τον $\mathbb{R}^k$ εφοδιασμένο με τη μετρική ρ_1, αφού $\rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^k$. Αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x\|_1 \leq M$ για κάθε $x \in A$. Έπεται ότι $A \subseteq [-M, M]^k$. Όμως, αν πάρουμε $(X_i, d_i) \equiv ([-M, M], |\cdot|)$ στο (α), βλέπουμε ότι ο $([-M, M]^k, \rho_1)$ είναι ολικά φραγμένος, επομένως, ο $(A, \rho_1|_A)$ είναι ολικά φραγμένος. Δηλαδή το A είναι ολικά φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{R}^k, \rho_1)$.

6.23. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X είναι συμπαγές.*

(β) *Ο X είναι πλήρης και κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι ολικά φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Δείχνουμε ότι ο X είναι πλήρης: αν (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X, τότε γνωρίζουμε ότι το $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του X. Από την υπόθεση, το $\overline{A}$ είναι συμπαγές. Άρα, η ακολουθία (x_n) η οποία περιέχεται στο $\overline{A}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Συνεπώς, η (x_n) συγκλίνει.

Δείχνουμε ότι κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι ολικά φραγμένο. Πράγματι, αν $B \subseteq X$ φραγμένο, τότε από την υπόθεση έχουμε ότι το $\overline{B}$ είναι συμπαγές. Ειδικότερα, είναι ολικά φραγμένο. Τότε, το B είναι ολικά φραγμένο ως υποσύνολό του.

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω K κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του X. Από την υπόθεση έχουμε ότι το K είναι κλειστό και ολικά φραγμένο. Άρα, ο υπόχωρος $(K, \rho|_K)$ είναι πλήρης (ως κλειστό υποσύνολο πλήρους μετρικού χώρου) και ολικά φραγμένος. Οπότε, ο $(K, \rho|_K)$ είναι συμπαγής.

6.24. (α) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Είναι κατ' ανάγκην φραγμένο;*

(β) *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και όχι κλειστό. Δείξτε ότι υπάρχει $g : A \to \mathbb{R}$ Lipschitz και φραγμένη, η οποία δεν παίρνει μέγιστη τιμή.*

(γ) *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}$ κλειστό και φραγμένο. Δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

(δ) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο. Δείξτε ότι το $f(A)$ είναι επίσης φραγμένο.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\overline{A} \setminus A \neq \emptyset$. Τότε, υπάρχει $a \in A'$ ώστε $a \notin A$. Έτσι, υπάρχει $(a_n) \subseteq A$ ώστε $a_n \neq a$ για κάθε n και $|a_n - a| \to 0$. Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{|x-a|}$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής. Η f όμως *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε

$$(*) \qquad 0 < |a_{k_n} - a| < \frac{1}{2}|a_n - a|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} |f(a_{k_n}) - f(a_n)| &= \frac{|a_n - a| - |a_{k_n} - a|}{|a_{k_n} - a| \cdot |a_n - a|} \\ &\overset{(*)}{>} \frac{|a_n - a|}{2|a_n - a| \cdot |a_{k_n} - a|} \\ &= \frac{1}{2|a_{k_n} - a|} \to +\infty, \end{aligned}$$

ενώ $|a_n - a_{k_n}| \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Το A μπορεί να μην είναι φραγμένο: για παράδειγμα κάθε συνάρτηση $f : (\mathbb{Z}, |\cdot|) \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο και όχι κλειστό. Τότε, όπως πριν, υπάρχει $x \in A'$ ώστε $x \notin A$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : A \to \mathbb{R}$ με $g(t) = \frac{1}{1+|t-x|}$. Προφανώς, η g είναι καλά ορισμένη, συνεχής και φραγμένη με $0 < g < 1$.

- Η g δεν παίρνει μέγιστη τιμή: Είναι $\sup_{t \in A} g(t) = 1$. Πράγματι, υπάρχει $(t_n) \subseteq A$ ώστε $t_n \to x$. Άρα, $g(t_n) \to 1$ και $g(t) < 1$ για κάθε $t \in A$ αφού $x \notin A$.

- Η g είναι 1–Lipschitz: Για κάθε $t, s \in A$ ισχύει

$$|g(t) - g(s)| = \frac{\big||t-x| - |s-x|\big|}{(1+|t-x|)(1+|s-x|)} \leq |t - s|.$$

Παρατηρήστε ότι δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά η υπόθεση του φραγμένου.

(γ) Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής, η οποία δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και ακολουθίες $(x_n), (y_n) \in K$ με $|x_n - y_n| \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αφού το K είνα φραγμένο, από το θεώρημα Bolzano–Weierstrass υπάρχουν $x \in \mathbb{R}$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $|x_{k_n} - x| \to 0$. Επειδή το K είναι κλειστό, έπεται ότι $x \in K$. Τότε, είναι και $|y_{k_n} - x| \to 0$. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε

$f(x_{k_n}) \to f(x)$ και $f(y_{k_n}) \to f(x)$. Συνεπώς, $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \to 0$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon_0$ για $n = 1, 2, \ldots$.

(δ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ φραγμένο. Αν το $f(A)$ δεν είναι φραγμένο, υπάρχει (a_n) ακολουθία στο A ώστε $|f(a_n)| \geq n$ για $n = 1, 2, \ldots$ (εξηγήστε γιατί). Αφού το A είναι φραγμένο, έπεται ότι και η (a_n) είναι φραγμένη. Από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrass, η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (a_{k_n}). Ειδικότερα, αυτή είναι βασική. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, η $f((a_{k_n}))$ είναι επίσης βασική και ειδικότερα φραγμένη. Όμως, $|f(a_{k_n})| \geq k_n \geq n$ για $n = 1, 2, \ldots$ και έχουμε αντίφαση.

Ομάδα Γ′

6.25. (α) *Έστω $\{(X_n, \rho_n)\}$ ακολουθία μετρικών χώρων με $\rho_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$ και $n = 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι ο χώρος γινόμενο $(\prod_{n=1}^{\infty} X, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\rho_n)$ είναι συμπαγής.*

(β) *Δείξτε ότι κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.*

Υπόδειξη. (α) Θα δείξουμε ότι ο X είναι ακολουθιακά συμπαγής. Έστω (x_n) ακολουθία στον X, δηλαδή $x_n = (x_n(1), x_n(2), \ldots, x_n(i), \ldots)$. Η $(x_n(1))$ περιέχεται στο συμπαγή μετρικό χώρο X_1, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή, υπάρχουν $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $x(1) \in X_1$ ώστε η $(x_n(1))_{n \in M_1}$ να συγκλίνει στο $x(1)$. Η $(x_n(2))_{n \in M_1}$ περιέχεται στο συμπαγές X_2, άρα υπάρχουν $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο και $x(2) \in X_2$ ώστε η $(x_n(2))_{n \in M_2}$ να συγκλίνει στο $x(2)$. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε $x(i) \in X_i$ και φθίνουσα ακολουθία $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$ η $(x_n(i))_{n \in M_i}$ να συγκλίνει στο $x(i)$. Αφού κάθε M_i είναι άπειρο, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_i) με $k_i \in M_i$. Τότε, η (x_{k_n}) είναι υπακολουθία της (x_n) και συγκλίνει στο $x = (x(i)) \in X$. Γι' αυτό αρκεί να δείξουμε τη σύγκλιση κατά συντεταγμένη (αφού η σύγκλιση ως προς τη ρ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση κατά συντεταγμένες). Έστω $i \in \mathbb{N}$. Τότε, η $(x_{k_n}(i))_{n \geq i}$ είναι υπακολουθία της $(x_n(i))_{n \in M_i}$ (αφού $k_n \in M_n \subseteq M_i$ για $n \geq i$), άρα συγκλίνει κι αυτή στο $x(i)$.

(β) Έπεται άμεσα από το προηγούμενο ερώτημα για $(X_n, \rho_n) \equiv ([-1, 1], |\cdot|)$. (Το γεγονός ότι $|x - y| \leq 2$ αντί του 1 όπως στην υπόθεση του (α) δεν παίζει ουσιαστικό ρόλο.)

6.26. *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $(G_i)_{i=1}^n$ ανοικτό κάλυμμα του X. Θέτουμε $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \max\{\text{dist}(x, X \setminus G_i) : i = 1, \ldots, n\}$ για $x \in X$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Για κάθε $x \in X$ ισχύει $f(x) > 0$.*

(β) *Η f είναι συνεχής.*

(γ) *Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) αποδείξτε το λήμμα του Lebesgue.*

Υπόδειξη. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει $1 \leq i \leq n$ ώστε $\text{dist}(x, G_i^c) > 0$, οπότε

$$f(x) = \max\{\text{dist}(x, G_i^c) : i = 1, \ldots, n\} > 0.$$

Αυτό όμως έπεται άμεσα από το γεγονός ότι το $\{G_i : i = 1, \ldots, n\}$ αποτελεί ανοικτό κάλυμμα του X. Πράγματι, αν $x \in X$ τότε υπάρχει $1 \leq i \leq n$ ώστε $x \in G_i$. Τότε, $x \notin G_i^c$ και το G_i^c είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα $\mathrm{dist}(x, G_i^c) > 0$.

(β) Παρατηρούμε ότι η f ορίζεται ως κατά σημείο maximum συνεχών συναρτήσεων. Αν δείξουμε ότι το κατά σημείο maximum δυο συνεχών πραγματικών συναρτήσεων είναι συνεχής, τότε επαγωγικά έχουμε το συμπέρασμα.

Ισχυρισμός. Έστω $f, g : (Y, \sigma) \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε, η συνάρτηση $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ είναι συνεχής.

Έστω $y_0 \in Y$ και $y_n \to y_0$. Υποθέτουμε ότι $f(y_0) > g(y_0)$ (εύκολα αντιμετωπίζεται η περίπτωση $f(y_0) = g(y_0)$). Έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(f(y_0) - g(y_0))$. Αφού οι $(f(y_n))$, $(g(y_n))$ συγκλίνουν στα $f(y_0)$, $g(y_0)$ αντίστοιχα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$f(y_0) - \varepsilon < f(y_n) < f(y_0) + \varepsilon \quad , \quad g(y_0) - \varepsilon < g(y_n) < g(y_0) + \varepsilon.$$

Όμως, $g(y_0) + \varepsilon < f(y) - \varepsilon$, άρα για κάθε $n \geq n_0$ είναι $\max\{f(y_n), g(y_n)\} = f(y_n)$. Οπότε,

$$(f \vee g)(y_n) = \max\{f(y_n), g(y_n)\} \to f(y_0) = \max\{f(y_0), g(y_0)\} = (f \vee g)(y_0).$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) θα αποδείξουμε ότι κάθε ανοικτό κάλυμμα ενός συμπαγούς μετρικού χώρου έχει αριθμό Lebesgue.

Θεωρούμε ένα ανοικτό κάλυμμα $(V_i)_{i \in I}$ ενός συμπαγούς μετρικού χώρου (Y, ρ). Τότε, υπάρχουν $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$ ώστε $Y = \bigcup_{j=1}^k V_{i_j}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : Y \to \mathbb{R}$ με $f(y) = \max\{\mathrm{dist}(y, V_{i_j}^c) : j = 1, \ldots, k\}$. Από τα (α) και (β) έχουμε ότι η f είναι συνεχής και γνήσια θετική. Καθώς ο Y είναι συμπαγής, συμπεραίνουμε ότι η f παίρνει ελάχιστη θετική τιμή. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(y) \geq \delta$ για κάθε $y \in Y$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το δ είναι ο ζητούμενος αριθμός Lebesgue του καλύμματος.

Ισχυρισμός. Για κάθε $A \subseteq Y$ με $\mathrm{diam}(A) < \delta$, υπάρχει $1 \leq j \leq k$ ώστε $A \subseteq V_{i_j}$.

Αν το A είναι κενό δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Υποθέτουμε λοιπόν ότι το $A \neq \emptyset$ και έστω $a \in A$. Τότε, $f(a) \geq \delta$, δηλαδή υπάρχει $1 \leq j \leq k$ ώστε $\mathrm{dist}(a, V_{i_j}^c) \geq \delta$. Δείχνουμε ότι $A \subseteq V_{i_j}$. Πράγματι, αν δεν συμβαίνει αυτό, υπάρχει $y \in A \setminus V_{i_j}$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(a, V_{i_j}^c) \leq \rho(a, y) \leq \mathrm{diam}(A) < \delta$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

6.27. (α) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $R : [0, 2\pi) \to S^1$, με $R(t) = (\cos t, \sin t)$, όπου $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος είναι συνεχής, 1-1 και επί. Είναι οι χώροι $[0, 2\pi)$ και S^1 ομοιομορφικοί;*

(β) *Εξετάστε αν οι χώροι $([0, 2\pi], |\cdot|)$ και $(S^1, \|\cdot\|_2)$ είναι ομοιομορφικοί.*

Υπόδειξη. (α) Η R είναι προφανώς συνεχής αφού κάθε συντεταγμένη της είναι συνεχής συνάρτηση.

Για το $1-1$: Έστω $(\cos t_1, \sin t_1) = (\cos t_2, \sin t_2)$ με $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$. Τότε,

$$\begin{cases} \sin t_1 = \sin t_2 & (1) \\ \cos t_1 = \cos t_2 & (2) \end{cases}$$

Από την (1) παίρνουμε $t_1 - t_2 = 2k\pi$ ή $t_1 + t_2 = 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Επειδή, $|t_1 - t_2| < 2\pi$ στην πρώτη περίπτωση έχουμε $k = 0$ ενώ στη δεύτερη $k = 0$ ή $k = 1$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση είναι είτε $t_1 = t_2$ ή $t_1 + t_2 = \pi$ ή $t_1 + t_2 = 3\pi$. Από την (2) παίρνουμε $t_1 - t_2 = 2\lambda\pi$ ή $t_1 + t_2 = 2\lambda\pi$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Επειδή είναι $|t_1 - t_2| < 2\pi$, η πρώτη περίπτωση δίνει $\lambda = 0$ δηλαδή $t_1 = t_2$ ενώ η δεύτερη περίπτωση δίνει $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$, δηλαδή $t_1 = t_2 = 0$ ή $t_1 + t_2 = 2\pi$. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση είναι $t_1 = t_2$ ή $t_1 + t_2 = 2\pi$. Βλέπουμε ότι η μόνη περίπτωση ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2) είναι $t_1 = t_2$, δηλαδή η R είναι 1-1.

Για το επί: Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ώστε $x^2 + y^2 = 1$. Τότε $-1 \leq y \leq 1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $0 \leq y \leq 1$. Αφού $\sin([0, \pi/2]) = [0, 1]$, υπάρχει $t \in [0, \pi/2]$ ώστε $\sin t = y$. Τότε, $\cos t = |x|$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x \geq 0$ τότε $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. Αν $x \leq 0$ τότε $(x, y) = (\cos(\pi - t), \sin(\pi - t))$ και $\pi - t \in [0, 2\pi)$.
- $-1 \leq y < 0$. Αφού $\sin((\pi, 3\pi/2]) = [-1, 0)$, υπάρχει $t \in (\pi, 3\pi/2]$ ώστε $\sin t = y$. Τότε $\cos t = -|x|$ (εξηγήστε γιατί). Αν $x \geq 0$ τότε $(x, y) = (\cos(3\pi - t), \sin(3\pi - t))$ με $3\pi - t \in [0, 2\pi)$, ενώ αν $x \leq 0$ τότε $(x, y) = (\cos t, \sin t)$.

Έτσι, σε κάθε περίπτωση η R είναι επί.

Οι χώροι $[0, 2\pi), S^1$ δεν είναι ομοιομορφικοί αφού ο S^1 είναι συμπαγής ενώ ο $[0, 2\pi)$ όχι.

(β) Οι χώροι $[0, 2\pi], S^1$ δεν είναι ομοιομορφικοί.

1η Απόδειξη. Έστω $f : [0, 2\pi] \to S^1$ ομοιομορφισμός. Τότε, η $f|_{[0,\pi)\cup(\pi,2\pi]} : [0, 2\pi] \setminus \{\pi\} \to S^1 \setminus \{f(\pi)\}$ είναι ομοιομορφισμός. Όμως, το $S^1 \setminus \{f(\pi)\}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί) ενώ το $[0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$ δεν είναι (αυτό είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής) κι έχουμε αντίφαση.

2η Απόδειξη. Έστω $f : [0, 2\pi] \to S^1$ ομοιομορφισμός. Τότε, είτε $f(0) = R(\theta)$ για κάποιο $\theta \in (0, 2\pi)$ ή $f(2\pi) = R(\theta)$ για κάποιο $\theta \in (0, 2\pi)$, όπου R η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Υποθέτουμε ότι $f(0) = R(\theta)$ για κάποιο $\theta \in (0, 2\pi)$ (εντέλως ανάλογη είναι η άλλη περίπτωση). Έτσι, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(\theta - \delta, \theta + \delta) \subseteq (0, 2\pi)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g : (\theta - \delta, \theta + \delta) \to [0, 2\pi]$ με $g(t) = f^{-1}(R(t))$, η οποία είναι συνεχής και 1-1 (ως σύνθεση τέτοιων). Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση πρέπει να είναι γνησίως μονότονη. Όμως, η g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο σε εσωτερικό σημείο. Αυτό είναι άτοπο.

6.28. (α) *Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \to X$ συνάρτηση με την ιδιότητα*

$$\rho(f(x), f(y)) \geq \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. *Δείξτε ότι η* f *είναι ισομετρία και επί.*

(β) *Έστω* (X, ρ) *συμπαγής μετρικός χώρος και* $f : X \to X$ *1-1, επί ώστε*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. *Δείξτε ότι η* f *είναι ισομετρία.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x, y \in X$. Θέτουμε $x_0 = x, y_0 = y$ και θεωρούμε τις ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά από τις $x_n = f(x_{n-1})$, $y_n = f(y_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Για να αποδείξουμε ότι η f είναι ισομετρία αρκεί να δείξουμε ότι $\rho(x_0, y_0) = \rho(x_1, y_1)$.

Αφού η (x_n) βρίσκεται στο συμπαγή μετρικό χώρο (X, ρ), έπεται ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε η $(x_n)_{n \in M_1}$ να είναι συγκλίνουσα. Ομοίως, η ακολουθία $(y_n)_{n \in M_1}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο ώστε η $(y_n)_{n \in M_2}$ να είναι συγκλίνουσα. Έπεται ότι οι ακολουθίες $(x_n)_{n \in M_2}$ και $(y_n)_{n \in M_2}$ είναι βασικές.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού οι $(x_n)_{n \in M_2}$, $(y_n)_{n \in M_2}$ είναι βασικές, υπάρχουν $i \in M_2$ και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $i + k \in M_2$ με

$$\rho(x_i, x_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \rho(y_i, y_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Από την ανισοτική σχέση που ικανοποιεί η f έχουμε ότι

$$\rho(x_0, x_k) \leq \rho(x_i, x_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \rho(y_0, y_k) \leq \rho(y_i, y_{i+k}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Χρησιμοποιώντας τις τελευταίες ανισότητες, την ανισότητα για την f και την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε:

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_1, y_1) \leq \rho(x_k, y_k) < \varepsilon + \rho(x_0, y_0)$$

και επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε ότι $\rho(x_1, y_1) = \rho(x_0, y_0)$. Το επί έπεται από την Άσκηση 6.14(α).

(β) Αφού η f είναι $1-1$ και επί, ορίζεται η $f^{-1} : X \to X$ και ικανοποιεί την

$$\rho(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \geq \rho(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Από το (α) έχουμε ότι η f^{-1} είναι ισομετρία, άρα η f είναι ισομετρία.

6.29. (α) *Έστω* (E_n) *ακολουθία ξένων ανά δυο διαστημάτων του* $[0, 1]$. *Δείξτε ότι* $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

(β) *Έστω* $\delta > 0$. *Βρείτε ακολουθία* (F_n) *ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων του* $[0, 1]$ *ώστε* $\mathrm{diam}(F_n) \geq 1 - \delta$ *για* $n = 1, 2, \ldots$. *Εξηγήστε που οφείλεται η διαφορά των αποτελεσμάτων (α) και (β).*

(γ) *Δείξτε ότι για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο κλειστών υποσυνόλων* (F_n) *του μοναδιαίου δίσκου* $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *ώστε* $\mathrm{diam}(F_n) \geq 2 - \varepsilon$ *για* $n = 1, 2, \ldots$.

(δ) *Έστω* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *φραγμένο και* (B_n) *ακολουθία από ξένες ανά δύο κλειστές μπάλες στο* K. *Δείξτε ότι* $\mathrm{diam}(\mathrm{B_n}) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

(ε) *Έστω* (X, ρ) *ολικά φραγμένος μετρικός χώρος και* B_n *ακολουθία από ξένες ανά δύο μπάλες στον* X. *Δείξτε ότι* $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\mathrm{diam}(B_n)\big) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Αρχικά παρατηρούμε ότι αν I, J είναι ξένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$, τότε $\mathrm{diam}(I) + \mathrm{diam}(J) \leq \mathrm{diam}(I \cup J)$ και επαγωγικά δείχνουμε ότι αν $I_1, \ldots, I_k$ ξένα ανά δυο διαστήματα, τότε $\sum_{i=1}^k \mathrm{diam}(I_i) \leq \mathrm{diam}(\bigcup_{i=1}^k I_i)$. Οπότε για τα $\{E_n\}$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{diam}(E_i) \leq \mathrm{diam}(\bigcup_{i=1}^n E_i) \leq \mathrm{diam}([0,1]) = 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Απ' αυτό προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \mathrm{diam}(E_n)$ συγκλίνει, άρα $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$.

(β) Έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε $0 < a < b < 1$ ώστε $b - a > 1 - \delta$. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες στα $(0, a), (b, 1)$ αντίστοιχα, με διαφορετικούς ανά δύο όρους. Θέτουμε $F_n = \{a_n, b_n\}$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, τα $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ είναι τα ζητούμενα σύνολα.

Η διαφορά οφείλεται στο ότι τα σύνολα $\{F_n\}$ αποτελούνται από μεμονωμένα σημεία, ενώ τα διαστήματα είναι «συνεχή» σύνολα και για να έχουμε «πολλά» μέσα στο $[0,1]$ πρέπει να μικραίνουν τα μήκη τους.

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \sqrt{\varepsilon/2}$. Ορίζουμε $F_n = \{(x, y) : x = \frac{1}{n+k}\} \cap D$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, τα $\{F_n\}$ είναι ξένα ανά δυο και ικανοποιούν την

$$\mathrm{diam}(F_n) = 2\sqrt{1 - \frac{1}{(n+k)^2}} \geq 2\left(1 - \frac{1}{(n+k)^2}\right) > 2 - \varepsilon.$$

(δ) Αν B_1, B_2 είναι ξένες μπάλες στον $\mathbb{R}^d$ τότε $V(B_1) + V(B_2) = V(B_1 \cup B_2)$, όπου $V(\cdot)$ ο d–διάστατος όγκος. Επαγωγικά λοιπόν έχουμε $\sum_{i=1}^n V(B_i) = V(\bigcup_{i=1}^n B_i)$. Αφού το K είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ ώστε $K \subseteq [-M, M]^d$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^n V(B_i) \leq (2M)^d.$$

Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι $V(B_n) \to 0$, άρα $\mathrm{diam}(B_n) \to 0$ (παρατηρήστε ότι αφού ο όγκος τείνει στο μηδέν η ακολουθία των ακτίνων τείνει στο μηδέν).

(ε) Έστω $B_n = B(x_n, r_n)$. Θα δείξουμε ότι $r_n \to 0$, οπότε το συμπέρασμα έπεται αν παρατηρήσουμε ότι $\mathrm{diam}(B_n) \leq 2r_n$. Αν $r_n \not\to 0$, υπάρχουν $\delta > 0$ και υπακολουθία (r_{k_n}) της (r_n) ώστε $r_{k_n} \geq \delta$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, ισχύει $\rho(x_{k_n}, x_{k_m}) \geq \delta$ για $n \neq m$ (αν ήταν $\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) < \delta$ τότε $x_{k_m} \in B(x_{k_n}, \delta)$, άρα $B_{k_n} \cap B_{k_m} \neq \emptyset$). Συμπεραίνουμε ότι η (x_{k_n}) δεν έχει καμιά βασική υπακολουθία κι αυτό αντίκειται στην υπόθεση ότι ο X είναι ολικά φραγμένος.

6.30. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο A του X λέγεται δ–διαχωρισμένο αν για κάθε $x,y\in A$ με $x\neq y$ ισχύει $\rho(x,y)\geq\delta$.*

(α) *Δείξτε ότι αν κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο και αν το $A\subseteq X$ είναι δ–διαχωρισμένο, τότε υπάρχει $B\subseteq X$ μεγιστικό δ–διαχωρισμένο ώστε $A\subseteq B$.*

(β) *Δείξτε ότι αν κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο, τότε ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος.*

Υπόδειξη. (α) Έστω A ένα δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Αυτό θα είναι πεπερασμένο. Θεωρούμε το σύνολο $A_1=\{x\in X:\forall\ a\in A,\ \rho(x,a)\geq\delta\}$. Αν αυτό είναι κενό τότε θέτουμε $B=A$ κι έχουμε ότι $A\subseteq B$ και ότι το B είναι μεγιστικό δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Πράγματι: αν το B είναι γνήσιο υποσύνολο του S και S είναι δ–διαχωρισμένο, τότε υπάρχει $s\in S\setminus B$ ώστε $\rho(s,b)\geq\delta$ για κάθε $b\in B$, άτοπο αφού $A_1=\emptyset$. Αν $A_1\neq\emptyset$ τότε επιλέγουμε $a_1\in A_1$ και θέτουμε $B_1=A\cup\{a_1\}$. Στη συνέχεια θεωρούμε το σύνολο $A_2=\{x\in X:\rho(x,b)\geq\delta\ \forall\ b\in B_1\}$. Αν $A_2=\emptyset$ τότε το B_1 είναι το ζητούμενο σύνολο. Αν όχι, επιλέγουμε $a_2\in A_2$ και θεωρούμε το σύνολο $B_2=B_1\cup\{a_2\}$. Εργαζόμενοι με τον ίδιο τρόπο, σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα παίρνουμε ένα σύνολο B_n ώστε το $A_{n+1}=\{x\in X:\rho(x,b)\geq\delta\ \forall\ b\in B_n\}$ να είναι κενό (διαφορετικά θα κατασκευάζαμε μια άπειρη ακολουθία (a_n) στοιχείων του X με $\rho(a_n,a_m)\geq\delta$ για $n\neq m$ κι αυτό είναι άτοπο εφόσον τα δ–διαχωρισμένα υποσύνολα του X έχουν πεπερασμένο πληθάριθμο). Τότε, το B_n είναι το ζητούμενο σύνολο: είναι μεγιστικό και περιέχει το A.

(β) Έστω ότι $X\neq\emptyset$. Έστω S_1 ένα μεγιστικό 1–διαχωρισμένο υποσύνολο του X (αυτό μας το εξασφαλίζει το προηγούμενο ερώτημα για A κάποιο μονοσύνολο). Αφού το S_1 είναι μεγιστικό, ισχύει $X=\bigcup_{x\in S_1}B(x,1)$. Έστω S_2 ένα μεγιστικό $1/2$–διαχωρισμένο υποσύνολο του X. Τότε, $X=\bigcup_{x\in S_2}B(x,1/2)$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ακολουθία (S_n) διαχωρισμένων συνόλων ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ να ισχύει:

- Το S_n είναι πεπερασμένο.
- Το S_n είναι μεγιστικό $1/n$–διαχωρισμένο υποσύνολο του X, άρα $X=\bigcup_{x\in S_n}B(x,1/n)$.

Αν θέσουμε $D=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$, το D είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων και πυκνό. Πράγματι, αν $\varepsilon>0$ και $x_0\in X$ τότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $1/n<\varepsilon$ και $X=\bigcup_{x\in S_n}B(x,1/n)$. Άρα, υπάρχει $x\in S_n$ ώστε $x_0\in B(x,1/n)$. Τότε, $x\in B(x_0,\varepsilon)$ απ' όπου έπεται ότι $S_n\cap B(x_0,\varepsilon)\neq\emptyset$. Άρα, $D\cap B(x_0,\varepsilon)\neq\emptyset$.

6.31. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Ο X είναι ολικά φραγμένος.*

(β) *Κάθε δ–διαχωρισμένο υποσύνολο του X είναι πεπερασμένο.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Αν υπάρχει άπειρο δ–διαχωρισμένο $A\subseteq X$ τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\rho(a_n,a_m)\geq\delta$ για κάθε $n\neq m$. Τότε, η (a_n) δεν έχει καμιά βασική υπακολουθία, άρα ο X δεν είναι ολικά φραγμένος.

(β) $\Rightarrow$ (α). Έστω $\varepsilon > 0$. Από την προηγούμενη άσκηση υπάρχει πεπερασμένο μεγιστικό ε–διαχωρισμένο υποσύνολο S. Τότε, $X = \bigcup_{x\in S} B(x,\varepsilon)$, άρα ο X είναι ολικά φραγμένος.

6.32. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A λέγεται σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X αν το $\overline{A}$ είναι είναι συμπαγές υποσύνολο του X.*

(α) *Αποδείξτε ότι το A είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνον αν κάθε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (όχι κατ' ανάγκην μέσα στο A).*

(β) *Έστω (Y,ρ) μετρικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι η f απεικονίζει σχετικά συμπαγή υποσύνολα του X σε σχετικά συμπαγή υποσύνολα του Y.*

(γ) *Αποδείξτε ότι κάθε σχετικά συμπαγές υποσύνολο είναι ολικά φραγμένο. Ισχύει το αντίστροφο;*

Υπόδειξη. (α) Έστω (a_n) ακολουθία στοιχείων του A. Τότε, η (a_n) περιέχεται στο συμπαγές $\overline{A}$, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (στο $\overline{A}$).

Αντίστροφα: έστω (x_n) ακολουθία στο $\overline{A}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_n \in A$ ώστε $\rho(x_n, a_n) < 1/n$. Η (a_n) είναι ακολουθία στοιχείων του A, άρα από την υπόθεση έπεται ότι έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Υπάρχουν λοιπόν $x \in \overline{A}$ (εξηγήστε γιατί) και υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to x$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\rho(x_{k_n}, x) \leq \rho(x_{k_n}, a_{k_n}) + \rho(a_{k_n}, x) < \frac{1}{k_n} + \rho(a_{k_n}, x).$$

Συμπεραίνουμε ότι $x_{k_n} \to x$ με $x \in \overline{A}$. Συνεπώς, το $\overline{A}$ είναι ακολουθιακά συμπαγές, άρα συμπαγές.

(β) Έστω (y_n) ακολουθία στο $f(A)$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in A$ ώστε $y_n = f(x_n)$. Η (x_n) περιέχεται στο σχετικά συμπαγές A. Άρα, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (x_{k_n}). Τότε, η (y_{k_n}) είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της (y_n). (Θυμηθείτε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις απεικονίζουν συγκλίνουσες ακολουθίες σε συγκλίνουσες ακολουθίες). Άρα, το $f(A)$ είναι σχετικά συμπαγές.

(γ) Έστω A σχετικά συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, το $\overline{A}$ είναι ολικά φραγμένο, οπότε το A είναι ολικά φραγμένο.

Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα: αν θεωρήσουμε τον μετρικό χώρο $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ και $A = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq 1\}$ τότε το A είναι ολικά φραγμένο, αλλά δεν είναι σχετικά συμπαγές, αφού $A = \overline{A}$ και το A δεν είναι ακολουθιακά συμπαγές.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι το ακόλουθο: Θεωρούμε τον μετρικό χώρο $((0,1), |\cdot|)$ και το $A = (0, 1/2]$. Το A είναι ολικά φραγμένο (στον $(0,1)$) αλλά δεν είναι σχετικά συμπαγές αφού $A = \overline{A}$ και το A δεν είναι ακολουθιακά συμπαγές.

Παρατηρήστε ότι και στις δυο περιπτώσεις ο μετρικός χώρος που θεωρούμε δεν είναι πλήρης (σε έναν πλήρη μετρικό χώρο δε μπορεί να συμβαίνει αυτό σύμφωνα με την Άσκηση 21(α)).