5. Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

5.1. Αν $f_n, g_n : [0,1] \to [0,1]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, δείξτε ότι η ακολουθία (h_n) όπου $h_n = f_n \circ g_n$ (δηλ. $h_n(t) = f_n(g_n(t))$) συγκλίνει ομοιόμορφα στην $h = f \circ g$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι αφού οι f_n, g_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, οι f, g είναι συνεχείς. Για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned} |h(t) - h_n(t)| &= |f(g(t)) - f_n(g_n(t))| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| - |f(g_n(t)) - f_n(g_n(t))| \\ &= |f(g(t)) - f(g_n(t))| - |(f - f_n)(g_n(t))| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| + \|f - f_n\|_\infty. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $u, v \in [0,1]$ και $|u - v| < \delta$, τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon/2$ (αυτό γίνεται, γιατί η f είναι ομοιόμορφα συνεχής). Στη συνέχεια βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: $\|g - g_n\|_\infty < \delta$ και $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$ (αυτό γίνεται, γιατί $f_n \to f$, $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$). Τότε, για κάθε $t \in [0,1]$ και για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|g(t) - g_n(t)| < \delta$, άρα

$$|h(t) - h_n(t)| \leq |f(g(t)) - f(g_n(t))| + \|f - f_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\|h - h_n\|_\infty \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, $h_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

5.2. Έστω (f_n) ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$ με $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(i) Για κάθε $a \in [0,1)$ η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,a]$.

(ii) Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1)$.

Υπόδειξη. (i) *Σωστό.* Στο συμπαγές $[0,a]$ η (f_n) ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Dini: οι f_n είναι συνεχείς, $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Άρα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.
(ii) *Λάθος.* Η ακολουθία $f_n(x) = x^n$ ικανοποιεί τις υποθέσεις στο $[0,1)$: έχουμε ότι οι f_n είναι συνεχεία, $f_n \geq f_{n+1} \geq \cdots \geq 0$ και $f_n \to 0$ κατά σημείο. Όμως, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{x^n : 0 \leq x < 1\} = 1 \not\to 0.$$

5.3. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα, όπου $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, δείξτε ότι η f έχει ρίζα.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in [0,1]$ ώστε $f_n(x_n) = 0$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n} \to x \in [0,1]$. Τότε,

$$(*) \qquad \begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f_{k_n}(x_{k_n})| \leq |f(x) - f(x_{k_n})| + |f(x_{k_n}) - f_{k_n}(x_{k_n})| \\ &\leq |f(x) - f(x_{k_n})| + \|f - f_{k_n}\|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

διότι $f(x_{k_n}) \to f(x)$ από την αρχή της μεταφοράς για τη συνεχή συνάρτηση f στο σημείο x, και $\|f - f_{k_n}\|_\infty \to 0$ λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης των f_n (άρα και των f_{k_n}) στην f.

Από την $(*)$ έπεται άμεσα ότι $f(x) = 0$, δηλαδή η f έχει ρίζα.

5.4. (α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n, g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, όπου

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{και} \qquad g_n(x) = x^n(1 - x).$$

(β) Εξετάστε για ποιά $x \geq 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Για ποιές τιμές του $a > 0$ είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, a]$;

Υπόδειξη. (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n(x) \to f(x)$, όποτ $f(x) = 0$ αν $0 \leq x < 1$ και $f(1) = 1$. Αφού οι f_n είναι συνεχείς και η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 1$, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Για την g_n παρατηρούμε ότι $g_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$, άρα η g_n παίρνει μέγιστη τιμή στο σημείο $\frac{n}{n+1}$. Έπεται ότι

$$\|g_n\|_\infty = g_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Αφού $\|g_n\|_\infty \to 0$, έχουμε $g_n \to 0$ ομοιόμορφα.

(β) Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει αν $0 \leq x < 1$ και αποκλίνει αν $x \geq 1$. Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει αν $0 \leq x \leq 1$ και αποκλίνει αν $x > 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$ για κάθε $0 < a < 1$. Πράγματι, αν $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ τότε $\|f_n\|_\infty = \frac{a^n}{n}$ στο $[0, a]$, και αφού $\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Αν $a \geq 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, διότι τότε θα συνέκλινε για $x = 1$.

Η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$ για κάθε $0 < a \leq 1$. Πράγματι, αν $g_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ τότε $\|g_n\|_\infty = \frac{a^n}{n^2}$ στο $[0, a]$, και αφού $\sum_{n=1}^\infty \frac{a^n}{n^2} < \infty$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο του Weierstrass. Αν $a > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^2}$ δεν συγκλίνει ομοιόμορφα, διότι τότε θα συνέκλινε για $x \in (1, a]$.

5.5. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0, \infty)$. Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[a, \infty)$, $a > 0$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $e^{\sqrt{n}x} > \frac{(\sqrt{n}x)^4}{24} = \frac{x^4n^2}{24}$ για κάθε $x > 0$ (γενικότερα, αν $y > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ τότε $e^y > y^k/k!$). Άρα,

$$0 < nxe^{-\sqrt{n}x} \leq \frac{24nx}{x^4n^2} = \frac{24}{x^3n} \to 0$$

για κάθε $x > 0$. Επίσης, $f_n(0) = 0 \to 0$. Έτσι, έχουμε $f_n \to 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\|f_n\|_\infty \geq f_n(1/\sqrt{n}) = \sqrt{n}e^{-1} \to +\infty$$

καθώς το $n \to \infty$. Άρα, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

Έστω $a > 0$. Όπως πριν, για κάθε $x \in [a, \infty)$ έχουμε

$$0 < nxe^{-\sqrt{n}x} \leq \frac{24}{x^3n} \leq \frac{24}{a^3n},$$

άρα $\|f_n\|_\infty \leq \frac{24}{a^3n} \to 0$ (στο $[a, \infty)$) και έπεται ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$.

5.6. Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Δείξτε ότι:

(i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f;

(ii) Για κάθε $a > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, a]$.

Υπόδειξη. (i) Για $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$. Για $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{nx}{nx+1} = \frac{x}{x + \frac{1}{n}} \to 1.$$

Άρα, $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου $f(x) = 1$ αν $x > 0$ και $f(x) = 0$ αν $x = 0$.

(ii) Έστω $a > 0$. Η (f_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[0, a]$, διότι οι f_n είναι συνεχείς ενώ η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x = 0$. Στο $[a, \infty)$ έχουμε $f_n \to f \equiv 1$ κατά σημείο, και

$$|f_n(x) - 1| = \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| = \frac{1}{nx+1} \leq \frac{1}{na+1}$$

για κάθε $x \geq a$, άρα

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup \left\{ \left| \frac{nx}{nx+1} - 1 \right| : x \geq a \right\} = \frac{1}{na+1} \to 0,$$

άρα $f_n \to f \equiv 1$ ομοιόμορφα.

5.7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και έστω (δ_n) ακολουθία με $\delta_n > 0$ για κάθε n και $\delta_n \to 0$. Θέτουμε $f_n(x) = \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $u, v \in \mathbb{R}$ και $|u - v| < \delta$ τότε $|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$.

Αφού $\delta_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \delta_n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $t \in [x, x + \delta_n]$ έχουμε $|t - x| \leq \delta_n < \delta$, άρα $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} f(t)dt - f(x) \right| = \left| \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} (f(t) - f(x))\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \frac{1}{\delta_n} \int_x^{x+\delta_n} \varepsilon\, dt \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \varepsilon.$$

Έπεται ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

5.8. (α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha, \alpha] \subset \mathbb{R}$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2},$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$$

συγκλίνει (απολύτως) κατά σημείο στο $\mathbb{R}$.

Έστω $\alpha > 0$. Αν ορίσουμε $f_n(x) = \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ έχουμε

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$$

για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$, άρα $\|f_n\|_\infty \leq \frac{|\alpha|}{n^2}$ στο $[-\alpha, \alpha]$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\alpha|}{n^2} < \infty$, το κριτήριο του Weierstrass μας εξασφαλίζει ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$.

(β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\alpha > 0$ ώστε $-\alpha < x < \alpha$. Αφού οι f_n είναι συνεχείς στο $[-\alpha, \alpha]$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\alpha, \alpha]$, συμπεραίνουμε ότι η $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin(n^2 x)}{n^2}$ είναι συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$. Ειδικότερα, η f είναι συνεχής στο x.

Αφού το $x \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5.9. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω (K_n) φθίνουσα ακολουθία μη κενών συμπαγών υποσυνόλων του X. Ορίζουμε $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n)$. Δείξτε ότι υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Ποιά είναι η f;

Υπόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ είναι μη κενό συμπαγές σύνολο. Η ακολουθία (K_n) είναι φθίνουσα, άρα η ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n)$ είναι αύξουσα. Επίσης, αφού $K \subseteq K_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n) \leq \mathrm{dist}(x, K)$. Συνεπώς, για κάθε $x \in X$ υπάρχει το $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ και $f(x) \leq \mathrm{dist}(x, K)$.

Έστω $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $z_n \in K_n$ ώστε $f_n(x) = \mathrm{dist}(x, K_n) = d(x, z_n)$. Η ακολουθία (z_n) περιέχεται στο συμπαγές σύνολο K_1, άρα έχει υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z \in X$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η (K_n) είναι φθίνουσα ελέγχουμε ότι $z \in K$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Τότε,

$$\mathrm{dist}(x, K) \leq d(x, z) = \lim_{n\to\infty} d(x, z_{k_n}) = \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f(x) = \mathrm{dist}(x, K)$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Για το σκοπό αυτό αποδεικνύουμε το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$,

$$(*) \qquad K_n \subseteq K_\varepsilon = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, K) < \varepsilon\}.$$

Αν αποδείξουμε αυτό, τότε για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X$ βρίσκουμε $z_n(x) \in K_n$ με $f_n(x) = d(x, z_n(x))$ και $y_n(x) \in K$ με $d(z_n(x), y_n(x)) < \varepsilon$, και γράφουμε

$$f_n(x) \leq f(x) \leq d(x, y_n(x)) \leq d(x, z_n(x)) + d(z_n(x), y_n(x)) < f_n(x) + \varepsilon,$$

απ' όπου έπεται ότι $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$.

Για την απόδειξη της $(*)$ μιμούμαστε την απάντηση της Άσκησης 4.8: αν $G_n = X \setminus K_n$ τότε κάθε G_n είναι ανοικτό και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = X \setminus K.$$

Συνεπώς,

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cup K_\varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι το K_ε είναι ανοικτό (εξηγήστε γιατί). Άρα, η οικογένεια $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{K_\varepsilon\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ ώστε

$$X = G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup G_{n_k} \cup K_\varepsilon.$$

Όμως, $K_{n_1} \supseteq \cdots \supseteq K_{n_k}$, άρα $G_{n_1} \subseteq \cdots \subseteq G_{n_k}$. Συνεπώς,

$$X = G_{n_k} \cup K_\varepsilon = (X \setminus K_{n_k}) \cup K_\varepsilon.$$

Έπεται ότι $K_{n_k} \subseteq K_\varepsilon$. Άρα, για κάθε $n \geq n_k$ έχουμε $K_n \subseteq K_\varepsilon$.

5.10. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $E \subseteq X$. Δείξτε ότι το E είναι F_σ-σύνολο αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $E = \{x \in X : \sup_n |f_n(x)| < \infty\}$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ ώστε $E = \{x \in X : \sup_n |f_n(x)| < \infty\}$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$F_k = \{x \in X : \sup_n |f_n(x)| \leq k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |f_n(x)| \leq k\}.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε F_k είναι κλειστό σύνολο ως τομή κλειστών συνόλων. Επίσης,

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

άρα το E είναι F_σ-σύνολο.

Το αντίστροφο αφήνεται για εσάς!