4. Συμπαγείς μετρικοί χώροι

4.1. Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος, (Y,σ) μετρικός χώρος και $f:X\to Y$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι: αν $K\subseteq Y$ είναι συμπαγές τότε το $f^{-1}(K)\subseteq X$ είναι συμπαγές.

Υπόδειξη. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του Y. Τότε, το K είναι κλειστό, και αφού η f είναι συνεχής, το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό υποσύνολο του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, έπεται ότι το $f^{-1}(K)$ είναι συμπαγές.

4.2. Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f:X\to X$ συνεχής. Ορίζουμε μια ακολουθία υποσυνόλων του X ώς εξής: $K_1=X$ και $K_{n+1}=f(K_n)$ για κάθε $n\geq 1$. Αποδείξτε ότι η $\{K_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων του X. Αν $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$, αποδείξτε ότι $K\neq\emptyset$ και $f(K)=K$.

Υπόδειξη. Έχουμε $K_2=f(X)\subseteq X=K_1$ και, επαγωγικά, αν $K_n\subseteq K_{n-1}$ τότε $f(K_n)\subseteq f(K_{n-1})$, δηλαδή $K_{n+1}\subseteq K_n$.

Ορίζουμε $K=\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n$. Το K είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του X (από την ιδιότητα πεπερασμένων τομών). Είναι άμεσο ότι $f(K)\subseteq K_n$ για κάθε n, άρα $f(K)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n=K$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θεωρούμε τυχόν $x\in K$. Τότε, $x\in f(K_n)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $z_n\in K_n$ ώστε $x=f(z_n)$. Η (z_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z\in X$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $z\in K_m$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$ (εξηγήστε γιατί). Πράγματι, αν $m\in\mathbb{N}$ τότε η $(z_{k_n})_{n\geq m}$ βρίσκεται μέσα στο $K_{k_m}\subseteq K_m$. Αφού το K_m κλειστό και η $(z_{k_n})_{n\geq m}$ συγκλίνει στο z, το ζητούμενο έπεται.

4.3. Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $f:X\to X$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X ώστε $d(x_n,f(x_n))\to 0$. Δείξτε ότι η f έχει σταθερό σημείο.

Υπόδειξη. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $x\in X$ και υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) ώστε $x_{k_n}\to x$. Αφού η f είναι συνεχής, παίρνουμε $f(x_{k_n})\to f(x)$. Επομένως,

$$0=\lim_{n\to\infty}d(x_n,f(x_n))=\lim_{n\to\infty}d(x_{k_n},f(x_{k_n}))=d(x,f(x)),$$

κι έχουμε το ζητούμενο.

4.4. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω D πυκνό υποσύνολο του X. Αν κάθε ακολουθία στοιχείων του D έχει υπακολουθία που συγκλίνει (στον X) δείξτε ότι ο (X,d) είναι συμπαγής.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στον X. Αφού το D είναι πυκνό, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_n\in D$ ώστε $d(x_n,z_n)<\frac{1}{n}$. Από την υπόθεση, η (z_n) έχει υπακολουθία (z_{k_n}) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $z\in X$. Τότε,

$$d(x_{k_n},z)\leq d(x_{k_n},z_{k_n})+d(z_{k_n},z)<\frac{1}{k_n}+d(z_{k_n},z)\to 0,$$

διότι $k_n\to\infty$. Άρα, $x_{k_n}\to x$. Έπεται ότι ο (X,d) είναι (ακολουθιακά) συμπαγής.

4.5. Έστω (X,d) μετρικός χώρος με την εξής ιδιότητα: κάθε συνεχής συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Δείξτε ότι ο (X,d) είναι συμπαγής.

Υπόδειξη. Αν ο (X,d) είναι συμπαγής τότε γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Για το αντίστροφο, αν υποθέσουμε ότι ο X δεν είναι συμπαγής τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε το σύνολο $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ να μην έχει σημεία συσσώρευσης. Άρα, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon_n>0$ τέτοια ώστε οι κλειστές μπάλες $\overline{B}(x_n,\varepsilon_n)$ να είναι ξένες (βρίσκουμε πρώτα $\delta_n>0$ ώστε $B(x_n,\delta_n)\cap(A\setminus\{x_n\})=\emptyset$ και κατόπιν θέτουμε $\varepsilon_n=\frac{1}{3}\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ – εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Ορίζουμε $f:X\to\mathbb{R}$ με

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1-\frac{d(x,x_n)}{\varepsilon_n}\right)\chi_{B(x_n,\varepsilon_n)}(x).$$

Τότε, η f είναι συνεχής (εξηγήστε γιατί) και $f(x_n)=n\to\infty$, άρα η f δεν είναι φραγμένη.

4.6. Έστω $f : (X,d) \to (Y,\sigma)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν ο X είναι συμπαγής τότε για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Υπόδειξη. Έστω $A \subseteq X$. Αφού η f είναι συνεχής, από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Από την άλλη πλευρά, αφού ο X είναι συμπαγής και το $\overline{A}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X, έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές σύνολο, και αφού η f είναι συνεχής, το $f(\overline{A})$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y. Ειδικότερα, το $f(\overline{A})$ είναι κλειστό, και αφού $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ (διότι $A \subseteq \overline{A}$) έπεται ότι $\overline{f(A)} \subseteq f(\overline{A})$.

Έπεται ότι $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

4.7. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε την απάντησή σας):

(i) Αν $f : (X,\rho) \to (Y,\sigma)$ είναι ομοιομορφισμός και ο X είναι ολικά φραγμένος, τότε και ο Y θα είναι ολικά φραγμένος.

(ii) Αν (x_n) είναι βασική ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ), τότε το σύνολο $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ολικά φραγμένο.

Υπόδειξη. (i) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε τους $X = (-/pi/2, \pi/2)$ και $Y = \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, τότε η $f : X \to Y$ με $f(x) = \tan x$ είναι ομοιομορφισμός. Όμως, ο X είναι ολικά φραγμένος ενώ ο Y όχι.

(ii) *Σωστό.* Έστω (x_n) βασική ακολουθία στον (X,ρ) και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geq n_0$ ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Ειδικότερα, $x_n \in B(x_{n_0}, \varepsilon)$ για κάθε $n \geq n_0$. Έπεται ότι

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_0},\varepsilon).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το A είναι ολικά φραγμένο.

4.8. Έστω (X,d) συμπαγής μετρικός χώρος και έστω (K_n) φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X ώστε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ να είναι μονοσύνολο. Δείξτε ότι $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$.

Υπόδειξη. Έστω x_0 το μοναδικό σημείο του $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ και έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι: αν $G_n = X \setminus K_n$ τότε κάθε G_n είναι ανοικτό και

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus K_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = X \setminus \{x_0\}.$$

Συνεπώς,

$$X = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Αυτό σημαίνει ότι η οικογένεια $\{G_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{B(x_0,\varepsilon/2)\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του X. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ ώστε

$$X = G_{n_1} \cup G_{n_2} \cup G_{n_k} \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Όμως, $K_{n_1} \supseteq \cdots \supseteq K_{n_k}$, άρα $G_{n_1} \subseteq \cdots \subseteq G_{n_k}$. Συνεπώς,

$$X = G_{n_k} \cup B(x_0, \varepsilon/2) = (X \setminus K_{n_k}) \cup B(x_0, \varepsilon/2).$$

Έπεται ότι $K_{n_k} \subseteq B(x_0, \varepsilon/2)$. Άρα, για κάθε $n \geq n_k$ έχουμε $K_n \subseteq B(x_0, \varepsilon/2)$, και

$$\mathrm{diam}(K_n) \leq \mathrm{diam}(B(x_0, \varepsilon/2)) \leq \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\mathrm{diam}(K_n) \to 0$.

4.9. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και έστω $x_0 \in X$. Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $X \setminus B(x_0,\varepsilon)$ είναι συμπαγές, αποδείξτε ότι ο (X,d) είναι συμπαγής.

Υπόδειξη. Θεωρούμε τυχούσα ανοικτή κάλυψη $(U_i)_{i \in I}$ του X. Υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $x_0 \in U_{i_0}$. Αφού το U_{i_0} είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ ώστε $B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq U_{i_0}$.

Θεωρούμε το $X \setminus B(x_0, \varepsilon_0)$. Από την υπόθεση είναι συμπαγές σύνολο και περιέχεται στην $\bigcup_{i\in I} U_i$. Συνεπώς, υπάρχουν $i_1, \ldots, i_m \in I$ ώστε

$$X \setminus B(x_0, \varepsilon_0) \subseteq U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}.$$

Έπεται ότι

$$X = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_m}.$$

Με βάση τον ορισμό, ο (X, d) είναι συμπαγής.

4.10. Αν A, B είναι δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

είναι συμπαγές.

Υπόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο $A + B$. Τότε, κάθε x_n γράφεται στη μορφή $x_n = a_n + b_n$, όπου $a_n \in A$ και $b_n \in B$. Αφού το A είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ώστε $a_{k_n} \to a \in A$. Αφού το B είναι συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία $(b_{k_{\lambda_n}})$ της (b_{k_n}) ώστε $b_{k_{\lambda_n}} \to b \in B$. Αφού η $(a_{k_{\lambda_n}})$ είναι υπακολουθία της (a_{k_n}) και $a_{k_n} \to a$, έχουμε $a_{k_{\lambda_n}} \to a$. Τότε,

$$x_{k_{\lambda_n}} = a_{k_{\lambda_n}} + b_{k_{\lambda_n}} \to a + b.$$

Δηλαδή, η (x_n) έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο του $A + B$. Έπεται ότι το $A + B$ είναι συμπαγές.