Κεφάλαιο 3

Τοπολογία μετρικών χώρων

Ομάδα Α΄

3.1. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος και* F, G *υποσύνολα του* X. *Αν το* F *είναι κλειστό και το* G *είναι ανοικτό, δείξτε ότι το* $F \setminus G$ *είναι κλειστό και το* $G \setminus F$ *είναι ανοικτό.*

Υπόδειξη. Γράφουμε $F \setminus G = F \cap (X \setminus G)$. Αφού το G είναι ανοικτό, το $X \setminus G$ είναι κλειστό. Τότε, το $F \cap (X \setminus G)$ είναι κλειστό ως τομή δύο κλειστών συνόλων.

Όμοια, γράφουμε $G \setminus F = G \cap (X \setminus F)$. Αφού το F είναι κλειστό, το $X \setminus F$ είναι ανοικτό. Τότε, το $G \cap (X \setminus F)$ είναι ανοικτό ως τομή δύο ανοικτών συνόλων.

3.2. *Έστω* (X,ρ) *μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε υποσύνολο* A *του* X *γράφεται ως τομή ανοικτών υποσυνόλων του* (X,ρ).

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι κάθε $B \subseteq X$ γράφεται ως ένωση κλειστών συνόλων, γράφοντας

$$B = \bigcup_{x \in B} \{x\}.$$

[Τα μονοσύνολα είναι κλειστά σύνολα σε κάθε μετρικό χώρο]. Έστω τώρα $A \subseteq X$. Θέτοντας $B = X \setminus A$ έχουμε

$$X \setminus A = \bigcup_{i \in I} F_i$$

όπου $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε,

$$A = (X \setminus A)^c = \bigcap_{i \in I} (X \setminus F_i) = \bigcap_{i \in I} G_i,$$

όπου κάθε $G_i = X \setminus F_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X.

3.3. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το $G = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και το $F = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω $x \in G$. Τότε, $f(x) > 0$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας με $\varepsilon = f(x)/2 > 0$ βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε: αν $y \in (x-\delta, x+\delta)$ τότε $f(y) > f(x)/2 > 0$. Συνεπώς, $B(x,\delta) \subseteq G$. Έπεται ότι το G είναι ανοικτό.

Έστω (x_n) ακολουθία στο F με $x_n \to x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η f είναι συνεχής στο x. Από την αρχή της μεταφοράς, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Συνεπώς, $x \in F$. Έπεται ότι το F είναι κλειστό.

3.4. *Δείξτε ότι κάθε κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών διαστημάτων και κάθε ανοικτό διάστημα στο $\mathbb{R}$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών διαστημάτων.*

Υπόδειξη. Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε να γράψουμε

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \quad \text{και} \quad (a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{3n}, b - \frac{b-a}{3n}\right].$$

Ελέγξτε τις δύο ισότητες.

3.5. *Αποδείξτε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό.*

Υπόδειξη. Έστω $F = \{x_1, \ldots, x_m\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του μετρικού χώρου (X,ρ). Για κάθε $j = 1, \ldots, m$, το μονοσύνολο $\{x_j\}$ είναι κλειστό σύνολο. Γράφουμε

$$F = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup \{x_m\}.$$

Αφού η ένωση πεπερασμένων το πλήθος κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, συμπεραίνουμε ότι το F είναι κλειστό.

3.6. *Αποδείξτε ότι κάθε σφαίρα ενός μετρικού χώρου είναι κλειστό σύνολο. Μπορεί σε έναν μετρικό χώρο μια σφαίρα να είναι το κενό σύνολο;*

Υπόδειξη. Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x_0 \in X$. Δείχνουμε ότι η $S(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0,x) = \varepsilon\}$ είναι κλειστό σύνολο αποδεικνύοντας το εξής: αν $x_n \in S(x_0,\varepsilon)$ και $x_n \xrightarrow{\rho} x$, τότε $x \in S(x_0,\varepsilon)$. Πράγματι, $\rho(x_0,x_n) = \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$|\rho(x_0,x) - \rho(x_0,x_n)| \leq \rho(x,x_n) \to 0,$$

άρα $\rho(x_0,x) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0,x_n) = \varepsilon$. Συνεπώς, $x \in S(x_0,\varepsilon)$.

Υπάρχει περίπτωση μια σφαίρα $S(x_0,\varepsilon)$, σε κάποιον μετρικό χώρο, να είναι το κενό σύνολο. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο X με τη διακριτή μετρική δ τότε, για κάθε $x_0 \in X$, ισχύει $S(x_0,2) = \emptyset$.

3.7. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Εξετάστε, αν ισχύει πάντοτε η ισότητα*

$$\overline{B(x,\varepsilon)} = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

[*Υπενθύμιση: Για κάθε $A \subseteq X$ συμβολίζουμε με $\overline{A}$ την κλειστή θήκη του A.*]

Υπόδειξη. Ισχύει πάντοτε ο εγκλεισμός

$$\overline{B(x,\varepsilon)} \subseteq \widehat{B}(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) \leq \varepsilon\}.$$

Πράγματι, έστω $y \in \overline{B(x,\varepsilon)}$. Υπάρχει ακολουθία (y_n) σημείων της $B(x,\varepsilon)$ ώστε $y_n \to y$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $d(x,y_n) < \varepsilon$. Συνεπώς,

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x,y_n) \leq \varepsilon.$$

Δηλαδή, $y \in \widehat{B}(x,\varepsilon)$.

Δεν ισχύει πάντοτε ισότητα: αν θεωρήσουμε ένα σύνολο X που έχει τουλάχιστον δύο σημεία με τη διακριτή μετρική δ, τότε, για κάθε $x \in X$, έχουμε $B(x,1) = \{x\}$ άρα $\overline{B(x,1)} = \{x\}$, ενώ $\widehat{B}(x,1) = X$ (και $X \neq \{x\}$ από την υπόθεση για το πλήθος των στοιχείων του X).

3.8. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Η διαγώνιος του $X \times X$ είναι το σύνολο $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$. Αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό στον $X \times X$ ως προς τη μετρική d_2, όπου*

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d^2(x_1,y_1) + d^2(x_2,y_2)}.$$

Γενικότερα, αποδείξτε ότι το Δ είναι κλειστό ως προς κάθε μετρική γινόμενο στον $X \times X$.

Υπόδειξη. Έστω ρ μια μετρική γινόμενο στο $X \times X$. Θεωρούμε ακολουθία $(x_n,x_n) \in \Delta$ ώστε $(x_n,x_n) \xrightarrow{\rho} (x,y) \in X \times X$ και αποδεικνύουμε ότι $x = y$, δηλαδή $(x,y) \in \Delta$. Αυτό αποδεικνύει ότι το Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $(X \times X, \rho)$.

Αφού $(x_n,x_n) \xrightarrow{\rho} (x,y)$ και η ρ είναι μετρική γινόμενο, έχουμε $x_n \xrightarrow{d} x$ και $x_n \xrightarrow{d} y$. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας στον (X,d) βλέπουμε ότι, πράγματι, $x = y$.

Στις ασκήσεις του Κεφαλαίου 2 είδαμε ότι η μετρική

$$d_2((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d^2(x_1,y_1) + d^2(x_2,y_2)}$$

είναι μετρική γινόμενο στο $X \times X$. Συνεπώς, το Δ είναι κλειστό υποσύνολο του $(X \times X, d_2)$.

3.9. *Υπάρχει άπειρο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από ρητούς; Υπάρχει ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από άρρητους;*

Υπόδειξη. Ένα άπειρο κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο αποτελείται μόνο από ρητούς είναι το $\mathbb{N}$. Δεν υπάρχει μη κενό ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ το οποίο να αποτελείται μόνο από άρρητους: θα περιείχε κάποιο ανοικτό διάστημα και σε κάθε διάστημα υπάρχει ρητός.

3.10. *Έστω A, B δύο υποσύνολα ενός μετρικού χώρου (X, d). Αποδείξτε ότι:*
(α) *Αν $A \cup B = X$, τότε $\overline{A} \cup B^\circ = X$.*
(β) *Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.*

Υπόδειξη. (α) Δείχνουμε ότι: αν $x \in X$ και $x \notin \overline{A}$ τότε $x \in B^\circ$: αφού $x \notin \overline{A}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, δηλαδή $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus A$. Όμως, από την υπόθεση ότι $A \cup B = X$ έχουμε $X \setminus A \subseteq B$. Άρα, $B(x, \varepsilon) \subseteq B$ και αυτό δείχνει ότι $x \in B^\circ$.

Δείξαμε ότι $X \setminus \overline{A} \subseteq B^\circ$. Άρα, $\overline{A} \cup B^\circ = X$.

(β) Έστω $x \in \overline{A} \cap B^\circ$. Αφού $x \in B^\circ$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq B$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει $y \in A$ το οποίο ανήκει στην $B(x, \varepsilon) \subseteq B$. Τότε, $y \in A \cap B$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $A \cap B = \emptyset$ από την υπόθεση.

Από το άτοπο συμπεραίνουμε ότι $\overline{A} \cap B^\circ = \emptyset$.

3.11. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*
(α) *$(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus B^\circ$ για κάθε $A, B \subseteq X$.*
(β) *$\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$ για κάθε $A, B \subseteq X$.*
Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους εγκλεισμούς με ισότητες;

Υπόδειξη. (α) Έστω $A, B \subseteq X$. Έστω $x \in (A \setminus B)^\circ$. Αφού $A \setminus B \subseteq A$, έχουμε $(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ$. Συνεπώς, $x \in A^\circ$.

Επίσης, $x \in (A \setminus B)^\circ \subseteq A \setminus B$, άρα $x \notin B$. Όμως, $B^\circ \subseteq B$, άρα $x \notin B^\circ$.

Είδαμε ότι $x \in A^\circ$ και $x \notin B^\circ$. Άρα, $x \in A^\circ \setminus B^\circ$. Έπεται ότι $(A \setminus B)^\circ \subseteq A^\circ \setminus B^\circ$.

(β) Έστω $A, B \subseteq X$. Έστω $x \in \overline{A} \setminus \overline{B}$. Αφού $x \in \overline{A}$, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A ώστε $x_n \to x$. Αφού $x \notin \overline{B}$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \cap B = \emptyset$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in B(x, \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $x_n \in A \setminus B$ για κάθε $n \geq n_0$. Όμως, η ακολουθία $(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots)$ συγκλίνει στο x ως υπακολουθία της (x_n). Άρα, $x \in \overline{A \setminus B}$. Έπεται ότι $\overline{A} \setminus \overline{B} \subseteq \overline{A \setminus B}$.

Δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους παραπάνω εγκλεισμούς με ισότητες. Στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, αν πάρουμε $A = \mathbb{R}$ και $B = \mathbb{Q}$, έχουμε

$$(A \setminus B)^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset\ , \ \text{ενώ}\ A^\circ \setminus B^\circ = \mathbb{R}^\circ \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}.$$

Επίσης,

$$\overline{A} \setminus \overline{B} = \overline{\mathbb{R}} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset\ , \ \text{ενώ}\ \overline{A \setminus B} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

3.12. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq X$. Δείξτε ότι* $\mathrm{diam}(\overline{A}) = \mathrm{diam}(A)$. *Ισχύει το ίδιο για το εσωτερικό του A;*

Υπόδειξη. Από την $A \subseteq \overline{A}$ και τον ορισμό της διαμέτρου έπεται άμεσα ότι $\mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\overline{A})$. Για την αντίστροφη ανισότητα, υποθέτουμε ότι $\mathrm{diam}(A) < +\infty$ αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in \overline{A}$. Υπάρχουν $z, w \in A$ ώστε $\rho(z, x) < \varepsilon$ και $\rho(y, w) < \varepsilon$. Τότε, $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, w) + \rho(w, y) < \varepsilon + \mathrm{diam}(A) + \varepsilon$. Συνεπώς,

$$\mathrm{diam}(\overline{A}) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in \overline{A}\} \leq \mathrm{diam}(A) + 2\varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\mathrm{diam}(\overline{A}) \leq \mathrm{diam}(A)$.

Δεν είναι γενικά σωστό ότι $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(A^\circ)$. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε το σύνολο $A = (0, 1) \cup \{2\}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε $\mathrm{diam}(A) = 2$ και $A^\circ = (0, 1)$, άρα $\mathrm{diam}(A^\circ) = 1$. Φυσικά, ισχύει πάντα η ανισότητα $\mathrm{diam}(A) \geq \mathrm{diam}(A^\circ)$ διότι $A^\circ \subseteq A$.

3.13. (α) *Έστω A ανοικτό υποσύνολο του (X, ρ) και $G \subseteq A$. Δείξτε ότι το G είναι ανοικτό στο A αν και μόνο αν είναι ανοικτό στον X.*

(β) *Έστω A κλειστό υποσύνολο του (X, ρ) και $G \subseteq A$. Είναι σωστό ότι το G είναι κλειστό στο A αν και μόνο αν είναι κλειστό στον X;*

Υπόδειξη. (α) Αν το G είναι ανοικτό στο A τότε υπάρχει ανοικτό $U \subseteq X$ ώστε $G = A \cap U$. Όμως, τα A, U είναι ανοικτά υποσύνολα του X, άρα το $G = A \cap U$ είναι ανοικτό στον X. Αντίστροφα, αν το G είναι ανοικτό στον X, γράφοντας $G = A \cap G$ βλέπουμε ότι το G είναι ανοικτό στο A.

(β) Αν το G είναι κλειστό στο A τότε υπάρχει κλειστό $V \subseteq X$ ώστε $G = A \cap V$. Όμως, τα A, V είναι κλειστά υποσύνολα του X, άρα το $G = A \cap U$ είναι κλειστό στον X. Αντίστροφα, αν το G είναι κλειστό στον X, γράφοντας $G = A \cap G$ βλέπουμε ότι το G είναι κλειστό στο A.

3.14. *Βρείτε ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ως προς τη συνήθη μετρική.*

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $D = \{q + \sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\}$. Το D είναι αριθμήσιμο διότι το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο. Έχουμε $D \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ διότι $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Τέλος, το D είναι πυκνό στο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: αν $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών ώστε $q_n \to x - \sqrt{2}$, οπότε $q_n + \sqrt{2} \in D$ και $q_n + \sqrt{2} \to x$.

Ομάδα Β′

3.15. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι $\widehat{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$ για κάθε $x \in X$ και κάθε $r > 0$.*

Υπόδειξη. Έστω $x \in X$ και $r > 0$. Στην Άσκηση 3.7 είδαμε ότι $\widehat{B}(x, r) \supseteq \overline{B(x, r)}$. Επίσης, $B(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}$. Αφού $\widehat{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$, για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να δείξουμε ότι

$$S(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}.$$

Έστω $y \in S(x, r)$. Τότε, $\|y - x\| = r$. Θεωρούμε μια ακολουθία (t_n) στο $(0, 1)$ με $t_n \to 1$. Ορίζουμε $y_n = x + t_n(y - x)$. Τότε:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\|y_n - x\| = \|t_n(y - x)\| = t_n\|y - x\| = t_n r < r,$$

δηλαδή, $y_n \in B(x, r)$.

(ii) Ισχύει

$$\|y - y_n\| = \|y - x - t_n(y - x)\| = \|(1 - t_n)(y - x)\| = (1 - t_n)\|y - x\| = (1 - t_n)r \to 0,$$

δηλαδή, $y_n \to y$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι $y \in \overline{B(x, r)}$. Συνεπώς, $S(x, r) \subseteq \overline{B(x, r)}$.

3.16. *Δείξτε ότι ο c_0 είναι κλειστό υποσύνολο του ℓ^∞. Τι μπορείτε να πείτε για τον c_{00}; Είναι ανοικτό υποσύνολο του ℓ_∞; κλειστό υποσύνολο του ℓ_∞;*

Υπόδειξη. Έστω (x_k) ακολουθία στον c_0 με $x_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x \in \ell_\infty$. Θα δείξουμε ότι $x \in c_0$.

Κάθε x_k είναι μια μηδενική ακολουθία: $x_k = (x_k(1), \ldots, x_k(n), \ldots)$ και $\lim\limits_{n\to\infty} x_k(n) = 0$. Επίσης, $x = (x(1), \ldots, x(n), \ldots)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση έχουμε $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\|_\infty = 0$, άρα υπάρχει k_0 με την ιδιότητα

$$\|x_{k_0} - x\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Για την ακρίβεια, το παραπάνω ισχύει για όλους τελικά τους δείκτες k, μία όμως τιμή k_0 μας είναι αρκετή. Αφού

$$\|x_{k_0} - x\|_\infty = \sup\{|x_{k_0}(n) - x(n)| : n \in \mathbb{N}\},$$

έχουμε

$$(*) \qquad |x_{k_0}(n) - x(n)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_0}(n) = 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$(**) \qquad |x_{k_0}(n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τις $(*)$, $(*)$ και την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή, βλέπουμε ότι

$$|x(n)| \leq |x(n) - x_{k_0}(n)| + |x_{k_0}(n)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = 0$. Δηλαδή, $x \in c_0$.

Ο c_{00} δεν είναι κλειστό υποσύνολο του c_0. Αν θέσουμε

$$x_k = \big(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{k}, 0, 0, \dots\big)$$

τότε $x_k \in c_{00}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$x = \big(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\big).$$

Τότε, $x \in c_0 \subseteq \ell_\infty$, διότι $x(n) = \frac{1}{n} \to 0$, και $x - x_k = \big(0, \dots, 0, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \dots)$, δηλαδή

$$\|x - x_k\|_\infty = \frac{1}{k+1} \to 0.$$

Όμως, $x \notin c_{00}$, διότι $x(n) = \frac{1}{n} \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ο c_{00} δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του c_0. Έστω $x = (x(1), \dots, x(m), 0, 0, \dots) \in c_{00}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ορίζουμε

$$y = \big(x(1), \dots, x(m), \frac{\varepsilon}{m+1}, \frac{\varepsilon}{m+2}, \dots\big).$$

Ελέγξτε ότι $\|x - y\|_\infty = \frac{\varepsilon}{m+1} < \varepsilon$, δηλαδή $y \in B(x, \varepsilon)$. Όμως, $y \notin c_{00}$. Άρα, το x δεν είναι εσωτερικό σημείο του c_{00}: αυτό που δείξαμε στην πραγματικότητα είναι ότι ο c_{00} έχει κενό εσωτερικό μέσα στον c_0 (άρα και στον ℓ_∞).

3.17. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(α) *Το G είναι ανοικτό.*
(β) *Για κάθε $A \subseteq X$, $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.*
(γ) *Για κάθε $A \subseteq X$, $\overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}$.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω $A \subseteq X$ και έστω $x \in G \cap \overline{A}$. Τότε, $x \in G$ και $x \in \overline{A}$. Συνεπώς, υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A με $a_n \to x$. Αφού το G είναι ανοικτό και $a_n \to x \in G$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \in G$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, η ακολουθία $(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots)$ περιέχεται στο $G \cap A$ και συγκλίνει στο x ως υπακολουθία της (x_n). Έπεται ότι $x \in \overline{G \cap A}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$.

(β) $\Rightarrow$ (γ): Έστω $A \subseteq X$. Από την $G \cap A \subseteq G \cap \overline{A}$ βλέπουμε ότι $\overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \overline{A}}$.

Για τον άλλο εγκλεισμό παρατηρούμε ότι, από την υπόθεση, $G \cap \overline{A} \subseteq \overline{G \cap A}$ και το $\overline{G \cap A}$ είναι κλειστό. Έπεται ότι $\overline{G \cap \overline{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$ (γενικά, αν το F είναι κλειστό και $B \subseteq F$, τότε $\overline{B} \subseteq \overline{F} = F$).

(γ) $\Rightarrow$ (α) Εφαρμόζουμε το (γ) με $A = X \setminus G$: έχουμε

$$\overline{G \cap \overline{X \setminus G}} = \overline{G \cap (X \setminus G)} = \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

Άρα,

$$G \cap (X \setminus G^\circ) = G \cap \overline{X \setminus G} = \emptyset.$$

Έπεται ότι
$$G \subseteq X \setminus (X \setminus G^\circ) = G^\circ.$$
Αφού $G \subseteq G^\circ$, το G είναι ανοικτό (διότι, ισχύει πάντοτε η $G^\circ \subseteq G$, άρα $G = G^\circ$).

3.18. *Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος ανοικτών διαστημάτων με ρητά άκρα.*

Υπόδειξη. Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι το G γράφεται ως ένωση αριθμήσιμων το πλήθος, ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων:
$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \ \text{ή}\ G = \bigcup_{n=1}^{N} (a_n, b_n),$$
όπου ενδέχεται κάποιο από τα a_n να είναι το $-\infty$ και κάποιο από τα b_n να είναι το $+\infty$. Για κάθε n μπορούμε να βρούμε γνησίως φθίνουσα ακολουθία $(a_{n,k})$ ρητών και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(b_{n,k})$ ρητών στο (a_n, b_n) με $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n,k} = a_n$ και $\lim\limits_{k\to\infty} b_{n,k} = b_n$ (από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$). Τότε,
$$(a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_{n,k}, b_{n,k})$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς,
$$G = \bigcup_{n,k} (a_{n,k}, b_{n,k}),$$
κάθε διάστημα $(a_{n,k}, b_{n,k})$ έχει ρητά άκρα και τα διαστήματα αυτά είναι αριθμήσιμα το πλήθος.

3.19. *Αποδείξτε ότι στο $\mathbb{R}$ δεν υπάρχουν μη τετριμμένα υποσύνολα (δηλάδή διαφορετικά από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) τα οποία να είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά.*

Υπόδειξη. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ (διαφορετικό από το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$) το οποίο είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό. Αφού $A \neq \mathbb{R}$, υπάρχει $x \notin A$.

Το A είναι μη κενό, συνεπώς υπάρχει $y \in A$. Προφανώς $y \neq x$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $y > x$. Ορίζουμε
$$B = \{t \in A : t > x\}.$$
Το B είναι μη κενό (διότι $y \in B$) και κάτω φραγμένο από το x. Άρα, υπάρχει το $s = \inf B$ και $s \geq x$.

Αφού $s = \inf B$, υπάρχει ακολουθία στοιχείων του B που συγκλίνει στο s. Άρα, $s \in \overline{B} \subseteq \overline{A} = A$ διότι το A είναι κλειστό.

Αφού $s \in A$, $x \notin A$ και $s \geq x$, έχουμε $s > x$. Τώρα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το A είναι και ανοικτό. Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(s-\delta, s+\delta) \subseteq A$. Όμως τότε, στο $(s-\delta, s)$ μπορούμε να βρούμε στοιχείο του A το οποίο είναι μεγαλύτερο από το x (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο του B το οποίο είναι μικρότερο από το $\inf B$, άτοπο.

3.20. (α) *Για κάθε* $n \in \mathbb{Z}$, *έστω* F_n *κλειστό υποσύνολο του* $(n, n+1)$. *Θέτουμε* $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. *Αποδείξτε ότι το* F *είναι κλειστό στο* $\mathbb{R}$.

(β) *Βρείτε μια ακολουθία ξένων ανά δυο κλειστών συνόλων στο* $\mathbb{R}$ *των οποίων η ένωση δεν είναι κλειστό σύνολο.*

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $a_n = \inf F_n$ και $b_n = \sup F_n$. Τότε $a_n, b_n \in \overline{F_n}$ και αφού το F_n είναι κλειστό, έχουμε $a_n, b_n \in F_n$. Αφού το F_n είναι υποσύνολο του $(n, n+1)$, συμπεραίνουμε ότι $n < a_n \leq b_n < n+1$ και $F_n \subseteq [a_n, b_n]$.

Δείχνουμε ότι το $F = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} F_n$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$ ως εξής: έστω $x \in \overline{F}$. Υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x \in [n, n+1)$. Επίσης, υπάρχει ακολουθία (x_k) στο F ώστε $x_k \to x$. Θέτουμε

$$\varepsilon = \min\{n - b_{n-1}, a_{n+1} - (n+1)\} > 0.$$

Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq k_0$,

$$b_{n-1} = n - (n - b_{n-1}) \leq x - \varepsilon < x_k < x + \varepsilon \leq (n+1) + a_{n+1} - (n+1) = a_{n+1}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $x_k \in F_n$ για κάθε $k \geq k_0$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι $x \in \overline{F_n} = F_n \subseteq F$.

Δείξαμε ότι $\overline{F} \subseteq F$. Άρα, το F είναι κλειστό.

(β) Θέτουμε $F_n = \{1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Τα F_n είναι κλειστά, ξένα ανά δύο, και

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το F δεν είναι κλειστό σύνολο: αφού $\frac{1}{n} \to 0$, έχουμε $0 \in \overline{F}$. Όμως, $0 \notin F$.

3.21. *Έστω* (X, d) *μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν το* X *έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, τότε υπάρχει ανοικτό* $G \subseteq X$, *ώστε* $G \neq \emptyset$ *και* $X \setminus G \neq \emptyset$.

(β) *Αν το* X *είναι άπειρο σύνολο, τότε υπάρχει ανοικτό* $G \subseteq X$ *ώστε το* G *και το* $X \setminus G$ *να είναι άπειρα.*

Υπόδειξη. (α) Αφού το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, μπορούμε να βρούμε $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε, $d(x,y) > 0$ άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $y \notin B(x, \varepsilon)$. Θέτουμε $G = B(x, \varepsilon)$. Το G είναι ανοικτό και μη κενό διότι $x \in G$. Επίσης, $X \setminus G \neq \emptyset$ διότι $y \notin G$.

(β) Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Υπάρχουν $x, y \in X$, $x \neq y$ τα οποία είναι σημεία συσσώρευσης του X. Βρίσκουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) = \emptyset$. Στην $B(x,\varepsilon)$ και στην $B(y,\varepsilon)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του X (χαρακτηρισμός του σημείου συσσώρευσης). Θέτουμε $G = B(x,\varepsilon)$. Το G είναι ανοικτό και έχει άπειρα στοιχεία. Το $X \setminus G$ είναι κι αυτό άπειρο σύνολο, διότι περιέχει την $B(y,\varepsilon)$ που έχει άπειρα στοιχεία.

2. Ο X έχει το πολύ ένα σημείο συσσώρευσης. Αφού το X είναι άπειρο σύνολο και όλα τα σημεία του (εκτός από ένα το πολύ) είναι μεμονωμένα σημεία του X, μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) στο X, με όρους διαφορετικούς ανά δύο, ώστε κάθε x_n να είναι μεμονωμένο σημείο του X.

[Θυμηθείτε ότι ο x είναι μεμονωμένο σημείο του X αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X. Δηλαδή, αν υπάρχει $\varepsilon_x > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon_x) \cap (X \setminus \{x\}) = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $B(x,\varepsilon_x) = \{x\}$, δηλαδή το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ανοικτό σύνολο.]

Θέτουμε $G = \{x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots\}$. Τότε, το

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_{2n}\}$$

είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών συνόλων και έχει άπειρα στοιχεία. Το $X \setminus G$ είναι επίσης άπειρο, αφού περιέχει το σύνολο $\{x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}, \ldots\}$.

3.22. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Υπόδειξη. Αφού $x \neq y$, έχουμε $\rho(x,y) = \delta > 0$. Θέτουμε $U = B(x,\delta/3)$ και $V = B(y,\delta/3)$. Τα U, V είναι ανοικτά και, προφανώς, $x \in U$, $y \in V$. Παρατηρούμε ότι: αν $z \in \overline{U} = \overline{B(x,\delta/3)}$ τότε $z \in \widehat{B}(x,\delta/3)$, δηλαδή $\rho(x,z) \leq \delta/3$. Ομοίως, αν $z \in \overline{V}$ έχουμε $\rho(z,y) \leq \delta/3$. Αν λοιπόν $z \in \overline{U} \cap \overline{V}$, τότε

$$\delta = \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}.$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

3.23. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $x \in X$ και F κλειστό υποσύνολο του X με $x \notin F$. Δείξτε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα U, V ώστε $x \in U$, $F \subseteq V$ και $U \cap V = \emptyset$. Μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει, επιπλέον, ότι $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$;*

Υπόδειξη. Αφού το F είναι κλειστό υποσύνολο του X και $x \notin F = \overline{F}$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$B(x,\delta) \cap F = \emptyset.$$

Θέτουμε

$$U = B(x,\delta/3) \text{ και } V = X \setminus \widehat{B}(x,2\delta/3) = \{y \in X : \rho(x,y) > 2\delta/3\}.$$

Προφανώς $x \in U$ και εύκολα ελέγχουμε ότι $F \subseteq V$. Παρατηρούμε ότι:

(i) Αν $z \in \overline{U}$ τότε $\rho(z,x) \leq \delta/3$.

(ii) Αν $z \in \overline{V}$ τότε $\rho(z,x) \geq 2\delta/3$.

Έπεται ότι $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

3.24. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Θέτουμε A' το παράγωγο σύνολο του A, δηλαδή το σύνολο των σημείων συσσσώρευσης του A. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) $\overline{A} = A \cup A'$. *Συμπεράνατε ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του.*

(β) *Το A' είναι κλειστό σύνολο.*

(γ) *Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $A' \subseteq B'$.*

(δ) $A' = (\overline{A})'$. *Δηλαδή, τα A και $\overline{A}$ έχουν τα ίδια σημεία συσσώρευσης.*

(ε) $(A')' \subseteq A'$. *Βρείτε υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ ώστε ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος.*

Υπόδειξη. (α) Γνωρίζουμε ότι $A \subseteq \overline{A}$. Επίσης, αν $x \in A'$ τότε κάθε ανοικτή μπάλα $B(x,\varepsilon)$ περιέχει σημεία του A (και μάλιστα διαφορετικά από το x), άρα $x \in \overline{A}$. Αυτό δείχνει ότι $A' \subseteq \overline{A}$ και έπεται ότι $A \cup A' \subseteq \overline{A}$. Αντίστροφα, αν $x \in \overline{A}$ και $x \notin A$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $x \notin A$, άρα $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ (υπάρχει σημείο του A στην $B(x,\varepsilon)$ και αυτό το σημείο δεν μπορεί να είναι το x). Συνεπώς, $x \in A'$. Δείξαμε ότι $\overline{A} \setminus A \subseteq A'$, άρα $\overline{A} \subseteq A \cup A'$.

Δείχνουμε τώρα ότι το A είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει τα σημεία συσσώρευσής του: αν το A είναι κλειστό, τότε $A = \overline{A} = A \cup A'$, άρα $A' \subseteq A$. Αντίστροφα, αν $A' \subseteq A$ τότε $\overline{A} = A \cup A' \subseteq A \cup A = A$. Αφού $\overline{A} \subseteq A$, το A είναι κλειστό.

(β) Πρέπει να δείξουμε ότι $\overline{A'} \subseteq A'$. Έστω $x \in \overline{A'}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in B(x,\varepsilon) \cap A'$. Αφού η $B(x,\varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Αφού $y \in A'$, η $B(y,\delta)$ περιέχει άπειρα σημεία του A. Συνεπώς, υπάρχει $a \in A$, $a \neq x$ ώστε $a \in B(y,\delta)$. Αφού $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$, έχουμε $a \in B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\})$. Δείξαμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Άρα, $x \in A'$.

Συνεπώς, $\overline{A'} \subseteq A'$ και το A' είναι κλειστό.

(γ) Έστω $x \in A'$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in A$, $y \neq x$ ώστε $y \in B(x,\varepsilon)$. Αφού $A \subseteq B$ έχουμε $y \in B$. Συνεπώς, $y \in B(x,\varepsilon) \cap (B \setminus \{x\})$. Άρα, $y \in B'$.

(δ) Από το (γ) βλέπουμε ότι $A' \subseteq (\overline{A})'$ (διότι $A \subseteq \overline{A}$).

Αντίστροφα, έστω $x \in (\overline{A})'$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $y \in \overline{A}$ ώστε $y \neq x$ και $y \in B(x,\varepsilon)$. Επίσης, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$ και $x \notin B(y,\delta)$ (αυτό γίνεται αν επιλέξουμε $\delta > 0$ που ικανοποιεί ταυτόχρονα τις $\delta < \rho(x,y)$ και $\delta < \varepsilon - \rho(x,y)$). Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $z \in A$ με $z \in B(y,\delta)$. Τότε, $z \in A$, $z \neq x$ και $z \in B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$. Συνεπώς, $B(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $x \in A'$.

(ε) Από το (α) έχουμε $(A')' \subseteq \overline{A'}$. Όμως, είδαμε στο (β) ότι το A' είναι κλειστό. Δηλαδή, $\overline{A'} = A'$. Έπεται ότι $(A')' \subseteq A'$.

Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Για παράδειγμα, θεωρήστε το σύνολο $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, $A' = \{0\}$ και $(A')' = \emptyset$.

3.25. *Εξετάστε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς:*
(α) *Υπάρχει* $A \subseteq \mathbb{R}$ *ώστε* $A' = \mathbb{N}$.
(β) *Υπάρχει* $A \subseteq \mathbb{R}$ *ώστε* $A' = \mathbb{Z}$.
(γ) *Υπάρχει* $A \subseteq \mathbb{R}$ *ώστε* $A' = \mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. (α) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{N}$. Παράδειγμα, το σύνολο

$$A = \left\{n + \frac{1}{m} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

(β) Υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Z}$. Παράδειγμα, το σύνολο

$$A = \left\{n + \frac{1}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

(γ) Δεν υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A' = \mathbb{Q}$. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης οποιουδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι κλειστό σύνολο. Όμως, το $\mathbb{Q}$ δεν είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

3.26. *Έστω* (X, ρ) *μετρικός χώρος. Αν* $A, B \subseteq X$, *η απόσταση του* A *από το* B *ορίζεται ως εξής:*

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Αποδείξτε τις ακόλουθες ιδιότητες της απόστασης:
(α) *αν* $A \cap B \neq \emptyset$, *τότε* $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.
(β) $\mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}) = \mathrm{dist}(A, B)$.
(γ) $\mathrm{dist}(A, B \cup C) = \min\{\mathrm{dist}(A, B), \mathrm{dist}(A, C)\}$.
(δ) *Δώστε παράδειγμα κλειστών και ξένων υποσυνόλων* A, B *ενός μετρικού χώρου* (X, ρ) *τα οποία έχουν μηδενική απόσταση.*

Υπόδειξη. (α) Έστω $x \in A \cap B$. Τότε, $\mathrm{dist}(A, B) \leq \rho(x, x) = 0$. Άρα, $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.
(β) Αφού $A \subseteq \overline{A}$ και $B \subseteq \overline{B}$ έχουμε

$$\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} \subseteq \{\rho(a, b) : a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\}.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) : a \in A, b \in B\} \geq \inf\{\rho(a, b) : a \in \overline{A}, b \in \overline{B}\} = \mathrm{dist}(\overline{A}, \overline{B}).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και τυχόντα $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$. Υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ ώστε $\rho(a, x) < \varepsilon$ και $\rho(y, b) < \varepsilon$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(A, B) \leq \rho(a, b) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) + \rho(y, b) < \rho(x, y) + 2\varepsilon.$$

Δηλαδή,

$$\mathrm{dist}(A,B) - 2\varepsilon < \rho(x,y)$$

για κάθε $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$. Έπεται ότι

$$\mathrm{dist}(A,B) - 2\varepsilon \leq \mathrm{dist}(\overline{A},\overline{B}).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\mathrm{dist}(A,B) \leq \mathrm{dist}(\overline{A},\overline{B})$.

(γ) Από τις $B \subseteq B \cup C$ και $C \subseteq B \cup C$ έπεται άμεσα ότι $\mathrm{dist}(A, B\cup C) \leq \mathrm{dist}(A,B)$ και $\mathrm{dist}(A, B \cup C) \leq \mathrm{dist}(A,C)$. Συνεπώς,

$$\mathrm{dist}(A, B\cup C) \leq \min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\}.$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $x \in A$ και $y \in B \cup C$ ώστε $\rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $y \in B$ τότε $\mathrm{dist}(A,B) \leq \rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$.

(ii) Αν $y \in C$ τότε $\mathrm{dist}(A,C) \leq \rho(x,y) < \mathrm{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$.

Έπεται ότι

$$\min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\} < \mathrm{dist}(A, B\cup C) + \varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.

(δ) Ένα παράδειγμα στο Ευκλείδειο επίπεδο δίνουν τα σύνολα $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ και $B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$ (εξηγήστε γιατί είναι κλειστά). Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$\mathrm{dist}(A,B) \leq \left\| \left(x, \frac{1}{x}\right) - (x,0) \right\|_2 = \frac{1}{x},$$

άρα $\mathrm{dist}(A,B) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. Συνεπώς, $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

Ένα παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ δίνουν τα σύνολα $A = \mathbb{N} = \{n : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \left\{n + \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mathrm{dist}(A,B) \leq \left| n - \left(n + \frac{1}{2n}\right) \right| = \frac{1}{2n},$$

άρα $\mathrm{dist}(A,B) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$. Συνεπώς, $\mathrm{dist}(A,B) = 0$.

3.27. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αν $x \in X$ ορίζουμε την απόσταση του x από το A να είναι η απόσταση των συνόλων $\{x\}$ και A:*

$$\mathrm{dist}(x,A) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) $\mathrm{dist}(x, A) = 0$ *αν και μόνο αν* $x \in \overline{A}$.
(β) $|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leq \rho(x, y)$ *για κάθε* $x, y \in X$.
(γ) *Το σύνολο* $\{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$ *είναι ανοικτό, ενώ το σύνολο* $\{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ *είναι κλειστό.*
(δ) *Αν* $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, *τότε* $\mathrm{dist}(x, A) = \mathrm{dist}(x, B)$ *για κάθε* $x \in X$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{dist}(x, A) = 0$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(x, a) < \varepsilon$ δηλαδή αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ δηλαδή αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.

(β) Έστω $x, y \in X$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $\mathrm{dist}(x, A) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a)$, δηλαδή $\mathrm{dist}(x, A) - \rho(x, y) \leq \rho(y, a)$ για κάθε $a \in A$. Έπεται ότι $\mathrm{dist}(x, A) - \rho(x, y) \leq \mathrm{dist}(y, A)$, άρα

$$\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A) \leq \rho(x, y).$$

Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι $\mathrm{dist}(y, A) - \mathrm{dist}(x, A) \leq \rho(x, y)$, άρα

$$|\mathrm{dist}(x, A) - \mathrm{dist}(y, A)| \leq \rho(x, y).$$

(γ) Έστω $U = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) < \varepsilon\}$. Θεωρούμε τυχόν $x \in U$ και επιλέγουμε $0 < \delta < \varepsilon - \mathrm{dist}(x, A)$. Για κάθε $y \in B(x, \delta)$ ισχύει $\mathrm{dist}(y, A) \leq \mathrm{dist}(x, A) + \rho(y, x) < \varepsilon$. Άρα, $B(y, \delta) \subseteq U$. Αυτό αποδεικνύει ότι το U είναι ανοικτό.

Έστω $F = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$. Θεωρούμε $x_n \in F$ με $x_n \to x$. Τότε, $\mathrm{dist}(x, A) \leq \mathrm{dist}(x_n, A) + \rho(x_n, x) \leq \varepsilon + \rho(x_n, x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon + \rho(x_n, x) \to \varepsilon$ διότι $\rho(x_n, x) \to 0$. Έπεται ότι $\mathrm{dist}(x, A) \leq \varepsilon$ δηλαδή $x \in F$. Αυτό αποδεικνύει ότι το F είναι κλειστό.

(δ) Από την $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ έπεται ότι $\mathrm{dist}(x, \overline{A}) \leq \mathrm{dist}(x, B) \leq \mathrm{dist}(x, A)$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{dist}(x, A) \leq \mathrm{dist}(x, \overline{A})$ Έστω $\varepsilon > 0$ και $y \in \overline{A}$ ώστε $\rho(x, y) < \mathrm{dist}(x, \overline{A}) + \varepsilon$. Αφού $y \in \overline{A}$, υπάρχει $a \in A$ ώστε $\rho(y, a) < \varepsilon$. Τότε, $\mathrm{dist}(x, A) \leq \rho(x, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) < \mathrm{dist}(x, \overline{A}) + 2\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{dist}(x, A) \leq \mathrm{dist}(x, \overline{A})$.

3.28. *Έστω* (X, ρ) *μετρικός χώρος και* $A \subseteq X$. *Αποδείξτε ότι*

$$A' = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, A \setminus \{x\}) = 0\}.$$

Υπόδειξη. Έχουμε $x \in A'$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $a \in A \setminus \{x\}$ ώστε $\rho(x, a) < \varepsilon$ δηλαδή αν και μόνο αν $\mathrm{dist}(x, A \setminus \{x\}) = \inf\{\rho(x, a) : a \in A \setminus \{x\}\} = 0$.

3.29. *Έστω* (X, ρ) *μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του* X *γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων και κάθε ανοικτό υποσύνολο του* X *γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων.*

Υπόδειξη. Έστω F κλειστό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ όπου $G_n = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, F) < 1/n\}$. Πράγματι, κάθε G_n περιέχει το F (διότι, αν $x \in F$

τότε $d(x,F)=0<1/n$), άρα
$$F \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$
Αντίστροφα, αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ τότε $\mathrm{dist}(x,F) < \frac{1}{n}$ για όλα τα n, άρα $\mathrm{dist}(x,F)=0$. Έπεται ότι $x \in \overline{F} = F$ διότι το F είναι κλειστό. Τέλος, κάθε G_n είναι ανοικτό σύνολο.

Έστω τώρα G ανοικτό υποσύνολο του X. Το $X \setminus G$ είναι κλειστό, άρα $X \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, όπου κάθε G_n είναι ανοικτό. Τότε, $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus G_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, όπου κάθε $F_n = X \setminus G_n$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.

3.30. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Αποδείξτε τις εξής ιδιότητες του συνόρου του A:*

(α) $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.

(β) $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

(γ) $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$.

(δ) $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$ *ή ισοδύναμα* $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. *Επομένως, το σύνορο είναι κλειστό σύνολο.*

(ε) *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν* $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε $x \in \mathrm{bd}(A)$ αν και μόνο αν κάθε μπάλα $B(x,\varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A και με το A^c. Από την άλλη πλευρά, $x \in \mathrm{bd}(A^c)$ αν και μόνο αν κάθε μπάλα $B(x,\varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A^c και με το $(A^c)^c = A$. Είναι λοιπόν φανερό ότι $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$.

(β) Αν $x \in \mathrm{bd}(A)$ τότε κάθε μπάλα $B(x,\varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A, άρα $x \in \overline{A}$. Δηλαδή, $\mathrm{bd}(A) \subseteq \overline{A}$. Επίσης, $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$. Συνεπώς, $\overline{A} \supseteq \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A}$ και ας υποθέσουμε ότι $x \notin A^\circ$. Τότε, κάθε μπάλα $B(x,\varepsilon)$ έχει μη κενή τομή με το A και δεν περιέχεται στο A άρα έχει μη κενή τομή με το A^c. Έπεται ότι $x \in \mathrm{bd}(A)$. Δείξαμε ότι $\overline{A} \setminus A^\circ \subseteq \mathrm{bd}(A)$, άρα $\overline{A} \subseteq \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$.

(γ) Γνωρίζουμε ότι $X = \overline{A} \cup (X \setminus A)^\circ$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο ερώτημα συμπεραίνουμε ότι $X = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) \cup (X \setminus A)^\circ$.

(δ) Παρατηρούμε ότι $\mathrm{bd}(A) \cap A^\circ = \emptyset$ (αν $x \in A^\circ$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x,\varepsilon) \subseteq A$ δηλαδή $B(x,\varepsilon) \cap A^c = \emptyset$, άρα $x \notin \mathrm{bd}(A)$). Είδαμε ότι $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ$, άρα $\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$.

Χρησιμοποιώντας την $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$ συμπεραίνουμε ότι
$$\mathrm{bd}(A) = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}.$$
Έπεται ότι το $\mathrm{bd}(A)$ είναι κλειστό σύνολο (γράφεται ως τομή δύο κλειστών συνόλων).

(ε) Αν το A είναι κλειστό τότε $\mathrm{bd}(A) \subseteq A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) = \overline{A} = A$. Αν $\mathrm{bd}(A) \subseteq A$, τότε $\overline{A} = \mathrm{bd}(A) \cup A^\circ \subseteq A \cup A = A$, άρα το A είναι κλειστό.

3.31. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $A, B \subseteq X$. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *Αν το A είναι ανοικτό ή κλειστό υποσύνολο του X τότε το* $\mathrm{bd}(A)$ *έχει κενό εσωτερικό.*

(β) *Αν* $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ *τότε* $\mathrm{bd}(A \cup B) = \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B)$.

Υπόδειξη. (α) Έχουμε δει ότι $\mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A^c)$. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση που το A είναι ανοικτό (εξηγήστε γιατί).

Έστω $x \in [\mathrm{bd}(A)]^\circ$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq \mathrm{bd}(A)$. Αφού $x \in \mathrm{bd}(A)$, υπάρχει $y \in A \cap B(x, \varepsilon)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι το A είναι ανοικτό, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $B(y, \delta) \subseteq A$. Αυτό όμως είναι άτοπο: έχουμε $y \in \mathrm{bd}(A)$, άρα η $B(y, \delta)$ πρέπει να περιέχει σημεία του A^c.

Υποθέτοντας ότι υπάρχει $x \in [\mathrm{bd}(A)]^\circ$ καταλήξαμε σε άτοπο. Συνεπώς, το $\mathrm{bd}(A)$ έχει κενό εσωτερικό.

(β) Έστω $x \in \mathrm{bd}(A)$. Τότε $x \in \overline{A}$, άρα $x \notin \overline{B}$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta_0 > 0$ ώστε $B(x, \delta_0) \cap \overline{B} = \emptyset$. Τότε, αν $0 < \delta \leq \delta_0$ έχουμε:

(i) $B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$ άρα $B(x, \delta) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$.

(ii) Υπάρχει $y \in B(x, \delta)$ ώστε $y \notin A$. Επίσης, $y \notin B$ αφού $B(x, \delta) \cap \overline{B} = \emptyset$. Άρα, $y \notin A \cup B$, το οποίο σημαίνει ότι $B(x, \delta) \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$.

Παρατηρώντας ότι, αν κάθε $B(x, \delta)$, $0 < \delta \leq \delta_0$ έχει μη κενή τομή με το $A \cup B$ και το συμπλήρωμά του τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε μπάλα $B(x, \delta)$ με μεγαλύτερη ακτίνα, συμπεραίνουμε ότι $x \in \mathrm{bd}(A \cup B)$. Άρα, $\mathrm{bd}(A) \subseteq \mathrm{bd}(A \cup B)$. Όμοια δείχνουμε ότι $\mathrm{bd}(B) \subseteq \mathrm{bd}(A \cup B)$, άρα $\mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B) \subseteq \mathrm{bd}(A \cup B)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \mathrm{bd}(A \cup B)$. Τότε, $x \in \overline{A \cup B}$ άρα, είτε $x \in \overline{A}$ ή $x \in \overline{B}$. Ας υποθέσουμε ότι $x \in \overline{A}$. Όπως πριν, βρίσκουμε $\delta_0 > 0$ ώστε $B(x, \delta_0) \cap \overline{B} = \emptyset$. Τότε, αν $0 < \delta \leq \delta_0$ έχουμε:

(i) Υπάρχει $y \in A \cup B$ ώστε $y \in B(x, \delta)$ διότι $x \in \mathrm{bd}(A \cup B)$. Όμως, $y \notin B$ διότι $B(x, \delta) \cap \overline{B} = \emptyset$. Άρα, $y \in A$ και αυτό σημαίνει ότι $B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$.

(ii) Υπάρχει $y \in B(x, \delta)$ ώστε $y \notin A \cup B$. Άρα, $y \notin A$, το οποίο σημαίνει ότι $B(x, \delta) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Παρατηρώντας ότι, αν κάθε $B(x, \delta)$, $0 < \delta \leq \delta_0$ έχει μη κενή τομή με το A και το συμπλήρωμά του τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε μπάλα $B(x, \delta)$ με μεγαλύτερη ακτίνα, συμπεραίνουμε ότι $x \in \mathrm{bd}(A)$.

Υποθέτοντας ότι $x \in \overline{B}$ δείχνουμε με τον ίδιο τρόπο ότι $x \in \mathrm{bd}(B)$. Σε κάθε περίπτωση, $x \in \mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B)$. Άρα, $\mathrm{bd}(A) \cup \mathrm{bd}(B) \supseteq \mathrm{bd}(A \cup B)$.

3.32. *Βρείτε υποσύνολο* A *του* $\mathbb{R}$ *ώστε* $(\mathrm{bd}(A))^\circ = \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική. Τότε, $\mathrm{bd}(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. Έπεται ότι $(\mathrm{bd}(\mathbb{Q}))^\circ = \mathbb{R}$.

3.33. *Έστω* A *υποσύνολο του* (X, ρ). *Αν* G *και* H *είναι ξένα ανοικτά σύνολα στο* A, *δείξτε ότι υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα* U *και* V *στο* X *ώστε* $G = A \cap U$ *και* $H = A \cap V$.

Υπόδειξη. Το G είναι ανοικτό στο A, άρα γράφεται ως ένωση από ανοικτές μπάλες του A δηλαδή,

$$G = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x).$$

Ομοίως, το H γράφεται ως ένωση από ανοικτές μπάλες του A δηλαδή,

$$H = \bigcup_{y \in H} B_{\rho_A}(y, \varepsilon_y).$$

Από την $G \cap H = \emptyset$ συμπεραίνουμε ότι αν $x \in G$ και $y \in H$ τότε $\rho(x, y) \geq \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$. Ορίζουμε $U = \bigcup_{x \in G} B_\rho(x, \varepsilon_x/2)$ και $V = \bigcup_{y \in H} B_\rho(y, \varepsilon_y/2)$. Τότε, τα U, V είναι ανοικτά υποσύνολα του X και

$$A \cap U = \bigcup_{x \in G} B_{\rho_A}(x, \varepsilon_x/2) = G \ \text{ και } \ A \cap V = \bigcup_{y \in H} B_{\rho_A}(y, \varepsilon_y/2) = H.$$

Μένει να δείξουμε ότι $U \cap V = \emptyset$. Έστω $z \in U \cap V$. Τότε, υπάρχουν $x \in G$ και $y \in H$ ώστε $z \in B_\rho(x, \varepsilon_x/2)$ και $z \in B_\rho(y, \varepsilon_y/2)$. Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} \leq \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\},$$

δηλαδή $\rho(x, y) < \max\{\varepsilon_x, \varepsilon_y\}$, το οποίο είναι άτοπο.

3.34. *Έστω (X, ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε οικογένεια ξένων ανοικτών υποσυνόλων του X είναι πεπερασμένη ή αριθμήσιμη.*

Υπόδειξη. Ο (X, ρ) είναι διαχωρίσιμος, άρα υπάρχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο D ώστε $\overline{D} = X$. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν G είναι ανοικτό, μη κενό υποσύνολο του X τότε $G \cap D \neq \emptyset$ (πράγματι, αν αυτό δεν ήταν σωστό, θα είχαμε $D \subseteq X \setminus G$ άρα $X = \overline{D} \subseteq \overline{X \setminus G} = X \setminus G$, το οποίο είναι άτοπο).

Έστω $(G_i)_{i \in I}$ οικογένεια μη κενών, ξένων ανά δύο ανοικτών υποσυνόλων του X. Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε κάποιο $d_i \in G_i \cap D$. Η συνάρτηση $f : I \to D$ που απεικονίζει το $i \in I$ στο $d_i \in G_i \cap D$ είναι 1-1: αν $i \neq j$ τότε $(G_i \cap D) \cap (G_j \cap D) = \emptyset$, άρα $d_i \neq d_j$. Έπεται ότι το I είναι ισοπληθικό με ένα υποσύνολο του D, άρα το I είναι το πολύ αριθμήσιμο. Ισοδύναμα, η οικογένεια $(G_i)_{i \in I}$ είναι πεπερασμένη ή αριθμήσιμη.

3.35. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν D είναι ένα πυκνό υποσύνολο του X, τότε $\overline{D \cap G} = \overline{G}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο G του X.*

(β) *Αν το G είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X και το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, τότε το $G \cap D$ είναι πυκνό υποσύνολο του X. Ισχύει το ίδιο αν το G δεν υποτεθεί ανοικτό;*

(γ) *Είναι σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X είναι πυκνό υποσύνολο του X;*

Υπόδειξη. (α) Από την $D\cap G\subseteq G$ έχουμε $\overline{D\cap G}\subseteq \overline{G}$.

Αντίστροφα, έστω $x\in\overline{G}$ και έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $y\in B(x,\varepsilon)\cap G$. Το τελευταίο σύνολο είναι ανοικτό ως τομή ανοικτών συνόλων, άρα υπάρχει $\delta>0$ ώστε $B(y,\delta)\subseteq B(x,\varepsilon)\cap G$. Αφού το D είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $z\in B(y,\delta)\cap D$. Τότε, $z\in B(x,\varepsilon)\cap(G\cap D)$. Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $z\in G\cap D$ ώστε $z\in B(x,\varepsilon)$. Άρα, $x\in\overline{G\cap D}$. Έπεται ότι $\overline{G}\subseteq\overline{G\cap D}$.

(β) Από το (α) έχουμε $\overline{G\cap D}=\overline{G}$. Όμως, $\overline{G}=X$ διότι το G έχει υποτεθεί και πυκνό. Συνεπώς, $\overline{G\cap D}=X$ και το $G\cap D$ είναι πυκνό.

Η υπόθεση ότι το G είναι ανοικτό είναι ουσιαστική: η τομή δύο πυκνών συνόλων δεν είναι απαραίτητα πυκνό σύνολο. Για παράδειγμα, το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ είναι πυκνά στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, όμως η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

(γ) Δεν είναι πάντα σωστό ότι η τομή μιας ακολουθίας ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου X είναι πυκνό υποσύνολο του X. Για παράδειγμα, θεωρούμε το $\mathbb{Q}$ σαν υπόχωρο του $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική). Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο σύνολο, δηλαδή μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή $\mathbb{Q}=\{q_n:n\in\mathbb{N}\}$. Για κάθε $N\in\mathbb{N}$ το σύνολο $F_N=\{q_1,\dots,q_N\}$ είναι κλειστό ως πεπερασμένο σύνολο, άρα το $G_N=\mathbb{Q}\setminus F_N$ είναι ανοικτό. Επίσης, κάθε G_N είναι πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q},|\cdot|)$: αν $q\in\mathbb{Q}$ και $\varepsilon>0$ τότε στην $B(x,\varepsilon)$ υπάρχουν άπειροι ρητοί, άρα και κάποιος q_n με δείκτη $n>N$. Δηλαδή, $B(x,\varepsilon)\cap G_N\neq\emptyset$.

Είδαμε ότι κάθε G_N είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $(\mathbb{Q},|\cdot|)$. Όμως, $\bigcap_{N=1}^\infty G_N=\emptyset$ αφού, για κάθε $N\in\mathbb{N}$, $q_N\notin G_N$ άρα $q_N\notin\bigcap_{N=1}^\infty G_N$.

3.36. *Έστω $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$ μετρικοί χώροι. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο (X,d) με $X=\prod_{i=1}^n X_i$ και $d=\max_{1\le i\le n} d_i$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν κάθε G_i είναι d_i-ανοικτό στον X_i, $i=1,\dots,n$, τότε το $\prod_{i=1}^n G_i$ είναι d-ανοικτό στον X.*

(β) *Αν κάθε F_i είναι d_i-κλειστό στον X_i, $i=1,\dots,n$, τότε το $\prod_{i=1}^n F_i$ είναι d-κλειστό στον X.*

(γ) *Αν κάθε D_i είναι πυκνό στον X_i, $i=1,\dots,n$, τότε το $D=\prod_{i=1}^n D_i$ είναι πυκνό στον X.*

Ειδικότερα, αν κάθε (X_i,d_i), $i=1,...,n$ είναι διαχωρίσιμος τότε ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος.

Υπόδειξη. (α) Έστω $x=(x_1,\dots,x_n)\in\prod_{i=1}^n G_i$. Τότε, $x_i\in G_i$ για κάθε $i=1,\dots,n$. Αφού κάθε G_i είναι d_i-ανοικτό στον X_i, μπορούμε να βρούμε $r_i>0$ ώστε $B_{d_i}(x_i,r_i)\subseteq G_i$, $i=1,\dots,n$. Θέτουμε $r=\min\{r_1,\dots,r_n\}$ και αποδεικνύουμε ότι $B_d(x,r)\subseteq\prod_{i=1}^n G_i$. Πράγματι, αν $y=(y_1,\dots,y_n)\in B_d(x,r)$ τότε $\max_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i)<r$, οπότε $d_i(x_i,y_i)<r\le r_i$ για κάθε $i=1,\dots,n$, άρα $y_i\in B_{d_i}(x_i,r_i)\subseteq G_i$ για κάθε $i=1,\dots,n$, άρα $y\in\prod_{i=1}^n G_i$.

Έπεται ότι το $\prod_{i=1}^n G_i$ είναι ανοικτό στον (X,d).

(β) Έστω (x^m) ακολουθία στο $\prod_{i=1}^n F_i$ με $x^m=(x_1^m,\dots,x_n^m)\xrightarrow{d} x=(x_1,\dots,x_n)\in X$. Η d είναι μετρική γινόμενο, συνεπώς $x_i^m \xrightarrow{d_i} x_i$ για κάθε $i=1,\dots,n$. Αφού κάθε F_i είναι d_i-κλειστό στον X_i, συμπεραίνουμε ότι $x_i\in F_i$ για κάθε $i=1,\dots,n$, άρα $x\in\prod_{i=1}^n F_i$. Έπεται ότι το $\prod_{i=1}^n F_i$ είναι d-κλειστό στον X.

(γ) Έστω $x=(x_1,\dots,x_n)\in X$ και έστω $\varepsilon>0$. Αφού κάθε D_i είναι πυκνό στον X_i, υπάρχουν $y_i\in D_i$ ώστε $d_i(x_i,y_i)<\varepsilon$ για κάθε $i=1,\dots,n$. Αν θέσουμε $y=(y_1,\dots,y_n)$ τότε $y\in D$ και $d(x,y)=\max_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i)<\varepsilon$. Έπεται ότι το $D=\prod_{i=1}^n D_i$ είναι πυκνό στον X.

Ειδικότερα, αν κάθε (X_i,d_i), $i=1,...,n$ είναι διαχωρίσιμος τότε ο (X,d) είναι διαχωρίσιμος: πράγματι, στον προηγούμενο ισχυρισμό, αν κάθε D_i είναι αριθμήσιμο τότε το $D=\prod_{i=1}^n D_i$ είναι επίσης αριθμήσιμο και, όπως είδαμε, πυκνό στον (X,d).

Ομάδα Γ′

3.37. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος και $P\subseteq X$. Το P λέγεται τέλειο αν είναι κενό ή είναι κλειστό και κάθε σημείο του είναι σημείο συσσώρευσης γι' αυτό. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *Ένα συνόλο $P\subseteq (X,\rho)$ είναι τέλειο αν και μόνο αν $P=P'$.*

(β) *Κάθε κλειστό (μη τετριμμένο) διάστημα στο $\mathbb{R}$ (με τη συνήθη μετρική) είναι τέλειο σύνολο. Επίσης, το $\mathbb{R}$ είναι τέλειο αν θεωρηθεί ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.*

(γ) *Κάθε μη κενό τέλειο υποσύνολο P του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο. [Υπόδειξη. Το P είναι άπειρο. Αν είναι αριθμήσιμο, γράφεται στη μορφή $P=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$. Ορίστε κατάλληλη ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ ώστε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $[a_n,b_n]\cap P\neq\emptyset$ αλλά $x_n\notin[a_n,b_n]$.]*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι το P είναι μη κενό (αλλιώς η ισότητα $P=P'$ ισχύει προφανώς). Υποθέτουμε πρώτα ότι το P είναι τέλειο: τότε το P είναι κλειστό και $P\subseteq P'$. Όμως, $P=\overline{P}=P\cup P'$, άρα $P\supseteq P'$. Συνεπώς, $P=P'$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $P=P'$. Τότε, το P είναι κλειστό διότι το P' είναι κλειστό (στην Άσκηση 3.24 είδαμε ότι το σύνολο των σημείων συσσώρευσης οποιουδήποτε συνόλου είναι κλειστό). Από την $P=P'$ έχουμε $P\subseteq P'$. Άρα, το P είναι τέλειο με βάση τον ορισμό.

(β) Ελέγχεται εύκολα. Για παράδειγμα, αν $A=[a,b]$ τότε κάθε $x\in[a,b]$ είναι όριο ακολουθίας (x_n) στο $[a,b]$ με $x_n\neq x$ για κάθε n (εξηγήστε γιατί). Όμοια αν

$$A=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και για κάθε $(x,0)\in A$ έχουμε $(x_n,0):=\left(x+\frac{1}{n},0\right)\in A$, $(x_n,0)\to(x,0)$ και $(x_n,0)\neq(x,0)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

(γ) Έστω P μη κενό τέλειο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x\in P$ και, από τον ορισμό του τέλειου συνόλου, $x\in P'$. Από τον χαρακτηρισμό του σημείου συσσώρευσης, στο $(x-1,x+1)$ υπάρχουν άπειρα σημεία του P. Άρα, το P είναι άπειρο.

Υποθέτουμε ότι το P είναι αριθμήσιμο. Δηλαδή, $P=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. Θα ορίσουμε ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ με $b_n-a_n\to 0$ ώστε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $[a_n,b_n]\cap P\neq\emptyset$ αλλά $x_n\notin[a_n,b_n]$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο: από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων, $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{y\}$. Αφού $y\in[a_n,b_n]$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έχουμε $y\neq x_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα $y\notin P$. Από την άλλη πλευρά, $y\in P'$. Πράγματι, έστω $\varepsilon>0$. Αφού $b_n-a_n\to 0$, υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $b_n-a_n<\varepsilon$. Γι' αυτό το $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_{k_n}\in P$ ώστε $x_{k_n}\in[a_n,b_n]$, άρα $|y-x_{k_n}|\leq b_n-a_n<\varepsilon$. Αφού $y\notin P$, έχουμε $x_{k_n}\neq y$. Σε κάθε μπάλα $B(y,\varepsilon)$ βρήκαμε σημείο του P διαφορετικό από το y. Άρα, $y\in P'$. Δηλαδή, $y\in P'\setminus P$, το οποίο είναι άτοπο αφού το P είναι τέλειο.

Διαδικασία ορισμού των $[a_n,b_n]$: Υπάρχει σημείο x_{k_1} του P διαφορετικό από το x_1, για παράδειγμα το x_2. Θεωρούμε διάστημα $[a_1,b_1]$ με μέσο το x_{k_1} έτσι ώστε $b_1-a_1<1$ και $x_1\notin[a_1,b_1]$.

Αφού το x_{k_1} είναι σημείο συσσώρευσης του P, στο $[a_1,b_1]$ υπάρχουν άπειρα σημεία του P, άρα στο (a_1,b_1) μπορούμε να βρούμε σημείο x_{k_2} του P διαφορετικό από το x_2. Θεωρούμε διάστημα $[a_2,b_2]\subseteq[a_1,b_1]$ με μέσο το x_{k_2} έτσι ώστε $b_2-a_2<1/2$ και $x_2\notin[a_2,b_2]$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει $[a_n,b_n]\subseteq[a_{n-1},b_{n-1}]\subseteq\cdots\subseteq[a_1,b_1]$ ώστε: κάθε $[a_s,b_s]$ έχει μέσο κάποιο $x_{k_s}\in P$, $b_s-a_s<1/s$ και $x_s\notin[a_s,b_s]$, $s=1,\ldots,n$. Αφού το x_{k_n} είναι σημείο συσσώρευσης του P, στο $[a_n,b_n]$ υπάρχουν άπειρα σημεία του P, άρα στο (a_n,b_n) μπορούμε να βρούμε σημείο $x_{k_{n+1}}$ του P διαφορετικό από το x_{n+1}. Θεωρούμε διάστημα $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ με μέσο το $x_{k_{n+1}}$ έτσι ώστε $b_{n+1}-a_{n+1}<1/(n+1)$ και $x_{n+1}\notin[a_{n+1},b_{n+1}]$. Επαγωγικά, ορίζεται η ακολουθία των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ με τις ιδιότητες που ζητούσαμε.

3.38. *Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ και $x\in\mathbb{R}$. Το x λέγεται σημείο συμπύκνωσης του A αν για κάθε $\varepsilon>0$ το σύνολο $A\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ είναι υπεραριθμήσιμο. Αποδείξτε τα ακόλουθα:*

(α) *Αν το A είναι αριθμήσιμο τότε δεν έχει σημεία συμπύκνωσης.*

(β) *Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο και P είναι το σύνολο των σημείων συμπύκνωσης του A τότε $P'=P$ και το $A\setminus P$ είναι αριθμήσιμο.*

(γ) *Αν το A είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε υπάρχουν τέλειο σύνολο P και αριθμήσιμο σύνολο Z ώστε $A=P\cup Z$ και $P\cap Z=\emptyset$.*

Υπόδειξη. (α) Αν το A είχε κάποιο σημείο συμπύκνωσης, τότε το σύνολο $A\cap(x-1,x+1)$ θα ήταν υπεραριθμήσιμο. Άρα, το A θα ήταν υπεραριθμήσιμο.

(β) Θεωρούμε μια αρίθμηση των ρητών $\mathbb{Q}=\{q_n : n\in\mathbb{N}\}$. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τις ανοικτές μπάλες $V_{nk}=B(q_n,1/k)$. Ορίζουμε W να είναι η ένωση όλων των V_{nk} που περιέχουν αριθμήσιμα το πλήθος σημεία του A και θέτουμε $P=\mathbb{R}\setminus W$.

Παρατηρούμε ότι το $W\cap A$ είναι αριθμήσιμο ως αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων, άρα το $A\setminus P$ είναι αριθμήσιμο.

Το W είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών συνόλων, άρα το P είναι κλειστό. Συνεπώς, $P'\subseteq P$. Μένει να δείξουμε ότι το P είναι το σύνολο των σημείων συμπύκνωσης του A και ότι $P\subseteq P'$. Έστω $x\in P$ και $\varepsilon>0$. Βρίσκουμε $k\in\mathbb{N}$ με $\frac{1}{k}<\frac{\varepsilon}{2}$ και $q_n\in\mathbb{Q}$ με

$|q_n - x| < 1/k$. Τότε, $x \in V_{nk}$ άρα η V_{nk} δεν περιέχεται στο W. Αυτό σημαίνει ότι η V_{nk} περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του A. Όμως, $V_{nk} \subseteq B(x, \varepsilon)$. Δείξαμε ότι κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το x περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του A, άρα το x είναι σημείο συμπύκνωσης του A. Τέλος, αφού το $W \cap A$ είναι αριθμήσιμο, η V_{nk} περιέχει υπεραριθμήσιμα το πλήθος σημεία του P, άρα και κάποιο διαφορετικό από το x. Έπεται ότι $x \in P'$.

Μένει να δούμε ότι στο P περιέχονται όλα τα σημεία συμπύκνωσης του A. Αν $x \notin P$ τότε $x \in W$. Το W είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(x, \delta) \subseteq W$. Όμως το $W \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα η $B(x, \delta)$ περιέχει αριθμήσιμα το πλήθος σημεία του A. Έπεται ότι το x δεν είναι σημείο συμπύκνωσης του A.

(γ) Αν το A είναι αριθμήσιμο, θέτουμε $P = \emptyset$ και $Z = A$. Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο, θέτουμε P το σύνολο των σημείων σημείων συμπύκνωσης του A. Το A είναι κλειστό και $P \subseteq \overline{A}$, άρα $P \subseteq A$. Από το (β) γνωρίζουμε ότι το $Z = A \setminus P$ είναι το πολύ αριθμήσιμο.

3.39. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στο X. Το $x \in X$ λέγεται οριακό σημείο της (x_n) αν υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{\rho} x$. Θέτουμε $L(x_n)$ το σύνολο των οριακών σημείων της ακολουθίας (x_n). Αποδείξτε ότι:*

(α) *Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε $L(x_n) = \{x\}$. Ισχύει το αντίστροφο;*

(β) *Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ τότε $A' \subseteq L(x_n) \subseteq \overline{A}$. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι οι εγκλεισμοί μπορεί να είναι γνήσιοι.*

(γ) *Το $L(x_n)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X.*

(δ) *Αν το A δεν είναι κλειστό, δείξτε ότι $L(x_n) \neq \emptyset$. Αν επιπλέον, η (x_n) είναι ρ-Cauchy, τότε είναι ρ-συγκλίνουσα.*

(ε) *Το x είναι οριακό σημείο της (x_n) αν και μόνο για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \geq n$ ώστε $x_m \in B_\rho(x, \varepsilon)$.*

Υπόδειξη. (α) Αν $x_n \xrightarrow{\rho} x$ τότε κάθε υπακολουθία της (x_n) συγκλίνει στο x. Συνεπώς, $L(x_n) = \{x\}$. Το αντίστροφο δεν ισχύει: στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_n = 1$ αν ο n είναι άρτιος και $x_n = n$ αν ο n είναι περιττός. Η (x_n) δεν συγκλίνει και $L(x_n) = \{1\}$ (εξηγήστε γιατί).

(β) Αν $x \in A'$ τότε σε κάθε περιοχή του x υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας (x_n) (διότι περιέχει άπειρα στοιχεία του A). Επιλέγοντας διαδοχικά $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ και χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα του x, μπορούμε να βρούμε γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_n) ώστε $\rho(x, x_{k_n}) < \frac{1}{n}$. Αυτό αποδεικνύει ότι $x \in L(x_n)$.

Αν $x \in L(x_n)$ τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x$. Η $y_n = x_{k_n}$ είναι ακολουθία στο A και $y_n \to x$, άρα $x \in \overline{A}$.

Για το παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία $(x_n) = (0, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ στο $\mathbb{R}$. Τότε, $\overline{A} = A = \{0, 1\}$. Παρατηρήστε ότι $A' = \emptyset$ και $L(x_n) = \{1\}$ διότι $x_n \to 1$.

(γ) Έστω $x \in \overline{L(x_n)}$. Υπάρχει ακολουθία (y_m) οριακών σημείων της (x_n) ώστε $y_m \to x$. Θέτουμε $\varepsilon = 1$ και βρίσκουμε y_{s_1} ώστε $\rho(x, y_{s_1}) < 1$. Υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(y_{s_1}, x_{k_1}) <$

$1-\rho(x,y_{s_1})$ διότι το y_{s_1} είναι οριακό σημείο της (x_n). Τότε, $\rho(x,x_{k_1})<1$ από την τριγωνική ανισότητα.

Έστω ότι έχουμε βρει $k_1<\cdots<k_n$ ώστε $\rho(x,x_{k_l})<\frac{1}{l}$, $l=1,\ldots,n$. Θέτουμε $\varepsilon=1/(n+1)$ και βρίσκουμε $y_{s_{n+1}}$ ώστε $\rho(x,y_{s_{n+1}})<1/(n+1)$. Υπάρχει $k_{n+1}>k_n\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(y_{s_{n+1}},x_{k_{n+1}})<1-\rho(x,y_{s_{n+1}})$ διότι το $y_{s_{n+1}}$ είναι οριακό σημείο της (x_n) (οπότε, οσοδήποτε κοντά στο $y_{s_{n+1}}$ υπάρχουν άπειροι όροι της (x_n)). Τότε, $\rho(x,x_{k_{n+1}})<1/(n+1)$ από την τριγωνική ανισότητα.

Επαγωγικά ορίζουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με την ιδιότητα $x_{k_n}\xrightarrow{\rho}x$. Άρα, $x\in L(x_n)$.

(δ) Αν το A δεν είναι κλειστό, τότε $A'\neq\emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x\in X$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε μπάλα με κέντρο το x περιέχει άπειρους όρους της (x_n), βρίσκουμε αύξουσα ακολουθία δεικτών (k_n) ώστε $\rho(x_{k_n},x)<\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αφού $x_{k_n}\xrightarrow{\rho}x$, συμπεραίνουμε ότι $x\in L(x_n)$. Άρα, $L(x_n)\neq\emptyset$.

Με την επιπλέον υπόθεση ότι η (x_n) είναι ρ-Cauchy, συμπεραίνουμε ότι η (x_n) είναι ρ-συγκλίνουσα (άμεσο, αφού έχει συγκλίνουσα υπακολουθία).

(ε) Αν το x είναι οριακό σημείο της (x_n) τότε υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n}\xrightarrow{\rho}x$. Αν μας δοθούν $\varepsilon>0$ και $n_1\in\mathbb{N}$, βρίσκουμε πρώτα $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho(x,x_{k_n})<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$ και κατόπιν παρατηρούμε ότι αν $n=\max\{n_0,n_1\}$ τότε $k_n\geq n\geq n_1$ και $\rho(x_{k_n},x)<\varepsilon$. Θέτοντας $m=k_n$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, αν για κάθε $\varepsilon>0$ και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $m\geq n$ ώστε $x_m\in B_\rho(x,\varepsilon)$, βρίσκουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) με $x_{k_n}\xrightarrow{\rho}x$ επαγωγικά: θέτουμε $k_0=1$ και στο n-οστό βήμα, θέτουμε $\varepsilon=\frac{1}{n}$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση βρίσκουμε $k_n\geq k_{n-1}+1$ ώστε $\rho(x,x_{k_n})<\frac{1}{n}$.

3.40. *Σωστό ή λάθος; Για κάθε άπειρο μετρικό χώρο (X,d) υπάρχει άπειρο υποσύνολο A του X ώστε κάθε $G\subseteq A$ να είναι ανοικτό ως προς τη σχετική μετρική στο A.*

Υπόδειξη. Σωστό. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν ο X έχει άπειρα το πλήθος μεμονωμένα σημεία, τότε υπάρχει $A\subseteq X$, άπειρο, το οποίο αποτελείται εξ ολοκλήρου από μεμονωμένα σημεία του X. Το A έχει την ιδιότητα που θέλουμε: αν $G\subseteq A$ και $a\in G$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε $B(a,\delta)\cap X=\{a\}$. Ειδικότερα, $B(a,\delta)\cap A=\{a\}\subseteq G$. Άρα, το G είναι ανοικτό στο A.

(β) Αν ο X έχει πεπερασμένα το πλήθος μεμονωμένα σημεία, τότε επιλέγουμε τυχόν $x_0\in X'$. Τότε, υπάρχει ακολουθία (x_n) με την ιδιότητα $\rho(x_1,x_0)>\rho(x_2,x_0)>\cdots$ και $\varepsilon_n:=\rho(x_n,x_0)\to 0$. Θέτουμε $A=\{x_n:n=1,2,\ldots\}$. Το A έχει την ιδιότητα που θέλουμε: αν $G\subseteq A$ και $x\in G$, τότε υπάρχει $n\in\mathbb{N}$ ώστε $x=x_n$. Επιλέγουμε $0<\varepsilon<\min\{\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1},\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n\}$. Τότε, για κάθε $k\neq n$ ισχύει

$$\rho(x_k,x_n)\geq|\varepsilon_k-\varepsilon_n|\geq\min\{\varepsilon_n-\varepsilon_{n+1},\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n\}>\varepsilon,$$

άρα $B(x,\varepsilon)\cap A=\{x\}\subseteq G$.

3.41. *Έστω (X,ρ) διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

(β) *Αν S είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X τότε υπάρχει ακολουθία διαφορετικών ανά δυο στοιχείων του S, η οποία συγκλίνει σε σημείο του S.*

Υπόδειξη. (α) Έστω M το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X. Έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Παρατηρούμε ότι: αν $x\in M$ τότε υπάρχει $\varepsilon_x>0$ ώστε $B(x,\varepsilon_x)=\{x\}$. Αφού $B(x,\varepsilon_x)\cap D\neq\emptyset$, έπεται ότι $x\in D$. Δηλαδή, το M είναι υποσύνολο του D.

Αν υποθέσουμε ότι ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος τότε υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D_0 του X. Έχουμε $M\subseteq D_0$, άρα το M είναι αριθμήσιμο.

(β) Έστω S υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του X. Θεωρούμε τον υπόχωρο (S,ρ_S) του (X,ρ). Αν ο (X,ρ) είναι διαχωρίσιμος τότε ο (S,ρ_S) είναι επίσης διαχωρίσιμος (έχει αποδειχθεί: έχει αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του). Από το (α) το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του (S,ρ_S) είναι το πολύ αριθμήσιμο. Άρα, υπάρχει $x\in S$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του (S,ρ_S). Από τον χαρακτηρισμό του σημείου συσσώρευσης, υπάρχει ακολουθία (x_n) στο S με όρους διαφορετικούς ανά δύο και διαφορετικούς από το x ώστε $\rho_S(x_n,x)\to 0$, δηλαδή $\rho(x_n,x)\to 0$.

3.42. *Έστω $\theta\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$D(\theta):=\{(\cos(2\pi n\theta),\sin(2\pi n\theta)):n\in\mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό στον κύκλο $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=1\}$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τον $z=e^{2\pi\theta i}$ στο $\mathbb{C}$ και το σύνολο $A(\theta)=\{z^n=e^{2\pi n\theta i}:n\in\mathbb{N}\}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν $n>m$ στο $\mathbb{N}$ ώστε $0<|z^n-z^m|<\varepsilon$, άρα $0<|z^{n-m}-1|<\varepsilon$.

Αυτό έπεται άμεσα από το γεγονός ότι η ακολουθία (z^n) είναι φραγμένη, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε, δύο όροι αυτής της υπακολουθίας, που έχουν αρκετά μεγάλους δείκτες, ικανοποιούν τον ισχυρισμό.

Θέτουμε $w=z^{n-m}$ και παρατηρούμε ότι $|w^{k+1}-w^k|=|w-1|<\varepsilon$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία $z^{k(n-m)}$, $k=1,2,\ldots$ είναι διαφορετικά ανά δύο σημεία της περιφέρειας $\mathbb{T}=\{w\in\mathbb{C}:|w|=1\}$ και σχηματίζουν τόξα με χορδές μήκους μικρότερου από ε. Έπεται ότι κάθε τόξο της $\mathbb{T}$, που έχει μήκος μικρότερο από 2ε, περιέχει σημείο της μορφής $z^{k(n-m)}$. Έπεται ότι το $A(\theta)$ είναι πυκνό στην $\mathbb{T}$.

Τώρα, έστω $(x,y)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))\in S^1$. Από τα προηγούμενα, υπάρχει ακολουθία φυσικών k_s ώστε $e^{2\pi k_s\theta i}\to e^{2\pi ti}$. Έπεται ότι

$$(\cos(2\pi k_s\theta),\sin(2\pi k_s\theta))\to(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))=(x,y).$$

Άρα, το $D(\theta)$ είναι πυκνό στην S^1.

3.43. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Το $A\subseteq X$ λέγεται πουθενά πυκνό αν $\mathrm{int}(\overline{A})=\emptyset$. Αποδείξτε ότι:*

(α) *Το* $A \subseteq X$ *είναι πουθενά πυκνό αν και μόνον αν* $A \subseteq \overline{(X \setminus \overline{A})}$.

(β) *Το* $A \subseteq X$ *είναι πουθενά πυκνό και κλειστό αν και μόνον αν το* $X \setminus A$ *είναι πυκνό και ανοικτό.*

(γ) *Αν το* A *είναι κλειστό υποσύνολο του* X, *τότε το* A *είναι πουθενά πυκνό αν και μόνον αν* $A = \mathrm{bd}(A)$.

(δ) *Αν το* A *είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του* X *και το* $X \setminus B$ *είναι πυκνό τότε το* $X \setminus (A \cup B)$ *είναι πυκνό στον* X.

(ε) *Η ένωση πεπερασμένου πλήθους πουθενά πυκνών υποσυνόλων του* X *είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του* X.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι πουθενά πυκνό. Από την $\overline{A} = \overline{\overline{A}} = \mathrm{int}(\overline{A}) \cup \mathrm{bd}(\overline{A})$ παίρνουμε

$$\overline{A} = \mathrm{bd}(\overline{A}) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus \overline{A}}$$

άρα $\overline{A} \subseteq \overline{X \setminus \overline{A}}$.

Αντίστροφα, αν $\overline{A} \subseteq \overline{X \setminus \overline{A}} = X \setminus \mathrm{int}(\overline{A})$, τότε η $\overline{A} = \mathrm{int}(\overline{A}) \cup \mathrm{bd}(\overline{A})$ μας δίνει την $\overline{A} \subseteq \mathrm{bd}(\overline{A})$, δηλαδή,

$$\mathrm{int}(\overline{A}) \cup \mathrm{bd}(\overline{A}) \subseteq \mathrm{bd}(\overline{A}).$$

Αφού $\mathrm{int}(\overline{A}) \cap \mathrm{bd}(\overline{A}) = \emptyset$ έπεται ότι $\mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$, άρα το A είναι πουθενά πυκνό.

(β) Αν το $A \subseteq X$ είναι πουθενά πυκνό και κλειστό τότε το $X \setminus A$ είναι ανοικτό και πυκνό (διότι $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ = X$). Αντίστροφα, αν το $X \setminus A$ είναι ανοικτό και πυκνό, τότε το A είναι κλειστό και $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A} = X$, δηλαδή $A^\circ = \emptyset$, άρα το A είναι κλειστό και πουθενά πυκνό.

(γ) Αν το A είναι κλειστό και πουθενά πυκνό τότε $A^\circ = \emptyset$, οπότε η $A = \overline{A} = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A)$ μας δίνει $A = \mathrm{bd}(A)$. Αντίστροφα, αν το A είναι κλειστό και $A = \mathrm{bd}(A)$, τότε $\mathrm{bd}(A) = A = A^\circ \cup \mathrm{bd}(A) = \mathrm{bd}(A)$, οπότε $A^\circ = \emptyset$ (διότι $A^\circ \cap \mathrm{bd}(A) = \emptyset$).

(δ) Υποθέτουμε ότι το A είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του X και το $X \setminus B$ είναι πυκνό. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού το $\overline{A}$ έχει κενό εσωτερικό, υπάρχει $y \in B(x, \varepsilon) \setminus \overline{A}$. Το $B(x, \varepsilon) \setminus \overline{A}$ είναι ανοικτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon) \setminus \overline{A}$. Το $X \setminus B$ έχει υποτεθεί πυκνό, άρα υπάρχει $u \in B(y, \delta) \cap (X \setminus B)$. Τότε, $u \in B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus (A \cup B))$. Δηλαδή, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus (A \cup B)) \neq \emptyset$. Συνεπώς, το $X \setminus (A \cup B)$ είναι πυκνό στον X.

(ε) Έστω $A_1, \ldots, A_n$ πουθενά πυκνά υποσύνολα του X. Αν $F_i = \overline{A_i}$, $i = 1, \ldots, n$, τότε κάθε F_i είναι κλειστό και έχει κενό εσωτερικό. Επίσης, $\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n} = F_1 \cup \cdots \cup F_n$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι το $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ έχει κενό εσωτερικό.

Γνωρίζουμε ότι το F_1 έχει κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $1 \leq k < n$, το $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ έχει κενό εσωτερικό και δείχνουμε ότι το $F_1 \cup \cdots \cup F_k \cup F_{k+1}$ έχει κενό εσωτερικό. Το ζητούμενο προκύπτει με διαδοχικές εφαρμογές αυτού του ισχυρισμού.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Αφού το $F_1 \cup \cdots \cup F_k$ έχει κενό εσωτερικό και $\overline{X \setminus F_{k+1}} = X \setminus (F_{k+1})^\circ = X$ δηλαδή το $X \setminus F_{k+1}$ είναι πυκνό, εφαρμόζοντας το (δ) βλέπουμε αμέσως ότι το $(X \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k)) \setminus F_{k+1} = X \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_k \cup F_{k+1})$ είναι πυκνό. Άρα, το $F_1 \cup \cdots \cup F_k \cup F_{k+1}$ έχει κενό εσωτερικό.

3.44. *Έστω (q_n) μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Ορίζουμε*

$$I_n = \left(q_n - \frac{1}{2^n}, q_n + \frac{1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι το $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και ότι το U^c είναι πουθενά πυκνό.

Υπόδειξη. Κάθε I_n είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως ανοικτό διάστημα, άρα το $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ είναι ανοικτό. Από τον ορισμό του, το U περιέχει το $\mathbb{Q}$, άρα $\overline{U} \supseteq \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Έπεται ότι το U είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $\mathrm{int}(U^c) = \mathbb{R} \setminus \overline{U} = \emptyset$, δηλαδή το U^c είναι πουθενά πυκνό.

3.45. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το A είναι πουθενά πυκνό.*

(β) *Το $\overline{A}$ δεν περιέχει μη κενό ανοικτό σύνολο.*

(γ) *Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει ένα μη κενό ανοικτό σύνολο ξένο προς το A.*

(δ) *Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X περιέχει μια ανοικτή μπάλα ξένη προς το A.*

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β): Έστω G ανοικτό υποσύνολο του $\overline{A}$. Τότε, $G \subseteq \mathrm{int}(\overline{A}) = \emptyset$ διότι το A είναι πουθενά πυκνό. Άρα, το μόνο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο $\overline{A}$ είναι το κενό σύνολο.

(β) $\Rightarrow$ (γ): Έστω G μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του X. Αφού έχουμε υποθέσει το (β), το $G \setminus \overline{A}$ είναι μη κενό και ανοικτό. Άρα, υπάρχουν $x \in G$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G \setminus \overline{A}$. Έπεται το ζητούμενο, αφού $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, το $B(x, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο και περιέχεται στο G.

(γ) $\Rightarrow$ (δ): Έστω G μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του X. Αφού έχουμε υποθέσει το (γ), υπάρχει μη κενό και ανοικτό $G_1 \subseteq G$ ώστε $G_1 \cap A = \emptyset$. Επιλέγουμε τυχόν $x \in G_1$ και βρίσκουμε $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq G_1$. Τότε, η ανοικτή μπάλα $B(x, \varepsilon)$ περιέχεται στο G και $B(x, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.

(δ) $\Rightarrow$ (α): Έστω $A \subseteq X$ το οποίο δεν είναι πουθενά πυκνό και ικανοποιεί την πρόταση (δ). Τότε, υπάρχουν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{A}$. Αφού ισχύει η (δ) για το A, υπάρχει $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$ ώστε $B(y, \delta) \cap A = \emptyset$. Τότε, $B(y, \delta) \subseteq (X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$ και, ταυτόχρονα, $B(y, \delta) \subseteq B(x, \epsilon) \subseteq \overline{A}$. Έτσι, καταλήγουμε σε άτοπο.

3.46. *Έστω (X_n, ρ_n), $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρικών χώρων με $\rho_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο (X, ρ), όπου $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ και*

$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(x(n), y(n))$. Σταθεροποιούμε $\alpha = (\alpha(n))$ στον X. Θεωρούμε τα σύνολα

$$D_m = \{x = (x(n)) \in X : x(n) = \alpha(n),\ n > m\},\ m = 1, 2, \dots$$

και ορίζουμε

$$D_\alpha := \bigcup_{m=1}^{\infty} D_m.$$

Αποδείξτε ότι το D_α είναι πυκνό στον X.

Υπόδειξη. Έστω $x = (x(n))$ στον X και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$ και ορίζουμε $y = (x(1), \dots, x(m), \alpha(m+1), \alpha(m+2), \dots)$. Τότε, $y \in D_m \subseteq D_\alpha$ και

$$\begin{aligned} \rho(x,y) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{\rho_n(x(n), x(n))}{2^n} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\rho_n(x(n), \alpha(n))}{2^n} \\ &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\rho_n(x(n), \alpha(n))}{2^n} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^m} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $B_\rho(x,\varepsilon) \cap D_\alpha \neq \emptyset$. Έπεται ότι το D_α είναι πυκνό στον (X, ρ).

3.47. *Έστω A, B αριθμήσιμα, πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : A \to B$ η οποία είναι αύξουσα, 1-1 και επί.*

Υπόδειξη. Έστω $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ δύο αριθμήσιμα πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε αύξουσα, 1-1 και επί συνάρτηση $f : A \to B$ (και την αντίστροφή της $g : B \to A$) με την εξής επαγωγική διαδικασία:

1. Θέτουμε $f(a_1) = b_1$ και $g(b_1) = a_1$.

2. Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί τα $f(a_1), \dots, f(a_n)$ και $g(b_1), \dots, g(b_n)$ έτσι ώστε: (i) αν $f(a_k)$ είναι κάποιο b_s από τα $b_1, \dots, b_n$ τότε $g(b_s) = a_k$, (ii) αν $g(b_k)$ είναι κάποιο a_s από τα $a_1, \dots, a_n$ τότε $f(a_s) = b_k$, (iii) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\{a_1, \dots, a_n, g(b_1), \dots, g(b_n)\}$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\{b_1, \dots, b_n, f(a_1), \dots, f(a_n)\}$.

Ορίζουμε τα $f(a_{n+1})$ και $g(b_{n+1})$ ως εξής: αν $a_{n+1} = g(b_k)$ για κάποιο $k = 1, \dots, n$, θέτουμε $f(a_{n+1}) = b_k$. Αλλιώς, $a_{n+1} \notin A_n = \{a_1, \dots, a_n, g(b_1), \dots, g(b_n)\}$. Κοιτάζουμε τη διάταξη των στοιχείων του A_n και τη θέση του a_{n+1} ανάμεσα σε αυτά. Το σύνολο $B_n = \{f(a_1), \dots, f(a_n), b_1, \dots, b_n\}$ έχει ακριβώς την ίδια διάταξη και από την πυκνότητα του B μπορούμε να βρούμε κάποιο b_s το οποίο να έχει την ίδια θέση ως προς τα στοιχεία του B_n (με την θέση του a_{n+1} ως προς τα στοιχεία του A_n). Ορίζουμε $f(a_{n+1}) = b_s$. Τότε, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A_n \cup \{a_{n+1}\}$. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε το $g(b_{n+1})$ αν $b_{n+1} \notin B_n \cup \{f(a_{n+1})\}$, έτσι ώστε η g να είναι γνησίως αύξουσα στο $B_n \cup \{b_{n+1}, f(a_{n+1})\} = B_{n+1}$.

Επαγωγικά, ορίζονται οι $f : A \to B$ και $g : B \to A$ έτσι ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα και επί, και η g να είναι η αντίστροφη της f.