Κεφάλαιο 2

Σύγκλιση ακολουθιών και συνέχεια συναρτήσεων

Ομάδα Α΄

2.1. *Έστω* $(X_1, d_1), \ldots, (X_k, d_k)$ *πεπερασμένη οικογένεια μετρικών χώρων. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρικές γινόμενο στο* $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$*:*

$$\rho_\infty(x, y) = \max\{d_i(x(i), y(i)) : i = 1, 2, \ldots, k\}$$

και

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k} [d_i(x(i), y(i))]^p\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty,$$

όπου $x = (x(1), \ldots, x(k))$, $y = (y(1), \ldots, y(k))$.

Υπόδειξη. (α) Για την ρ_∞: είναι φανερό ότι $\rho_\infty(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$ (διότι $d_i(x(i), y(i)) \geq 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, αφού κάθε d_i είναι μετρική στο X_i). Επίσης, $\rho_\infty(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $d_i(x(i), y(i)) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή αν και μόνο αν $x(i) = y(i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.

Για τη συμμετρική ιδιότητα της ρ_∞ χρησιμοποιούμε τη συμμετρική ιδιότητα των d_i: αν $x, y \in X$ έχουμε $d_i(x(i), y(i)) = d_i(y(i), x(i))$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \rho_\infty(x, y) &= \max\{d_i(x(i), y(i)) : i = 1, \ldots, k\} \\ &= \max\{d_i(y(i), x(i)) : i = 1, \ldots, k\} \\ &= \rho_\infty(y, x). \end{aligned}$$

Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x, y, z \in X$. Υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ ώστε $\rho_\infty(x, z) = d_{i_0}(x(i_0), z(i_0))$. Από την τριγωνική ανισότητα για την d_{i_0} έχουμε

$$d_{i_0}(x(i_0), z(i_0)) \leq d_{i_0}(x(i_0), y(i_0)) + d_{i_0}(y(i_0), z(i_0)) \leq \rho_\infty(x, y) + \rho_\infty(y, z).$$

Συνεπώς,

$$\rho_\infty(x,z) = d_{i_0}(x(i_0), z(i_0)) \leq \rho_\infty(x,y) + \rho_\infty(y,z).$$

Για να δείξουμε ότι η ρ_∞ είναι μετρική γινόμενο πρέπει να δείξουμε ότι: αν (x_m) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$, τότε

$$\lim_{m\to\infty} \rho_\infty(x_m, x) = 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{m\to\infty} d_i(x_m(i), x(i)) = 0 \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, k.$$

Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) έπεται άμεσα από το γεγονός ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, k$,

$$d_i(x_m(i), x(i)) \leq \rho_\infty(x_m, x).$$

Για την άλλη κατεύθυνση παρατηρούμε ότι

$$\rho_\infty(x_m, x) \leq \sum_{i=1}^k d_i(x_m(i), x(i))$$

και ότι, αν $\lim_{m\to\infty} d_i(x_m(i), x(i)) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$ τότε

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^k d_i(x_m(i), x(i)) = \sum_{i=1}^k \lim_{m\to\infty} d_i(x_m(i), x(i)) = 0.$$

(β) Έστω $1 \leq p < \infty$. Είναι φανερό ότι $\rho_p(x,y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$. Επίσης, $\rho_p(x,y) = 0$ αν και μόνο αν $d_i(x(i), y(i)) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή αν και μόνο αν $x(i) = y(i)$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$, δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.

Για τη συμμετρική ιδιότητα της ρ_p χρησιμοποιούμε τη συμμετρική ιδιότητα των d_i: αν $x, y \in X$ έχουμε $d_i(x(i), y(i)) = d_i(y(i), x(i))$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Συνεπώς,

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i), y(i))]^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^k [d_i(y(i), x(i))]^p\right)^{1/p} = \rho_p(y,x).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x, y, z \in X$. Εφαρμόζουμε πρώτα την τριγωνική ανισότητα για κάθε d_i: έχουμε

$$d_i(x(i), z(i)) \leq d_i(x(i), y(i)) + d_i(y(i), z(i)), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Από την ανισότητα του Minkowski,

$$\begin{aligned} \rho_p(x,z) &= \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i), z(i))]^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^k [d_i(x(i), y(i)) + d_i(y(i), z(i))]^p\right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{i=1}^{k}[d_i(x(i),y(i))]^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k}[d_i(y(i),z(i))]^p\right)^{1/p} \\ &= \rho_p(x,y)+\rho_p(y,z). \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι η ρ_p είναι μετρική γινόμενο πρέπει να δείξουμε ότι: αν (x_m) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$, τότε

$$\lim_{m\to\infty} \rho_p(x_m,x)=0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{m\to\infty} d_i(x_m(i),x(i))=0 \text{ για κάθε } i=1,\dots,k.$$

Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) έπεται άμεσα από το γεγονός ότι, για κάθε $i=1,\dots,k$,

$$d_i(x_m(i),x(i)) \leq \rho_p(x_m,x).$$

Για την άλλη κατεύθυνση παρατηρούμε ότι, αν $\lim\limits_{m\to\infty} d_i(x_m(i),x(i)) = 0$ για κάθε $i = 1,\dots,k$, τότε

$$\lim_{m\to\infty}[\rho_p(x,y)]^p = \lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{k}[d_i(x_m(i),x(i))]^p = \sum_{i=1}^{k}\lim_{m\to\infty}[d_i(x_m(i),x(i))]^p = 0.$$

2.2. *Έστω (x_n) και (y_n) βασικές ακολουθίες στο μετρικό χώρο (X,ρ). Δείξτε ότι η $\alpha_n = \rho(x_n,y_n)$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.*

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η (x_n) είναι βασική, άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n,x_m) < \varepsilon/2$ για κάθε $n,m \geq n_1$. Ομοίως, η (y_n) είναι βασική, άρα υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(y_n,y_m) < \varepsilon/2$ για κάθε $n,m \geq n_2$.

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1,n_2\}$ και παρατηρούμε ότι: αν $n,m \geq n_0$ τότε

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)| \leq \rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Συνεπώς, η (α_n) είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$.

2.3. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X,ρ). Θεωρούμε την ακολουθία $\{E_n\}$ υποσυνόλων του X με*

$$E_n = \{x_k : k \geq n\},\ n = 1,2,\dots$$

και την ακολουθία

$$t_n = \sup\{d(x_k,x_n) : k \geq n\} \in [0,+\infty],\ n = 1,2,\dots$$

Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Η (x_n) είναι βασική.

(β) $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

(γ) $t_n \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

Υπόδειξη. (α) $\Rightarrow$ (β). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βασική, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Θεωρούμε τυχόν $n \geq n_0$ και $k, m \geq n$. Τότε $k, m \geq n_0$, άρα $\rho(x_k, x_m) < \varepsilon$. Έπεται ότι $\mathrm{diam}(E_n) = \sup\{\rho(x_k, x_m) : k, m \geq n\} \leq \varepsilon$. Δείξαμε ότι $\mathrm{diam}(E_n) \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $\mathrm{diam}(E_n) \to 0$.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mathrm{diam}(E_n) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Θεωρούμε τυχόν $n \geq n_0$. Για κάθε $k \geq n$ έχουμε $k, n \geq n$, άρα $\rho(x_k, x_n) \leq \mathrm{diam}(E_n) < \varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $\rho(x_k, x_n) < \varepsilon$ για κάθε $k \geq n$, άρα $t_n = \sup\{\rho(x_k, x_n) : k \geq n\} \leq \varepsilon$. Δείξαμε ότι $t_n \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$, άρα $t_n \to 0$.

(γ) $\Rightarrow$ (α). Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $t_n < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $k \geq n \geq n_0$ έχουμε $\rho(x_k, x_n) \leq t_n < \varepsilon$. Ομοίως, για κάθε $n \geq k \geq n_0$ έχουμε $\rho(x_k, x_n) \leq t_k < \varepsilon$. Άρα, για κάθε $k, n \geq n_0$ ισχύει $\rho(x_k, x_n) \leq \max\{t_n, t_k\} < \varepsilon$. Έπεται ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία.

2.4. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) και έστω $x \in X$. Δείξτε ότι:*

(α) *Αν η (x_n) συγκλίνει στο x τότε κάθε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) συγκλίνει στο x.*

(β) *Αν κάθε υπακολουθία της (x_n) έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο x, τότε η (x_n) συγκλίνει στο x.*

Υπόδειξη. (α) Έστω (x_{k_n}) υπακολουθία της (x_n) και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) συγκλίνει στο x, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m \geq n_0$, $\rho(x_m, x) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι: αν $n \geq n_0$ τότε $k_n \geq n \geq n_0$. Συνεπώς, $\rho(x_{k_n}, x) < \varepsilon$. Δηλαδή, η (x_{k_n}) συγκλίνει στο x.

(β) Υποθέτουμε ότι η (x_n) δεν συγκλίνει στο x. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s \geq m$ ώστε $\rho(x_s, x) \geq \varepsilon$.

Ορίζουμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ως εξής: θέτουμε $m = 1$ και επιλέγουμε $k_1 \geq 1$ ώστε $\rho(x_{k_1}, x) \geq \varepsilon$. Θέτουμε $m = k_1 + 1$ και επιλέγουμε $k_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ ώστε $\rho(x_{k_2}, x) \geq \varepsilon$. Συνεχίζουμε επαγωγικά: αν έχουμε επιλέξει $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ ώστε $\rho(x_{k_j}, x) \geq \varepsilon$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, θέτουμε $m = k_n + 1$ και επιλέγουμε $k_{n+1} \geq k_n + 1 > k_n$ ώστε $\rho(x_{k_{n+1}}, x) \geq \varepsilon$.

Η υπακολουθία (x_{k_n}) δεν έχει υπακολουθία η οποία να συγκλίνει στο x, διότι όλοι οι όροι της έχουν απόσταση τουλάχιστον ίση με ε από το x. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

2.5. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Θεωρούμε τον $X \times X$ με οποιαδήποτε μετρική γινόμενο d. Δείξτε ότι η $\rho : (X \times X, d) \to \mathbb{R}$ με $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$ είναι συνεχής.*

Υπόδειξη. Από την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι αν $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο $X \times X$ και $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y) \in X$, τότε $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$. Αν όμως η d είναι μετρική γινόμενο, από την $(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y)$ έπεται ότι $x_n \xrightarrow{\rho} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho} y$.

Από γνωστή πρόταση, αυτό έχει σαν συνέπεια την $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$ (θυμηθείτε την ανισότητα $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leq \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y)$).

2.6. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x \in X$ ισχύει το εξής: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$. Είναι σωστό ότι $x_n \to x$;*

Υπόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (X, \rho) \to \mathbb{R}$ με $g(y) = \rho(y, x)$. Παρατηρήστε ότι η g είναι συνεχής: αυτό προκύπτει άμεσα με τον ορισμό της συνέχειας, αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, για κάθε $y, z \in X$,

$$|g(y) - g(z)| = |\rho(y, x) - \rho(z, x)| \leq \rho(y, z).$$

Από την υπόθεση έχουμε $g(x_n) \to g(x)$, δηλαδή

$$\rho(x_n, x) \to \rho(x, x) = 0$$

όταν το $n \to \infty$. Άρα, $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

Ομάδα Β′

2.7. *Έστω (X_n, d_n), $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθία μετρικών χώρων ώστε $d_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Θεωρούμε το*

$$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \Big\{ x = (x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots) : \ x(n) \in X_n \Big\}.$$

Δηλαδή, ο X αποτελείται από όλες τις ακολουθίες οι οποίες στη n-οστή θέση έχουν στοιχείο του X_n. Ορίζουμε $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)).$$

Δείξτε ότι ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

Υπόδειξη. Η d ορίζεται καλά λόγω της υπόθεσης για τις διαμέτρους των (X_n, d_n): για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x(n), y(n) \in X_n$ ισχύει $d_n(x(n), y(n)) \leq 1$ άρα, για κάθε $x, y \in X$ έχουμε

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty.$$

Είναι φανερό ότι $d(x, y) \geq 0$ για κάθε $x, y \in X$. Επίσης, $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $d_n(x(n), y(n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $x(n) = y(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $x = y$.

Για τη συμμετρική ιδιότητα της d χρησιμοποιούμε τη συμμετρική ιδιότητα των d_n: αν $x, y \in X$ έχουμε $d_n(x(n), y(n)) = d_n(y(n), x(n))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(y(n), x(n)) = d(y,x).$$

Για την τριγωνική ανισότητα, θεωρούμε $x, y, z \in X$. Εφαρμόζουμε πρώτα την τριγωνική ανισότητα για κάθε d_n: έχουμε

$$d_n(x(n), z(n)) \leq d_n(x(n), y(n)) + d_n(y(n), z(n)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), z(n)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x(n), y(n)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(y(n), z(n)) \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι η d είναι μετρική γινόμενο πρέπει να δείξουμε ότι: αν (x_m) είναι ακολουθία στον X και $x \in X$, τότε

$$\lim_{m\to\infty} d(x_m, x) = 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \lim_{m\to\infty} d_n(x_m(n), x(n)) = 0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) έπεται άμεσα από το γεγονός ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$d_n(x_m(n), x(n)) \leq 2^n d(x_m, x).$$

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_m) και το x στο X ικανοποιούν την $\lim\limits_{m\to\infty} d_n(x_m(n), x(n)) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Για κάθε $n = 1, \ldots, k$ έχουμε $\lim\limits_{m\to\infty} d_n(x_m(n), x(n)) = 0$, άρα

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} d_n(x_m(n), x(n)) = 0.$$

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m \geq m_0$,

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} d_n(x_m(n), x(n)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι, για κάθε $m \geq m_0$,

$$d(x_m, x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} d_n(x_m(n), x(n)) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_m(x_m(n), x(n)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $d(x_m, x) \to 0$.

2.8. *Έστω $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρικών χώρων και $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Ορίζουμε $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Δείξτε ότι ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και η d είναι μετρική γινόμενο.

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $\rho_n : X_n \times X_n \to \mathbb{R}$ με

$$\rho_n(x(n), y(n)) = \frac{d_n(x(n), y(n))}{1 + d_n(x(n), y(n))}$$

είναι μετρική στο X_n, διότι $\rho_n = f \circ d_n$ όπου $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ η συνάρτηση $f(t) = \frac{t}{1+t}$ (δείτε την Άσκηση 5 στο Φυλλάδιο 1). Επίσης, είναι φανερό ότι $\rho_n(x(n), y(n)) \leq 1$ για κάθε $x(n), y(n) \in X_n$, δηλαδή $\mathrm{diam}(X_n, \rho_n) \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από την προηγούμενη Άσκηση, η d είναι μετρική στο X και είναι μετρική γινόμενο *ως προς τις* ρ_n: ισχύει $d(x_k, x) \to 0$ αν και μόνο αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} \rho_n(x_k(n), x(n)) = 0$.

Για να δείξουμε ότι η d είναι μετρική γινόμενο *ως προς τις* d_n αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε (σταθερό) $n \in \mathbb{N}$ ισχύει το εξής:

$$d_n(x_k(n), x(n)) \to 0 \ \text{ αν και μόνο αν } \ \rho_n(x_k(n), x(n)) = \frac{d_n(x_k(n), x(n))}{1 + d_n(x_k(n), x(n))} \to 0.$$

Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου ισχυρισμού:

> Έστω (a_k) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $b_k = \frac{a_k}{1+a_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Τότε, $a_k \to 0$ αν και μόνο αν $b_k \to 0$ (άσκηση).

2.9. *Έστω $1 \leq p < \infty$ και $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_n \in \ell_p$ με*

$$x_n = (x(1), \ldots, x(n), 0, 0, \ldots).$$

Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_p = 0$. Ισχύει το αντίστοιχο αποτέλεσμα στον ℓ_∞;

Υπόδειξη. Η ακολουθία $x \in \ell_p$, άρα $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty$. Έπεται (οι «ουρές» συγκλίνουσας σειράς τείνουν στο 0) ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)|^p = 0.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $x - x_n = (0, \ldots, 0, x(n+1), x(n+2), \ldots)$, οπότε

$$\|x - x_n\|_p^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x(k)|^p \to 0.$$

Στον ℓ_∞ δεν έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα: αν θεωρήσουμε τη σταθερή ακολουθία $x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$ τότε $x - x_n = (0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\|x - x_n\|_\infty = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\|_\infty = 1 \neq 0.$$

2.10. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Δείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει στο $x \in X$ αν και μόνο αν η ακολουθία $(y_n) = (x_1, x, x_2, x, x_3, x, \ldots, x_n, x, \ldots)$ συγκλίνει.*

Υπόδειξη. Η ακολουθία (y_n) έχει οριστεί ως εξής: $y_{2k-1} = x_k$ και $y_{2k} = x$, $k \in \mathbb{N}$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k \geq k_0$ τότε $\rho(x_k, x) < \varepsilon$. Θέτουμε $n_0 = 2k_0 - 1$ και θεωρούμε $n \geq n_0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $n = 2k$ τότε $\rho(y_n, x) = \rho(x, x) = 0 < \varepsilon$.

(ii) Αν $n = 2k - 1$ τότε $2k - 1 \geq n_0 = 2k_0 - 1$, δηλαδή $k \geq k_0$. Άρα, $\rho(y_n, x) = \rho(x_k, x) < \varepsilon$.

Είδαμε ότι $\rho(y_n, x) < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, $y_n \to x$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $y_n \to y$ για κάποιο $y \in X$. Τότε, $y_{2k} \to y$. Όμως, η (y_{2k}) είναι σταθερή και ίση με x, άρα $y = x$. Τώρα, από την $y_n \to x$ βλέπουμε ότι $y_{2k-1} \to x$, άρα $x_k \to x$.

2.11. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Υποθέτουμε ότι $x_n \to x \in X$. Δείξτε ότι: για κάθε μετάθεση (1-1 και επί συνάρτηση) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ η ακολουθία $y_n = x_{\sigma(n)}$ συγκλίνει κι αυτή στο x.*

Υπόδειξη. Έστω σ μια μετάθεση του $\mathbb{N}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k > k_0$ τότε $\rho(x_k, x) < \varepsilon$.

Θεωρούμε το σύνολο $A(k_0) = \{\sigma^{-1}(1), \ldots, \sigma^{-1}(k_0)\}$. Αφού η σ είναι 1-1 και επί, το $A(k_0)$ έχει ακριβώς k_0 στοιχεία. Θέτουμε $n_0 = \max A(k_0)$ (το μέγιστο στοιχείο του $A(k_0)$).

Τότε, αν $n > n_0$ έχουμε $n \neq \sigma^{-1}(j)$ για κάθε $j = 1, \ldots, k_0$. Δηλαδή, $\sigma(n) \neq j$ για κάθε $j = 1, \ldots, k_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\sigma(n) > k_0$, άρα $\rho(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$.

Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_{\sigma(n)}, x) < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$. Έπεται ότι $x_{\sigma(n)} \to x$.

2.12. *Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \neq x_m$ για $n \neq m$. Θέτουμε*

$$A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}.$$

Δείξτε ότι: αν $x_n \to x \in X$ τότε για κάθε 1-1 συνάρτηση $f : A \to A$ ισχύει $f(x_n) \to x$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k > k_0$ τότε $\rho(x_k, x) < \varepsilon$.

Θεωρούμε το σύνολο $C = \{x_1, \ldots, x_{k_0}\}$ και ορίζουμε $B = \{n \in \mathbb{N} : f(x_n) \in C\}$. Αφού η f είναι 1-1, το σύνολο B έχει το πολύ k_0 στοιχεία (για κάθε $k \leq k_0$ υπάρχει το πολύ ένας $n \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x_n) = x_k$). Θέτουμε $n_0 = \max B$ (το μέγιστο στοιχείο του B).

Τότε, αν $n > n_0$ έχουμε $n \notin B$. Δηλαδή, $f(x_n) \notin C$, το οποίο σημαίνει ότι $f(x_n) = x_s$ για κάποιο $s > k_0$, άρα $\rho(f(x_n), x) = \rho(x_s, x) < \varepsilon$.

Δείξαμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(f(x_n), x) < \varepsilon$ για κάθε $n > n_0$. Έπεται ότι $f(x_n) \to x$.

2.13. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Λέμε ότι η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1}) < +\infty.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

(α) *Αν η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση τότε είναι βασική (άρα, και φραγμένη). Ισχύει το αντίστροφο;*

(β) *Αν η (x_n) είναι βασική τότε έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.*

(γ) *Η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία με φραγμένη κύμανση.*

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι η (x_n) έχει φραγμένη κύμανση. Έστω $\varepsilon > 0$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_n, x_{n+1})$ συγκλίνει, άρα – από το κριτήριο ãυςηψ για σειρές πραγματικών αριθμών – υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m > k \geq N$,

$$\sum_{n=k}^{m-1} \rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Έστω $m > k \geq N$. Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα γράφουμε

$$\rho(x_k, x_m) \leq \rho(x_k, x_{k+1}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \leq \sum_{n=k}^{m-1} \rho(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: θεωρούμε το $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική και μια ακολουθία (a_k) ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ να συγκλίνει αλλά να μην συγκλίνει απολύτως (παράδειγμα, η $a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$). Θέτουμε $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Τότε, η (x_n) είναι συγκλίνουσα, άρα είναι βασική. Όμως,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_k| = \infty.$$

Άρα, η (x_n) δεν έχει φραγμένη κύμανση.

(β) Έχουμε υποθέσει ότι η (x_n) είναι βασική ακολουθία. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2}$ για κάθε $k, m \geq k_1$.

Στη συνέχεια θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$ και βρίσκουμε $k_2 > k_1$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2^2}$ για κάθε $k, m \geq k_2$.

Συνεχίζουμε επαγωγικά: στο n-οστό βήμα θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ και βρίσκουμε $k_n > k_{n-1}$ ώστε $\rho(x_k, x_m) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $k, m \geq k_n$.

Θεωρούμε την υπακολουθία (x_{k_n}). Από τον τρόπο ορισμού των k_n βλέπουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $k_{n+1}, k_n \geq k_n$, άρα $\rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$. Έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < +\infty$. Συνεπώς, η (x_{k_n}) έχει φραγμένη κύμανση.

(γ) Υποθέτουμε πρώτα ότι η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με φραγμένη κύμανση. Από το (α) η (x_{k_n}) είναι βασική. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία (x_{k_n}). Από το (β) η (x_{k_n}) έχει υπακολουθία $(x_{k_{s_n}})$ η οποία έχει φραγμένη κύμανση. Η $(x_{k_{s_n}})$ είναι υπακολουθία της (x_n), συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

2.14. *Έστω (x_n) ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ). Δείξτε ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία αν και μόνο αν έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα $\rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η (x_n) έχει βασική υπακολουθία (x_{t_n}). Όπως στην Άσκηση 2.13(β) βρίσκουμε υπακολουθία $(x_{t_{s_n}})$ της (x_{t_n}) η οποία ικανοποιεί την

$$\rho(x_{t_{s_{n+1}}}, x_{t_{s_n}}) < \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $(x_{t_{s_n}})$ είναι υπακολουθία της (x_n), έχουμε το ζητούμενο (με $k_n = t_{s_n}$).

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) με την ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^n}$. Τότε, η (x_{k_n}) είναι βασική ακολουθία. Πράγματι, αν $m > n$ έχουμε

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_m}) \leq \rho(x_{k_n}, x_{k_{n+1}}) + \cdots + \rho(x_{k_{m-1}}, x_{k_m}) < \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, αν επιλέξουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$, έχουμε: για κάθε $m > n \geq n_0$,

$$\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) < \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon.$$