Κεφάλαιο 5

Πλήρεις μετρικοί χώροι

Ομάδα Α΄

5.1. *Στο σύνολο* $\mathbb{N}$ *των φυσικών θεωρούμε τις μετρικές* $d(m,n) = |m-n|$ *και* $\rho(m,n) = |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$.

(α) *Δείξτε ότι ο* $(\mathbb{N}, d)$ *είναι πλήρης αλλά ο* $(\mathbb{N}, \rho)$ *δεν είναι πλήρης.*

(β) *Δείξτε ότι κάθε μονοσύνολο* $\{n\}$ *είναι* d*-ανοικτό και* ρ*-ανοικτό.*

(γ) *Δείξτε ότι οι μετρικές* ρ *και* d *είναι ισοδύναμες (άρα, οι* $(\mathbb{N}, d)$ *και* $(\mathbb{N}, \rho)$ *είναι ομοιομορφικοί).*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $(\mathbb{N}, d)$. Επιλέγουμε $\varepsilon = 1/2 > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) = |x_n - x_m| < 1/2$. Αφού $x_n, x_m \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $x_n = x_m$. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι $x_n = x_{n_0}$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η (x_n) είναι τελικά σταθερή, άρα συγκλίνει.

Στον $(\mathbb{N}, \rho)$ θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n$. Η (x_n) είναι ρ-βασική: έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $m > n \geq n_0$ έχουμε $\rho(x_m, x_n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Όμως, δεν υπάρχει $x \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(n, x) \to 0$: θα είχαμε $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{x}\right| \to 0$, δηλαδή $\frac{1}{n} \to \frac{1}{x}$ (με τη συνήθη μετρική) το οποίο σημαίνει ότι $\frac{1}{x} = 0$, άτοπο.

(β) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Στον $(\mathbb{N}, d)$ έχουμε $\{n\} = B(n, 1/2)$. Άρα, το $\{n\}$ είναι d-ανοικτό σύνολο. Στον $(\mathbb{N}, \rho)$ παρατηρούμε ότι: αν $m > n$ τότε $\rho(m,n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ ενώ αν $m < n$ (εδώ υποθέτουμε ότι $n \geq 2$) όμοια βλέπουμε ότι $\rho(m,n) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$. Αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{1}{n(n-1)}, \frac{1}{n(n+1)}\right\}$ τότε $\{n\} = B(n, \varepsilon)$. Άρα, το $\{n\}$ είναι ρ-ανοικτό.

(γ) Αφού τα μονοσύνολα είναι ανοικτά και στους δύο χώρους, ισχύει $d(x_n, x) \to 0$ αν και μόνο αν η (x_n) είναι τελικά σταθερή, το οποίο με τη σειρά του ισχύει αν και μόνο αν $\rho(x_n, x) \to 0$.

5.2. *Θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με μετρική την $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$. Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$ αλλά ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$. Η συνάρτηση $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι συνεχής, άρα $\arctan x_n \to \arctan x$. Όμως τότε, $d(x_n, x) = |\arctan x_n - \arctan x| \to 0$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$: αν $d(x_n, x) \to 0$ τότε $y_n = \arctan x_n \to \arctan x = y$, άρα $x_n = \tan y_n \to \tan y = x$ (ως προς τη συνήθη μετρική). Συνεπώς, η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική του $\mathbb{R}$.

Για να δείξουμε ότι ο $(\mathbb{R}, d)$ δεν είναι πλήρης, θεωρούμε την ακολουθία $x_n = n$. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}, d)$: έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|\pi/2 - \arctan n| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, αν $m, n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(n,m) = |\arctan n - \arctan m| \leq |\pi/2 - \arctan n| + |\pi/2 - \arctan m| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $w \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n = n \to w$ ως προς την d. Τότε, $\arctan n \to \arctan w$ καθώς το $n \to \infty$. Όμως, $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \pi/2$, άρα $\arctan w = \pi/2$, το οποίο είναι άτοπο.

5.3. *Θεωρούμε δύο μετρικές d_1 και d_2 στο ίδιο σύνολο X. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$,*

$$a d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b d_1(x,y).$$

Δείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) στον X είναι βασική στον (X, d_1) αν και μόνο αν είναι βασική στον (X, d_2).

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον (X, d_1). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $m, n \geq n_0$ να ισχύει $d_1(x_n, x_m) < \varepsilon/b$. Τότε, αν $m, n \geq n_0$,

$$d_2(x_n, x_m) \leq b \cdot d_1(x_n, x_m) < b\,\frac{\varepsilon}{b} = \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον (X, d_2). Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι εντελώς ανάλογη.

5.4. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X. Δείξτε ότι: αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στοιχείων του D συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, τότε ο X είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X, ρ). Το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $d_n \in D$ με την ιδιότητα $\rho(x_n, d_n) < 1/n$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geq n_0$,

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επίσης, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n_1 < \varepsilon/3$. Αν θέσουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, τότε για κάθε $n, m \geq n_2$ έχουμε

$$\rho(d_n, d_m) \leq \rho(d_n, x_n) + \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, d_m) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (d_n) είναι βασική ακολουθία στο D. Από την υπόθεσή μας, υπάρχει $x \in X$ ώστε $\rho(d_n, x) \to 0$. Όμως, $\rho(d_n, x_n) \leq 1/n$, δηλαδή $\rho(d_n, x_n) \to 0$. Άρα,

$$0 \leq \rho(x_n, x) \leq \rho(x_n, d_n) + \rho(d_n, x) \to 0.$$

Δηλαδή, $x_n \to x$. Αφού η (x_n) ήταν τυχούσα βασική ακολουθία στον X, ο (X, ρ) είναι πλήρης.

5.5. *Δείξτε ότι ένας μετρικός χώρος (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε κλειστή μπάλα*

$$\hat{B}(x, \varepsilon) = \{z \in X : \rho(z, x) \leq \varepsilon\},$$

όπου $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X.

Υπόδειξη. Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης τότε κάθε κλειστή μπάλα $\hat{B}(x, \varepsilon)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, άρα είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του X.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Γνωρίζουμε ότι κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχουν $x \in X$ και $r > 0$ ώστε $x_n \in \hat{B}(x, r)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η $\hat{B}(x, r)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος με την επαγόμενη μετρική (από την υπόθεση) και η (x_n) είναι βασική στον (X, ρ), άρα είναι βασική και στον $(\hat{B}(x, r), \rho)$. Συνεπώς, υπάρχει $x_0 \in \hat{B}(x, r)$ ώστε $\rho(x_n, x_0) \to 0$. Δηλαδή, $x_n \to x_0$ στον X. Η (x_n) ήταν τυχούσα βασική ακολουθία στον X, άρα ο (X, ρ) είναι πλήρης.

5.6. *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και D πυκνό υποσύνολο του X ώστε το $X \setminus D$ να είναι επίσης πυκνό. Δείξτε ότι τουλάχιστον ένα από τα D, $X \setminus D$ δεν είναι σύνολο F_σ.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα D και $X \setminus D$ είναι σύνολα F_σ. Αφού το D είναι F_σ, το $X \setminus D$ είναι σύνολο G_δ. Όμοια, αφού το $X \setminus D$ είναι F_σ, το D είναι σύνολο G_δ. Τότε, $D = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ και $X \setminus D = \bigcap_{n=1}^\infty V_n$, όπου G_n, V_n ανοικτά σύνολα. Αφού το D είναι πυκνό, κάθε $G_n \supseteq D$ είναι και πυκνό. Όμοια, αφού το $X \setminus D$ είναι πυκνό, κάθε $V_n \supseteq X \setminus D$ είναι πυκνό. Δηλαδή, η αριθμήσιμη οικογένεια $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ αποτελείται από ανοικτά και πυκνά σύνολα. Από το θεώρημα του Baire, το

$$\emptyset = D \cap (X \setminus D) = \left(\bigcap_{n=1}^\infty G_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^\infty V_n\right)$$

είναι πυκνό G_δ-υποσύνολο του X, το οποίο είναι άτοπο.

5.7. *Δείξτε ότι: αν (L_n) είναι ακολουθία ευθειών στο $\mathbb{R}^2$ τότε* $\mathrm{int}\left(\bigcup_{n=1}^\infty L_n\right) = \emptyset$.

Υπόδειξη. Κάθε L_n είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με κενό εσωτερικό. Συνεπώς, το $G_n = \mathbb{R}^2 \setminus L_n$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα του Baire, το σύνολο $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό G_δ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Συνεπώς,

$$\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n\right) = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R}^2 \setminus L_n)} = \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = \overline{G} = \mathbb{R}^2,$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{int}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n) = \emptyset$.

Ομάδα Β′

5.8. (α) *Δείξτε ότι ο $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$ είναι πλήρης.*

(β) *Δείξτε ότι ο κύβος του Hilbert $\mathcal{H}^\infty$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

(γ) *Δείξτε ότι ο $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ δεν είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον ℓ_p. Γράφουμε

$$x_n = (x_n(k)) = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, s \geq n_0$,

$$(*) \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n, s \geq n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_n(k) - x_s(k)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν $x(1), \ldots, x(k), \ldots \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots)$. Θα δείξουμε ότι $x \in \ell_p$ και $\|x_n - x\|_p \to 0$.

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$: από την $(*)$ έχουμε, για κάθε $n, s \geq n_0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Επίσης,

$$\lim_{s\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_s(k)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^p\right)^{1/p},$$

άρα, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$(**) \qquad \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x(k)|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για $n = n_0$ έχουμε ότι $x - x_{n_0} \in \ell_p$ και, αφού $x_{n_0} \in \ell_p$, από την ανισότητα του Minkowski βλέπουμε ότι $x = (x - x_{n_0}) + x_{n_0} \in \ell_p$. Επιπλέον, η $(**)$ δείχνει ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\|x - x_n\|_p \leq \varepsilon,$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $x_n \to x$.

(β) Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{H}^\infty$. Γράφουμε

$$x_n = (x_n(k)) = (x_n(1), \ldots, x_n(k), \ldots).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n, s \geq n_0$,

$$(*) \qquad d(x_n, x_s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n(k) - x_s(k)|}{2^k} < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n, s \geq n_0$ και κάθε $i \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|x_n(i) - x_s(i)| \leq 2^i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n(k) - x_s(k)|}{2^k} < 2^i \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_n(i))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$. Από την πληρότητα του $\mathbb{R}$, υπάρχουν $x(1), \ldots, x(k), \ldots \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $x = (x(1), \ldots, x(k), \ldots)$. Προφανώς, $|x(k)| = \lim_{n\to\infty} |x_n(k)| \leq 1$, άρα $x \in \mathcal{H}^\infty$. Μένει να δείξουμε ότι $d(x_n, x) \to 0$.

Σταθεροποιούμε $N \in \mathbb{N}$: από την $(*)$ έχουμε, για κάθε $n, s \geq n_0$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{|x_n(k) - x_s(k)|}{2^k} < \varepsilon.$$

Επίσης,

$$\lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{|x_n(k) - x_s(k)|}{2^k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{|x_n(k) - x(k)|}{2^k},$$

άρα, για κάθε $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{|x_n(k) - x(k)|}{2^k} \leq \varepsilon.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_n(k) - x(k)|}{2^k} \leq \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $x_n \xrightarrow{d} x$.

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞ (γιατί ο ℓ_∞ είναι πλήρης). Ορίζουμε $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots\right)$ και $x = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right) \in \ell_\infty \setminus c_{00}$. Τότε,

$$\|x_n - x\|_\infty = \sup\left\{|1-1|, \dots, \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right|, \left|0 - \frac{1}{n+1}\right|, \dots\right\} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Βρήκαμε (x_n) στον c_{00} με $x_n \to x \in \ell_\infty \setminus c_{00}$. Άρα, ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞.

5.9. *Θεωρούμε τον $C([0,1])$ με μετρική την*

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\, dt.$$

Δείξτε ότι η $(f_n)_{n\geq 2}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & , \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ 1 & , \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

είναι βασική ακολουθία ως προς την ρ_1 αλλά δεν είναι συγκλίνουσα.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η (f_n) είναι βασική ακολουθία ως προς την d: έστω $n > m$. Τότε, $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n$ και

$$d(f_n, f_m) = \int_0^{1/2} |f_n - f_m| + \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| + \int_{a_m}^{1} |f_n - f_m| = \int_{1/2}^{a_m} |f_n - f_m| \leq a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}.$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και αν $n > m \geq n_0$, τότε

$$d(f_n, f_m) \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, η (f_n) είναι βασική. Ας υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ (ως προς την d) για κάποια συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα,

$$0 \leq \int_0^{1/2} |f(t)|dt = \int_0^{1/2} |f_n(t) - f(t)|dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0,$$

δηλαδή $\int_0^{1/2} |f(t)|\, dt = 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, πρέπει να ισχύει $f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, 1/2]$.

Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(t) = 1$ για κάθε $t \in [\delta, 1]$. Όμως,

$$0 \leq \int_\delta^1 |f_n(t) - f(t)|dt \leq \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt \to 0,$$

άρα

$$\int_\delta^1 |1 - f(t)|dt = 0.$$

Από τη συνέχεια της f συμπεραίνουμε ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in [\delta, 1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(t) = 1$ για κάθε $t \in (1/2, 1]$. Έπεται ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $t_0 = 1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f υποτέθηκε συνεχής στο $[0,1]$.

5.10. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης αν και μόνον αν κάθε αριθμήσιμο, κλειστό υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος.*

Υπόδειξη. Αν ο (X, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος τότε κάθε κλειστό (άρα και κάθε αριθμήσιμο κλειστό) υποσύνολο του X είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος. Αντίστροφα, έστω (x_n) βασική ακολουθία στον X. Θεωρούμε το αριθμήσιμο σύνολο $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν το A είναι κλειστό σύνολο, τότε ο (A, ρ) είναι πλήρης μετρικός χώρος από την υπόθεση, άρα υπάρχει $x \in A$ ώστε $x_n \to x$.

(ii) Αν το A δεν είναι κλειστό, από την $\overline{A} = A \cup A'$ συμπεραίνουμε ότι $A' \neq \emptyset$. Άρα, υπάρχει $x \in X$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του A. Αυτό σημαίνει ότι κάθε περιοχή του x περιέχει άπειρους όρους της (x_n). Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση μπορούμε να ορίσουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n} \to x$. Αφού η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα (στο x) υπακολουθία, έπεται ότι $x_n \to x$.

5.11. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι ο (X, ρ) είναι πλήρης αν και μόνο αν κάθε ακολουθία φραγμένης κύμανσης στον X είναι συγκλίνουσα.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο (X,ρ) είναι πλήρης. Έστω (x_n) ακολουθία φραγμένης κύμανσης στον X. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty}\rho(x_n,x_{n+1}) < +\infty$, υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=N}^{\infty}\rho(x_n,x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Αν $k > l \geq N$, τότε

$$\rho(x_l,x_k) \leq \rho(x_l,x_{l+1}) + \cdots + \rho(x_{k-1},x_k) \leq \sum_{n=l}^{\infty}\rho(x_n,x_{n+1}) \leq \sum_{n=N}^{\infty}\rho(x_n,x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Άρα, η (x_n) είναι βασική ακολουθία και, αφού ο (X,ρ) είναι πλήρης, η (x_n) είναι συγκλίνουσα.

Αντίστροφα, έστω (x_n) βασική ακολουθία. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $k_1\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_k,x_m) < \frac{1}{2}$ για κάθε $k,m \geq k_1$. Στη συνέχεια θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ και βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $\rho(x_k,x_m) < \frac{1}{2^2}$ για κάθε $k,m \geq k_2$. Συνεχίζουμε επαγωγικά: στο n-οστό βήμα θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ και βρίσκουμε $k_n > k_{n-1}$ ώστε $\rho(x_k,x_m) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $k,m \geq k_n$. Θεωρούμε την υπακολουθία (x_{k_n}). Από τον τρόπο ορισμού των k_n βλέπουμε ότι: για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $k_{n+1},k_n \geq k_n$, άρα $\rho(x_{k_{n+1}},x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$. Έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\rho(x_{k_{n+1}},x_{k_n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$. Συνεπώς, η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση. Από την υπόθεση, υπάρχει $x\in X$ ώστε $x_{k_n}\to x$. Αφού η (x_n) είναι βασική και έχει συγκλίνουσα (στο x) υπακολουθία, έπεται ότι $x_n \to x$.

5.12. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, (x_n) ακολουθία στον X και $x\in X$ ώστε $x_n\to x$. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{x_n : n = 1,2,\ldots\}\cup\{x\}$. Αποδείξτε ότι ο $(A,\rho|_A)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.*

Υπόδειξη. Έστω (y_m) βασική ακολουθία στο A. Δηλαδή, κάθε y_m είναι όρος της ακολουθίας (x_n) ή $y = x$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν το σύνολο $B = \{y_m : m\in\mathbb{N}\}$ των όρων της (y_m) είναι πεπερασμένο, τότε η (y_m) είναι τελικά σταθερή. [Πράγματι: αν το B είναι πεπερασμένο και έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε υπάρχει η ελάχιστη θετική απόσταση δ διακεκριμένων σημείων του B. Όμως, η (y_m) είναι βασική, άρα για μεγάλα m,n θα έχουμε $\rho(y_m,y_n) < \delta$, δηλαδή $y_m = y_n$]. Αφού η (y_m) είναι τελικά σταθερή, είναι συγκλίνουσα.

(ii) Αν το σύνολο $B = \{y_m : m\in\mathbb{N}\}$ των όρων της (y_m) είναι άπειρο, τότε είτε $y_m = x$ για άπειρους δείκτες m ή μπορούμε να βρούμε υπακολουθία της (y_m) που είναι και υπακολουθία της (x_n). [Πράγματι: αν $y_m \neq x$ για κάθε $m \geq s_1$, έχουμε $y_{s_1} = x_{k_1}$ για κάποιον $k_1\in\mathbb{N}$. Το σύνολο $\{y_m : m \geq s_1+1\}$ περιέχει άπειρους όρους της (x_n) άρα και κάποιον $y_{s_2} = x_{k_2}$ με $k_2 > k_1$. Συνεχίζοντας έτσι βρίσκουμε $y_{s_n} = x_{k_n}$ ώστε η (y_{s_n}) να είναι υπακολουθία της (y_n) και της (x_n) ταυτόχρονα. Αφού $x_n\to x$ έχουμε $y_{s_n} = x_{k_n}\to x$. Σε κάθε περίπτωση, η βασική ακολουθία (y_m) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα συγκλίνει.

5.13. *Έστω ρ μετρική στο $\mathbb{R}$ ώστε: (i) ο $(\mathbb{R},\rho)$ είναι πλήρης και (ii) η ρ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta>0$ ώστε $\mathrm{diam}_\rho([n,\infty))\geq\delta$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Αφού $[n,\infty)\supseteq[n+1,\infty)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, η ακολουθία $a_n=\mathrm{diam}_\rho([n,\infty))$ είναι φθίνουσα (και έχει μη αρνητικούς όρους). Άρα, συγκλίνει στο $\inf\{a_n:n\in\mathbb{N}\}$. Αν δεν υπάρχει $\delta>0$ ώστε $a_n\geq\delta$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\inf\{a_n:n\in\mathbb{N}\}=0$. Αφού η ρ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική, έχουμε ότι κάθε $[n,\infty)$ είναι ρ-κλειστό. Έτσι, έχουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του $(\mathbb{R},\rho)$ που η ακολουθία των διαμέτρων τους συγκλίνει στο μηδέν. Αφού ο $(\mathbb{R},\rho)$ είναι πλήρης, εφαρμόζεται το θεώρημα του Cantor: θα ισχύει $\bigcap_{n=1}^\infty[n,\infty)\neq\emptyset$, το οποίο είναι άτοπο.

5.14. *Έστω X πλήρης χώρος με νόρμα και $\hat{B}(x_n,r_n)$ φθίνουσα ακολουθία από κλειστές μπάλες. Αποδείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^\infty\hat{B}(x_n,r_n)\neq\emptyset$.*

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|x_{n+1}-x_n\|\leq r_n-r_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αν $x_{n+1}=x_n$ αυτό είναι φανερό, ενώ αν $x_{n+1}\neq x_n$ παρατηρούμε ότι $y=x_{n+1}+\frac{x_{n+1}-x_n}{\|x_{n+1}-x_n\|}r_{n+1}\in\hat{B}(x_{n+1},r_{n+1})\subseteq\hat{B}(x_n,r_n)$, οπότε $\|y-x_n\|\leq r_n\Longrightarrow\|x_{n+1}-x_n\|+r_{n+1}\leq r_n$. Αφού $r_n-r_{n+1}\geq 0$, η (r_n) είναι φθίνουσα, άρα συγκλίνει. Ειδικότερα, είναι βασική ακολουθία. Επίσης, αν $n<m$ έχουμε

$$\|x_m-x_n\|\leq\|x_m-x_{m-1}\|+\cdots+\|x_{n+1}-x_n\|\leq(r_{m-1}-r_m)+\cdots+(r_n-r_{n+1})=r_n-r_m,$$

οπότε η (x_n) είναι βασική ακολουθία στον X. Ο X είναι πλήρης, άρα υπάρχει $x_0\in X$ ώστε $x_n\to x_0$. Τέλος, δείχνουμε ότι $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^\infty\hat{B}(x_n,r_n)$: για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $x_m\in\hat{B}(x_n,r_n)$ για κάθε $m\geq n$, άρα $x_0=\lim\limits_{m\to\infty}x_m\in\hat{B}(x_n,r_n)$.

5.15. *Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $f:X\to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι αν (E_n) είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X, με $\mathrm{diam}(E_n)\to 0$, τότε*

$$f\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n\right)=\bigcap_{n=1}^\infty f(E_n).$$

Υπόδειξη. Έχουμε $\bigcap_{n=1}^\infty E_n\subseteq E_m$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$, άρα $f\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n\right)\subseteq f(E_m)$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$f\left(\bigcap_{n=1}^\infty E_n\right)\subseteq\bigcap_{m=1}^\infty f(E_m)=\bigcap_{n=1}^\infty f(E_n).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό: έστω $y\in\bigcap_{n=1}^\infty f(E_n)$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, υπάρχει $x_n\in E_n$ ώστε $f(x_n)=y$. Αφού $\mathrm{diam}(E_n)\to 0$, έχουμε $\bigcap_{n=1}^\infty E_n=\{x\}$ από το θεώρημα του Cantor. Επίσης, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $x_n,x\in E_n$ άρα $\rho(x_n,x)\leq\mathrm{diam}(E_n)\to 0$. Δηλαδή, $x_n\to x$. Τότε, αφού η f είναι συνεχής, έχουμε

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}y=y.$$

Δηλαδή, $y = f(x) \in f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$.

5.16. *Έστω (X,ρ) πλήρης μετρικός χώρος και G μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$\sigma(x,y) = \rho(x,y) + \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(x, X\setminus G)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(y, X\setminus G)}\right|$$

στο $G\times G$. Δείξτε ότι ο (G,σ) είναι πλήρης μετρικός χώρος και ότι η σ είναι ισοδύναμη με την $\rho|_G$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν $x,y\in G$, τότε $\mathrm{dist}(x, X\setminus G) > 0$ και $\mathrm{dist}(y, X\setminus G) > 0$ (γιατί το $X\setminus G$ είναι κλειστό και $x,y\notin X\setminus G$). Άρα, η σ ορίζεται καλά. Ελέγχουμε εύκολα ότι η σ είναι μετρική.

Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (G,σ). Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε, αν $m,n\geq n_0$ τότε

$$0 \leq \rho(x_n,x_m) \leq \sigma(x_n,x_m) < \varepsilon,$$

άρα η (x_n) είναι βασική ακολουθία και στον (X,ρ). Υπάρχει λοιπόν $x\in X$ ώστε $\rho(x_n,x)\to 0$. Επίσης,

$$0 \leq \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(x_n, X\setminus G)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(x_m, X\setminus G)}\right| \leq \sigma(x_n,x_m) < \varepsilon,$$

δηλαδή, η $(1/\mathrm{dist}(x_n, X\setminus G))$ είναι βασική ακολουθία στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, άρα είναι φραγμένη. Υπάρχει λοιπόν $M>0$ με την ιδιότητα: για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(x_n, X\setminus G)} \leq M \Longrightarrow \mathrm{dist}(x_n, X\setminus G) \geq \frac{1}{M}.$$

Αφού $x_n \xrightarrow{\rho} x$, έχουμε $\mathrm{dist}(x_n, X\setminus G)\to \mathrm{dist}(x, X\setminus G)$, και

$$\mathrm{dist}(x, X\setminus G) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(x_n, X\setminus G) \geq \frac{1}{M} > 0,$$

δηλαδή $x\in G$. Τέλος,

$$\sigma(x,x_n) = \rho(x,x_n) + \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(x, X\setminus G)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(x_n, X\setminus G)}\right| \to 0.$$

5.17. *Έστω (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $G=\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.*

Υπόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ το σύνολο $V_n = X\setminus\{x_n\}$ είναι ανοικτό και πυκνό. Όμως,

$$\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n\right) = (X\setminus G)\cap G = \emptyset.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα του Baire.

5.18. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ασυνεχής σε ένα σύνολο πρώτης κατηγορίας αν και μόνο αν είναι συνεχής σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω $C(f)$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f και $D(f)$ το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Γνωρίζουμε ότι το $C(f)$ είναι σύνολο G_δ, δηλαδή γράφεται στη μορφή $C(f) = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$, όπου G_n ανοικτά υποσύνολα του X.

Υποθέτουμε πρώτα ότι το $C(f)$ είναι πυκνό. Τότε κάθε $G_n \supseteq C(f)$, άρα κάθε G_n είναι πυκνό. Έχουμε

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus C(f) = \bigcup_{n=1}^\infty (\mathbb{R} \setminus G_n),$$

κάθε $F_n := \mathbb{R} \setminus G_n$ είναι κλειστό και $\mathrm{int}(F_n) = \mathrm{int}(\mathbb{R} \setminus G_n) = \mathbb{R} \setminus \overline{G_n} = \emptyset$. Συνεπώς, το $D(f)$ είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας.

Αντίστροφα, αν $D(f) = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, όπου κάθε A_n είναι πουθενά πυκνό, θέτουμε $F_n = \overline{A_n}$ και έχουμε $D(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty F_n$ και $\mathrm{int}(F_n) = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$C(f) = \mathbb{R} \setminus D(f) \supseteq \mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^\infty F_n = \bigcap_{n=1}^\infty (\mathbb{R} \setminus F_n).$$

Παρατηρούμε ότι κάθε $G_n := \mathbb{R} \setminus F_n$ είναι ανοικτό και $\overline{G_n} = \overline{\mathbb{R} \setminus F_n} = \mathbb{R} \setminus \mathrm{int}(F_n) = \mathbb{R}$, δηλαδή κάθε G_n είναι και πυκνό. Από το θεώρημα του Baire, το $\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \bigcap_{n=1}^\infty (\mathbb{R} \setminus F_n)$ είναι πυκνό, άρα και το $C(f)$ είναι πυκνό.

5.19. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$ ώστε η d να είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ο $(\mathbb{Q}, d)$ να είναι πλήρης.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μετρική d στο $\mathbb{Q}$ ώστε η d να είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική και ο $(\mathbb{Q}, d)$ να είναι πλήρης. Γράφουμε $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αφού η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική, κάθε μονοσύνολο $\{q_n\}$ είναι d-κλειστό και έχει κενό εσωτερικό (αλλιώς θα ήταν ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ με τη συνήθη μετρική). Τότε έχουμε άτοπο από τη δεύτερη μορφή του θεωρήματος του Baire, διότι $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^\infty \{q_n\}$ και έχουμε υποθέσει ότι ο $(\mathbb{Q}, d)$ είναι πλήρης.

5.20. *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και δυο συναρτήσεις $f, g : X \to X$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε η $f^k = f \circ \cdots \circ f$ να είναι συστολή, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $x \in X$ ώστε $f(x) = x$.*

(β) ιτ Αν η f είναι συστολή και $f \circ g = g \circ f$, τότε υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $f(x) = g(x) = x$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι: αν η f έχει σταθερό σημείο τότε αυτό είναι μοναδικό. Ο λόγος είναι ότι κάθε σταθερό σημείο της f είναι επίσης σταθερό σημείο της f^k (εξηγήστε γιατί) και η f^k ως συστολή έχει μοναδικό σταθερό σημείο.

Αφού η f^k είναι συστολή, υπάρχει $x \in X$ ώστε $f^k(x) = x$. Τότε, $f(x) = f(f^k(x)) = f^k(f(x))$ (διότι $f \circ f^k = f^k \circ f = f^{k+1}$) δηλαδή το $f(x)$ είναι επίσης σταθερό σημείο της f^k. Όμως, μια συστολή έχει μοναδικό σταθερό σημείο. Συνεπώς, $f(x) = x$.

(β) Η f είναι συστολή, άρα έχει μοναδικό σταθερό σημείο $x \in X$. Μένει να δείξουμε ότι $g(x) = x$. Όμως,

$$g(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

δηλαδή, το $g(x)$ είναι σταθερό σημείο της f. Αφού το μοναδικό σταθερό σημείο της f είναι το x έπεται ότι $g(x) = x = f(x)$.

5.21. *Έστω (X,d) πλήρης μετρικός χώρος, E πυκνό και G_δ–υποσύνολο του X. Αποδείξτε ότι για κάθε ομοιομορφισμό $h : X \to X$ ισχύει $E \cap h(E) \neq \emptyset$.*

Υπόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι κάθε ομοιομορφισμός απεικονίζει σύνολα G_δ σε σύνολα G_δ και πυκνά σύνολα σε πυκνά σύνολα. Συνεπώς, το $h(E)$ είναι πυκνό και G_δ υποσύνολο του X. Πιο συγκεκριμένα, $E = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ όπου G_n ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X και $h(E) = \bigcap_{n=1}^\infty V_n$ όπου κάθε $V_n = h(G_n)$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X. Αφού ο (X,d) είναι πλήρης, το θεώρημα του Baire μας εξασφαλίζει ότι το σύνολο

$$E \cap h(E) = \left(\bigcap_{n=1}^\infty G_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^\infty V_n\right)$$

είναι πυκνό G_δ-υποσύνολο του X. Ειδικότερα, $E \cap h(E) \neq \emptyset$.

Ομάδα Γ΄

5.22. *Δείξτε ότι δεν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιοτητα*

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x).$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, ισχύει το εξής: $x \in \mathbb{Q}$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geq k$ ώστε $f_n(x) > 1/2$ (ισοδύναμα, $f_n(x) > 1/2$ για άπειρους φυσικούς n). Με άλλα λόγια,

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{k=1}^\infty \left(\bigcup_{n=k}^\infty \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > 1/2\}\right).$$

Πράγματι, αν $x \in \mathbb{Q}$ έχουμε $f_n(x) \to 1$ άρα $f_n(x) > 1/2$ τελικά, οπότε $f_n(x) > 1/2$ για άπειρους φυσικούς n. Από την άλλη πλευρά, αν $x \notin \mathbb{Q}$ έχουμε $f_n(x) \to 0$ άρα $f_n(x) < 1/2$ τελικά, οπότε υπάρχει k ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $f_n(x) < 1/2$. Αυτό αποδεικνύει τον αντίστροφο εγκλεισμό (εξηγήστε γιατί).

Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το σύνολο

$$G_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > 1/2\}$$

είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών συνόλων: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > 1/2\}$ είναι ανοικτό, διότι η f_n είναι συνεχής. Συνεπώς, το $\mathbb{Q} = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ είναι G_δ-υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αυτό έχουμε δει ότι δεν ισχύει: κάθε πυκνό και G_δ-υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

5.23. (α) *Έστω $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $F_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$F_A(x) = \sum_{\{n : a_n \leq x\}} 2^{-n}$$

είναι αύξουσα, συνεχής από δεξιά παντού και ασυνεχής ακριβώς στα σημεία του A.

(β) *Έστω A αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε το σύνολο των σημείων ασυνέχειας $D(g)$ της g να είναι το $\mathbb{R} \setminus A$.*

(γ) *Έστω E κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θέτουμε $G = E^\circ \cap \mathbb{Q}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \chi_E(x) - \chi_G(x)$. Αποδείξτε ότι $D(h) = E$.*

(δ) *Έστω $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ένα F_σ–υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{n : x \in E_n\}}, & x \in \mathbb{Q} \cap E \\ -\frac{1}{\min\{n : x \in E_n\}}, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap E \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus E \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $D(f_E) = E$.

Υπόδειξη. (α) Προφανώς η F_A είναι αύξουσα. Δείχνουμε ότι F_A είναι δεξιά συνεχής παντού. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n > n_0} 2^{-n} < \varepsilon$. Έστω $\delta = \min\{a_n - x_0 > 0 : n = 1, 2, \ldots, n_0\}$. Έτσι, αν $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_0 < a_n < x_0 + \delta$, τότε $n > n_0$. Οπότε, αν $x_0 < x < x_0 + \delta$ έχουμε

$$0 \leq F_A(x) - F_A(x_0) = \sum_{\{n : x_0 < a_n \leq x\}} 2^{-n} \leq \sum_{\{n : x_0 < a_n < x_0 + \delta\}} 2^{-n} \leq \sum_{n > n_0} 2^{-n} < \varepsilon.$$

Τώρα δείχνουμε ότι αν $a_k \in A$ τότε $\tau_{F_A}(a_k) > 0$. Πράγματι· αν $x < a_k$ τότε

$$F_A(a_k) - F_A(x) = \sum_{\{n : x < a_n \leq a_k\}} 2^{-n} \geq \frac{1}{2^k}.$$

Συνεπώς, $\tau_{F_A}(a_k) \geq \frac{1}{2^k}$ για $k = 1, 2, \ldots$. Με άλλα λόγια η F_A είναι ασυνεχής στα σημεία του A (παρουσιάζει άλμα).

Για να δείξουμε ότι τα σημεία ασυνέχειας της F_A είναι ακριβώς τα σημεία του A αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \notin A$ η F_A είναι αριστερά συνεχής στο x. Το επιχείρημα είναι παρόμοιο με αυτό της συνέχειας από δεξιά και γι' αυτό παραλείπεται.

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε το $D(g) = \mathbb{R}\setminus A$. Τότε, το $C(g) = A$ είναι σύνολο G_δ. Αν είναι και πυκνό, γνωρίζουμε ότι πρέπει να είναι υπεραριθμήσιμο.

(γ) Αν $x \notin E$ τότε υπάρχει V_x ανοικτή περιοχή του x με $V_x \cap E = \emptyset$. Έτσι, $h|_{V_x} \equiv 0$ και άρα η h είναι συνεχής στο x.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η h είναι ασυνεχής στο E. Πράγματι· έστω $x \in E$ και $\delta > 0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $x \in E^\circ$. Τότε υπάρχουν $q \in \mathbb{Q} \cap E$, $r \in \mathbb{Q}^c \cap E$ με $x - \delta < q < r < x + \delta$. Άρα, έχουμε
$$\tau_h((x-\delta, x+\delta)) \geq |h(q) - h(r)| = 1.$$
Έτσι, είναι $\tau_h(x) \geq 1$.
- $x \in E \setminus E^\circ$. Τότε υπάρχει $r \notin E$ ώστε $|x - r| < \delta$. Έτσι, είναι
$$\tau_h((x-\delta, x+\delta)) \geq |h(x) - h(r)| = 1.$$
Ώστε, $\tau_h(x) \geq 1$.

Οπότε, σε κάθε περίπτωση αν $x \in E$ έχουμε $\tau_h(x) \geq 1$.

(δ) Αν $x \notin E$, τότε η f_E είναι συνεχής στο x. Πράγματι· έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, $x \notin E_1 \cup \cdots \cup E_{n_0}$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ με
$$\delta < \mathrm{dist}(x, E_1 \cup \cdots \cup E_{n_0}).$$
Κατόπιν, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap E^c$, τότε $|f_E(y) - f_E(x)| = 0 < \varepsilon$.
- Αν $y \in (x-\delta, x+\delta) \cap E$, έπεται ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $y \in E_m$. Τότε, αναγκαστικά έχουμε $m > n_0$ (εξηγήστε γιατί). Έτσι,
$$|f_E(y) - f_E(x)| = \frac{1}{\min\{n : y \in E_n\}} \leq \frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon.$$

Συνεπώς, η f_E συνεχής στο $x \in \mathbb{R} \setminus E$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η f_E είναι ασυνεχής σε κάθε $x \in E$. Ειδικότερα, θα δείξουμε την ανισότητα
$$(*) \qquad \tau_{f_E}(x) \geq \frac{1}{N_x(1+N_x)}, \quad x \in E$$

όπου $N_x = \min\{n \in \mathbb{N} : x \in E_n\}$.

Απόδειξη της $(*)$. Έστω $x \in E$ και $\delta > 0$. Τότε ορίζεται ο $N_x \equiv N$ και έχουμε ότι $x \notin \bigcup_{k<N} E_k$ (ενδεχομένως $\bigcup_{k<N} E_k = \emptyset$, αν $N = 1$). Διακρίνουμε περιπτώσεις όπως στο (γ):

- $x \in E_N \setminus E_N^{\circ}$: Τότε, υπάρχει $y \notin \bigcup_{j \leq N} E_j$ (εξηγήστε γιατί) με $|y - x| < \delta$. Τότε, παίρνουμε

$$\tau_{f_E}((x-\delta, x+\delta)) \geq |f_E(x) - f_E(y)| \geq |f_E(x)| - |f_E(y)| \geq \frac{1}{N(N+1)}.$$

  Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $|f_E(y)| \leq \frac{1}{N+1}$.[1] Άρα, για κάθε $\delta > 0$ ισχύει $\tau_{f_E}((x-\delta, x+\delta)) \geq [N(N+1)]^{-1}$ απ' όπου έπεται ότι $\tau_{f_E}(x) \geq [N(N+1)]^{-1}$.

- $x \in E_N^{\circ}$. Τότε, υπάρχουν $q \in E_N \cap \mathbb{Q}$, $r \in E_N \cap \mathbb{Q}^c$ με $x - \delta < q < r < x + \delta$. Άρα, έχουμε

$$\tau_{f_E}((x-\delta, x+\delta)) \geq |f_E(q) - f_E(r)| = \frac{1}{\min\{n : q \in E_n\}} + \frac{1}{\min\{n : r \in E_n\}} \geq \frac{2}{N}$$

  Επομένως, είναι $\tau_{f_E}(x) \geq \frac{2}{N}$.

Συνοψίζοντας έχουμε ότι $\tau_{f_E}(x) \geq [N(N+1)]^{-1}$ για κάθε $x \in E$.

5.24. *Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα $(a, b) \subseteq [0, \infty)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $y \in (a, b)$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(ny) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.*

Υπόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι για κάθε $y \in [a, b]$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} f(ny) = 0$ περνώντας σε ένα κλειστό υποδιάστημα του (a, b). Έστω $\varepsilon > 0$, ορίζουμε τα σύνολα

$$K_n = \{x \in [a, b] : \forall k \geq n, \ |f(kx)| \leq \varepsilon, \} = \bigcap_{k=n}^{\infty} \{x \in [a, b] : |f(kx)| \leq \varepsilon\}.$$

Τα K_n είναι κλειστά υποσύνολα του $[a, b]$ διότι η f είναι συνεχής. Επίσης, από την υπόθεση ισχύει $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Καθώς, ο $[a, b]$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, από το θεώρημα Baire έχουμε ότι υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και διάστημα (c, d) ώστε $(c, d) \subseteq K_{n_0}$. Δηλαδή, για κάθε $y \in (c, d)$ και για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|f(ny)| \leq \varepsilon$, ισοδύναμα αν $y \in (n_0 c, n_0 d) \cup ((n_0+1)c, (n_0+1)d) \cup \cdots$ τότε $|f(y)| \leq \varepsilon$. Όμως, όσο το n αυξάνει τα διαστήματα γίνονται επικαλυπτόμενα. Έτσι, αν επιλέξουμε $m > \max\{n_0, \frac{c}{d-c}\}$ τότε $\bigcup_{j=m}^{\infty} (jc, jd) = (mc, +\infty)$ και αν $x > mc$ τότε $|f(x)| \leq \varepsilon$. Άρα, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

[1] Αν $y \notin E$, τότε $|f_E(y)| = 0$, ενώ αν $y \in E$, τότε $\min\{n : y \in E_n\} \geq N + 1$.

5.25. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n_x \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_x$, $f^{(n)}(x) = 0$. Δείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο.*

Υπόδειξη. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: *αν μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα «για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει $n = n(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{(n)}(x) = 0$» τότε η f είναι πολυώνυμο.*

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Θεωρούμε το σύνολο A όλων των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία δεν υπάρχει (ανοικτή) περιοχή του x ώστε αν περιορίσουμε την f εκεί να είναι πολυώνυμο. Τότε, ισχύουν τα εξής:

- Το A είναι μη κενό. Πράγματι: αν ήταν $A = \emptyset$ τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν ανοικτή περιοχή V_x του x και πολυώνυμο p_x ώστε $f|_{V_x} \equiv p_x$. Αν I είναι κλειστό και φραγμένο διάστημα, τότε για κάθε $x \in I$ υπάρχει V_x ανοικτή περιοχή του x ώστε $f|_{V_x}$ είναι πολυώνυμο. Τότε, τα $(V_x)_{x\in I}$ αποτελούν ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς I, άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_k \in I$ ώστε $I \subseteq \bigcup_{i=1}^k V_{x_i}$ και η $f|_{V_{x_i}}$ είναι πολυώνυμο. Για κάθε $1 \leq i \leq k$ υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε $f^{(n_i)}(x) = 0$ για κάθε $x \in V_{x_i} \cap I$. Θέτουμε $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ οπότε $f^{(n)} \equiv 0$ στο I. Άρα, η $f|_I$ είναι πολυώνυμο για κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα I. (Σημείωση: *το βήμα αυτό αιτιολογείται και χωρίς να κάνουμε χρήση της συμπάγειας των κλειστών διαστημάτων – εξηγήστε γιατί*). Θεωρούμε τα διαστήματα $J_n = [-n, n]$ για $n = 1, 2, \ldots$. Τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων p_n ώστε $f|_{J_n} \equiv p_n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $p_n(x) = p_1(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, άρα $p_n = p_1$ για $n = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, $f(x) = p_1(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, εφόσον $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^\infty J_n$.
- Το A είναι κλειστό. Πράγματι: αν θεωρήσουμε $y \in A^c$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ και p_δ πολυώνυμο ώστε $f|_{(y-\delta,y+\delta)} \equiv p_\delta$. Τότε, αν $z \in (y-\delta, y+\delta)$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $(z-\varepsilon, z+\varepsilon) \subseteq (y-\delta, y+\delta)$, οπότε $f|_{(z-\varepsilon,z+\varepsilon)} \equiv p_\delta$. Δηλαδή, $(y-\delta, y+\delta) \subseteq A^c$. Συνεπώς, το A^c είναι ανοικτό.

Είναι γνωστό ότι ο A είναι πλήρης μετρικός υπόχωρος του $\mathbb{R}$ με την συνήθη μετρική. Επίσης, τα σύνολα
$$E_n = \{x \in \mathbb{R} : f^{(n)}(x) = 0\}$$
είναι κλειστά αφού είναι τα σύνολα ριζών συνεχών συναρτήσεων. Οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Baire στον υπόχωρο A, βρίσκουμε ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{int}_A(A \cap E_m) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x_0 \in A \cap E_m$ και $\delta > 0$ ώστε
$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \subseteq E_m.$$

Ισχυρισμός 1. Ισχύει $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \subseteq \bigcap_{j=m}^\infty E_m$, δηλαδή αν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, τότε $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $n \geq m$.

Πράγματι· αν δε συμβαίνει αυτό, τότε υπάρχουν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ και $n > m$ ώστε $f^{(n)}(x) \neq 0$ και $f^{(k)}(x) = 0$ για $m \leq k < n$. Υπάρχει $\eta > 0$ ώστε $(x - \eta, x + \eta) \subseteq$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $f^{(n)}(t) \neq 0$ για κάθε $|t - x| < \eta$. Τότε, για κάθε $0 < |z - x| < \eta$ από το θεώρημα του Taylor υπάρχει $t_z \in (x - \eta, x + \eta)$ ώστε

$$f^{(m)}(z) = f^{(m)}(x) + (z-x) f^{(m+1)}(x) + \cdots + \frac{(z-x)^{n-m}}{(n-m)!} f^{(n)}(t_z) = \frac{(z-x)^{n-m}}{(n-m)!} f^{(n)}(t_z) \neq 0.$$

Δηλαδή, είναι $(x - \eta, x + \eta) \cap A = \{x\}$. Απ' αυτό έπεται (με ένα επιχείρημα συμπάγειας όπως πριν) ότι η $f|_{(x,x+\eta)}$ είναι πολυώνυμο και όμοια η $f|_{(x-\eta,x)}$ είναι πολυώνυμο. Άρα, η $f|_{(x-\eta,x+\eta)}$ είναι πολυώνυμο. Άτοπο, από τον ορισμό του x.

Ισχυρισμός 2. Ισχύει $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A^c \subseteq \bigcap_{j \geq m} E_j$ (άρα είναι $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \cap_{j \geq m} E_j$ και έχουμε άτοπο, το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο).

Πράγματι· έστω $t \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A^c$. Τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και πολυώνυμο p_ε ώστε $(t - \varepsilon, t + \varepsilon) \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $f|_{(t-\varepsilon,t+\varepsilon)} \equiv p_\varepsilon$. Έστω $[a, b]$ το μεγιστικό διάστημα, το οποίο περιέχει το t και $f|_{[a,b]} \equiv p_\varepsilon$. Τότε, είτε $a \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ ή $b \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ (αν για παράδειγμα $x_0 < t$, τότε $x_0 \leq a$ εφόσον $x_0 \in A$ και $a \in A$ από τη μεγιστικότητα, δηλαδή $a \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$). Ας υποθέσουμε ότι $a \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$ (όμοια η άλλη περίπτωση). Τότε, αν $r = \deg(p_\varepsilon)$ έχουμε $f^{(r)}(a) \neq 0$ και $f^{(n)}(a) = 0$ για κάθε $n \geq m$ (από τον Ισχυρισμό 1). Οπότε, $r < m$. Δηλαδή, για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $f^{(n)}(x) = 0$ για κάθε $n \geq m$. Ειδικότερα, $f^{(n)}(t) = 0$ για κάθε $n \geq m$.